P3J

本科 1 期 4 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理

1章　復元力と単振動（1）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) (a) $x = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$

(b) (a) の x を t で微分していくことにより，

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2\pi A}{T}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \\ \ddot{x} = -\dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \end{cases}$$

(c) 右向きを正として摩擦力を F とおくと，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = F \qquad \therefore \quad F = -\frac{4\pi^2 Am}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(d) 鉛直方向の力のつりあいより，垂直抗力の大きさは mg と分かる．また，(c) より $F_{\max} = \dfrac{4\pi^2 Am}{T^2}$ なので，物体 P がすべらないための条件は，

$$\frac{4\pi^2 Am}{T^2} \leqq \mu mg \qquad \therefore \quad T \geqq 2\pi\sqrt{\frac{A}{\mu g}}$$

(2) (a) 垂直抗力の大きさを R とすると，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = R - mg \qquad \therefore \quad R = mg - \frac{4\pi^2 Am}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(b) (a) より $R_{\min} = mg - \dfrac{4\pi^2 Am}{T^2}$ なので，物体が台から離れないための条件は，

$$mg - \frac{4\pi^2 Am}{T^2} \geqq 0 \qquad \therefore \quad T \geqq 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$$

【2】

《解答》

座標軸設定①

ばねの自然長の位置を原点として，鉛直下向きに x 軸を設定する．この場合，物体の位置とばねの伸びは一致する．運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx + mg \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

これより，小球は中心が $x = \dfrac{mg}{k}$ で角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることが分かる．振幅を $A(>0)$，初期位相を α とすると，一般解は，

$$x = \frac{mg}{k} + A\sin(\omega t + \alpha) \qquad \therefore \quad \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

(1) 初期条件 $x(0) = \dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}(0) = -v_0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{k} = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ -v_0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha = \pi \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \pi) = \frac{mg}{k} - v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) 初期条件 $x(0) = \dfrac{mg}{k} + a$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{k} + a = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = a \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mg}{k} + a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3) 初期条件 $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{mg}{k} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

座標軸設定②

つり合い位置を原点として，鉛直下向きに x 軸を設定する．この場合，ばねの伸びは，$\dfrac{mg}{k}+x$ と表せる．運動方程式は，

$$m\ddot{x}=-k\left(x+\frac{mg}{k}\right)+mg \qquad \therefore \quad \ddot{x}=-\frac{k}{m}x$$

これより，小球は中心が $x=0$ で角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることが分かる．振幅を $A(>0)$，初期位相を α とすると，一般解は，

$$x=A\sin(\omega t+\alpha) \qquad \therefore \quad \dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

(1) 初期条件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=-v_0$ より，

$$\begin{cases}0=A\sin\alpha \\ -v_0=A\omega\cos\alpha\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}A=\dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha=\pi\end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\pi)=-v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) 初期条件 $x(0)=a$，$\dot{x}(0)=0$ より，

$$\begin{cases}a=A\sin\alpha \\ 0=A\omega\cos\alpha\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}A=a \\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3) 初期条件 $x(0)=-\dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}(0)=0$ より，

$$\begin{cases}-\dfrac{mg}{k}=A\sin\alpha \\ 0=A\omega\cos\alpha\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}A=\dfrac{mg}{k} \\ \alpha=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x=\frac{mg}{k}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

【3】

《解答》

(1) ばね定数を k とすると，A の運動方程式は,

$$m\cdot 0=-ka+mg \qquad \therefore\quad k=\frac{mg}{a}$$

(2) 求める力の大きさを N_0 とすると，B が床から受ける力の大きさも N_0 である．(1) の状態における B の運動方程式は,

$$m\cdot 0=+ka-N_0+mg \qquad \therefore\quad N_0=2mg$$

(3) B が床から離れないと仮定すると，A，B の運動方程式は,

$$\begin{cases}\mathrm{A}：m\ddot{y}=-k(y+a)+mg=-ky\\ \mathrm{B}：m\cdot 0=+k(y+a)-N+mg\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}\ddot{y}=-\dfrac{k}{m}y\\ N=k(y+a)+mg\end{cases}$$

(a) A の運動は，中心が $y=0$ で，角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動と分かる．初期条件 $y(0)=a$，$\dot{y}(0)=0$ を満たす解は,

$$y(t)=a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

(b) $y(t_0)=0$ となるとき,

$$\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t_0=0 \qquad \therefore\quad \sqrt{\frac{g}{a}}t_0=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

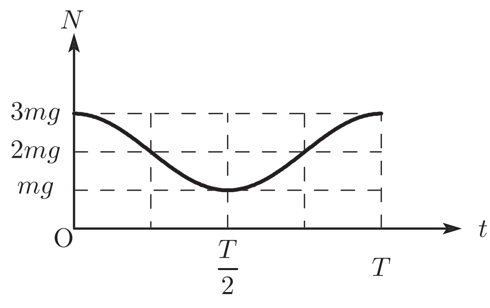
このときの速さは,

$$\left|\dot{y}(t_0)\right|=\left|-\sqrt{\frac{g}{a}}a\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t_0\right|=\sqrt{ga}$$

(c) (a) をふまえると,

$$\begin{aligned}N&=k(a\cos\omega t+a)+mg\\ &=mg\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t+2mg\end{aligned}$$

これをグラフに描くと右図のようになる．



(4) b だけ縮めて静かに離した場合の解は，$y(t) = b\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$ なので，

$$\begin{aligned} N &= k(y+a) + mg = mg\left(2 + \frac{b}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t\right) \\ &= \frac{bmg}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + 2mg \end{aligned}$$

B が床から離れないための条件 $N_{\min} \geqq 0$ より，

$$\frac{bmg}{a}\cdot(-1) + 2mg \geqq 0 \qquad \therefore \quad b \leqq 2a$$

【4】

《解答》

(1) 連結ばねが自然長のときのおもりの位置を原点とする，鉛直下向き正の x 軸をとる．ばね 1，2 の伸びを r_1，r_2 とおく．おもりの運動方程式の x 成分は,

$$m\ddot{x} = -k_2 r_2 + mg$$

ばねの結合部分の微小領域 (質量 $\varDelta m$，位置 x') を内界とする運動方程式は,

$$\varDelta m \cdot \ddot{x}' = -k_1 r_1 + k_2 r_2 + \varDelta m \cdot g$$

$\varDelta m \fallingdotseq 0$ として,

$$0 \fallingdotseq -k_1 r_1 + k_2 r_2$$

束縛条件より

$$x = r_1 + r_2 \qquad \therefore \quad r_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x$$

以上より,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_2 r_2 + mg \\ &= -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x + mg \\ &= -K\left(x - \frac{mg}{K}\right) \quad \left(K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) \end{aligned}$$

これよりおもりは $x_0 = \dfrac{mg}{K}$ を中心とする単振動を行う．たとえば，初期条件として，$t = 0$ で $x = \dfrac{mg}{K} + l$，$\dot{x} = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} x &= \frac{mg}{K} + l \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t \\ &= \frac{(k_1 + k_2)mg}{k_1 k_2} + l \cos \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} t \end{aligned}$$

振動の周期 T は,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2}}$$

(2) ア エレベータの位置の代表点 X を，連結ばねが自然長のときのおもりの位置と一致させる．このとき，(1) の x 座標は非慣性系である．慣性系での運動方程式の鉛直下向き成分は,

$$m(\ddot{X} + \ddot{x}) = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x + mg$$

ここでエレベータは自由落下ゆえ $\ddot{X} = +g$．代入，整理して,

$$\ddot{x} = -\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m} x$$

よって振動の周期は (1) と等しく，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1 k_2}}$$

(3)　イ　エレベータが地面に接触したとき (改めて $t=0$ とおく) のエレベータならびにおもりの速度の x 成分 v' は，図 2 の瞬間からの時間経過を t_0 として，

$$\frac{1}{2}(v_0+v')t_0 = H, \qquad v'-v_0 = +gt_0$$

t_0 を消去して，

$$v' = \sqrt{{v_0}^2+2gH}$$

おもりの位置は，$K = \dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$，$\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ として，一般解，

$$x = \frac{mg}{K} + A\sin(\omega t+\alpha), \qquad \dot{x} = A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

さらに，初期条件 $x(0)=0$，　$\dot{x}(0)=v'$ より，

$$x = \frac{mg}{K} + \sqrt{\left(\frac{mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{v'}{\omega}\right)^2}\sin(\omega t+\alpha) \quad \left(\tan\alpha = -\frac{mg\omega}{Kv'}\right)$$

よって衝突しないための条件は，

$$x_{\max} = \frac{mg}{K} + \sqrt{\left(\frac{mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{v'}{\omega}\right)^2} < L$$

$$\therefore \quad m < \frac{KL^2}{{v_0}^2+2(L+H)g} = \frac{k_1k_2L^2}{\{{v_0}^2+2(L+H)g\}(k_1+k_2)}$$

ウ　イの結論に数値を代入して，

$$\frac{KL^2}{{v_0}^2+2(L+H)g} = \frac{100\cdot 1^2}{2^2+2\cdot(1+3)\cdot 10}[\mathrm{kg}] = \frac{100}{84}[\mathrm{kg}] > 1[\mathrm{kg}] = m$$

よって条件を満たしているので，おもりは床に衝突しない (→ 0)

添削課題

《解答》

ばねが自然長のときのAの位置を原点として，水平右向きに x 軸を設定する．

(1) 運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

よって，角振動数は，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2) 運動方程式は，

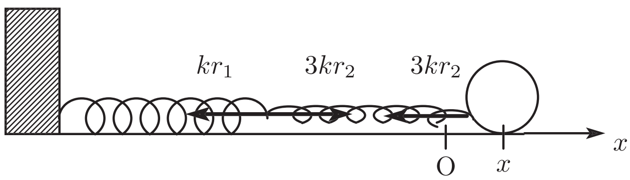
$$m\ddot{x} = -kx - 3kx \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{4k}{m}x$$

よって，角振動数は，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \qquad \therefore \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) P，Qの伸びをそれぞれ r_1，r_2 とおくと，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -3kr_2$$



P，Q接合部を微小物体とみなし，その質量を無視すると，この微小物体の運動方程式は，

$$0 = +3kr_2 - kr_1 \qquad \therefore \quad r_1 = 3r_2$$

また，合計の伸びが $r_1 + r_2 = x$ なので，

$$3r_2 + r_2 = x \qquad \therefore \quad r_2 = \frac{1}{4}x$$

これを運動方程式に代入すると，

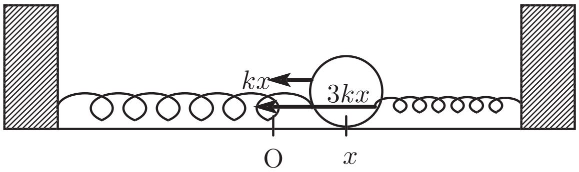
$$m\ddot{x} = -3k \cdot \frac{x}{4} \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{3k}{4m}x$$

よって，角振動数は，

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{4m}} \qquad \therefore \quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

(4) 運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -kx - 3kx \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{4k}{m}x$$

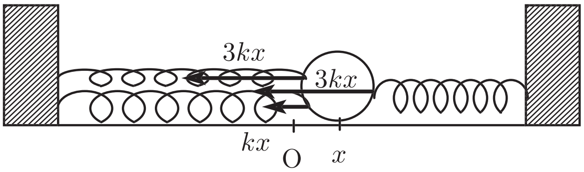


よって，角振動数は,

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \qquad \therefore \quad T_4 = \frac{2\pi}{\omega_4} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(5) 運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -3kx - kx - 3kx \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{7k}{m}x$$



よって，角振動数は,

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{7k}{m}} \qquad \therefore \quad T_5 = \frac{2\pi}{\omega_5} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{7k}}$$

配点

100 点 (各 20 点)

2章　復元力と単振動（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

① M が静止の場合

運動方程式は，摩擦力の x 成分を R，垂直抗力を N として，

$$\begin{cases} m\cdot 0 = -kx + R \\ m\cdot 0 = N - mg \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} R = kx \\ N = mg \end{cases}$$

R は静止摩擦力なので，

$$\left|\frac{R}{N}\right| \leqq \mu_0 \qquad \therefore \quad |x| \leqq \frac{\mu_0 mg}{k}$$

② M が床上を左向きにすべる場合

動摩擦力が右向きに作用するので，運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \mu N \\ m\cdot 0 = N - mg \end{cases} \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)$$

これより M の運動は中心が $x = \dfrac{\mu mg}{k}$ で，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動と分かる．

③ M が床上を右向きにすべる場合

動摩擦力が左向きに作用するので，運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - \mu N \\ m\cdot 0 = N - mg \end{cases} \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right)$$

これより M の運動は中心が $x = -\dfrac{\mu mg}{k}$ で，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動と分かる．

(1) 題意より，静止を保つ限界が $|x| = d$ なので，

$$d = \frac{\mu_0 mg}{k} \qquad \therefore \quad \mu_0 = \frac{kd}{mg}$$

$x = x_0$ から x_1 に達する振動の中心が $x = \dfrac{\mu mg}{k}$ なので，

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{\mu mg}{k} \qquad \therefore \quad \mu = \frac{k(x_0 + x_1)}{2mg}$$

(2) 振動周期の半分の時間なので，

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) 振動の中心で速さは最大となるので，

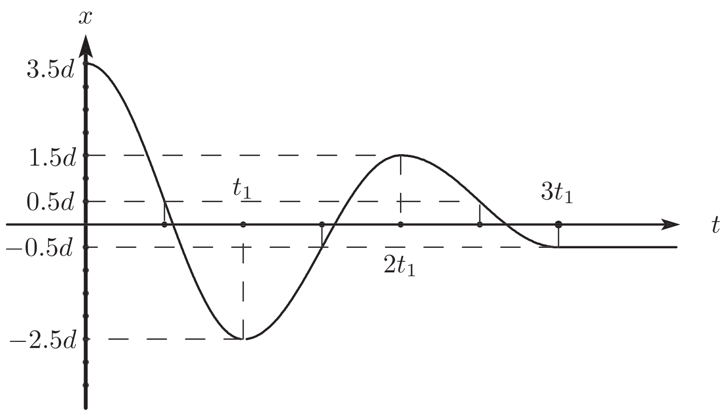
$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ t_{\mathrm{a}} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$$

(4) $x_0 = 3.5d$，$x_1 = -2.5d$ のとき，

$$a = \frac{3.5d + (-2.5d)}{2} = 0.5d \quad \cdots \text{左へすべるときの中心}$$

右へすべるときは中心が $x = -0.5d$ となるが，すべっている時間は $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi}{\omega} = t_1$ で，左へすべる時間と等しい．また，速さ 0 となった位置が $|x| > d$ であれば再びすべり出すが，$|x| \leqq d$ であればもはやすべり出すことはない．

以上より，最終的に静止を保つようになるまでのグラフは下図のようになる．



また，L は各過程の移動距離を合計したものなので，

$$L = 6d + 4d + 2d = 12d$$

【2】

《解答》

鉛直上向きを正とし，液面を原点とする x 軸をとる．「ウキの位置」は下面の高さとする．

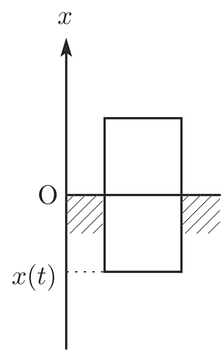
(1) 液体の密度を ρ とする．ウキの一部が液中にあり，かつウキが完全に液中に没していない $-L \leqq x \leqq 0$ の場合，液中にある長さは $|x| = -x$ なので，ウキの運動方程式は，

$$m\ddot{x} = \rho S \cdot (-x) \cdot g - mg \quad \cdots (*)$$

(a) 静止状態での運動方程式は，

$$m \cdot 0 = \rho Sbg - mg \qquad \therefore \quad \rho = \frac{m}{Sb}$$

(b) $(*)$ に (a) の ρ を代入すると，



$$m\ddot{x} = \frac{m}{Sb} \cdot S \cdot (-x) \cdot g - mg \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{g}{b}(x+b)$$

運動は中心が $x = -b$ で角振動数が $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{b}}$ の単振動と分かる．周期を T とすると，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

また，初期条件 $x(0) = -L$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす解は，

$$x(t) = -b - (L-b)\cos\omega t \qquad \therefore \quad \text{振幅 } A = L - b$$

(2) (c) ウキが完全に液中にある場合の運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\alpha &= -kv + \rho SLg - mg \\ &= -kv + \left(\frac{L}{b} - 1\right)mg \end{aligned}$$

(d) 速度が一定となったとき，$\alpha = 0$ なので，

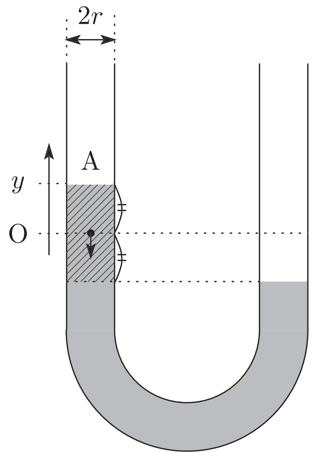
$$0 = -kv_f + \left(\frac{L}{b} - 1\right)mg \qquad \therefore \quad v_f = \left(\frac{L}{b} - 1\right)\frac{mg}{k}$$

《注意》

液体中を移動する物体の速度が一定でない場合は，液体の「流れ」に伴って液体がもつエネルギーが変化してしまう．このため，液体についても踏み込んだ考察が必要となり，本問の (b) と (c) での取り扱いでは物理学的に正しくないことが近年になって指摘された．今後は何らかの変更を加えた出題となることが予想されるが，ここでは原文のままで収録しておく．

【3】

《解答》



(1) 右図の斜線部分が受ける重力が復元力 F となるので,

$$\begin{aligned} F &= -(\rho \times \pi r^2 \times 2y) \times g \\ &= -2\pi r^2 \rho g y \end{aligned}$$

(2) 水棒の運動方程式は,

$$(\rho \times \pi r^2 \times L) \times \ddot{y} = -2\pi r^2 \rho g y \qquad \therefore \quad \ddot{y} = -\frac{2g}{L}y$$

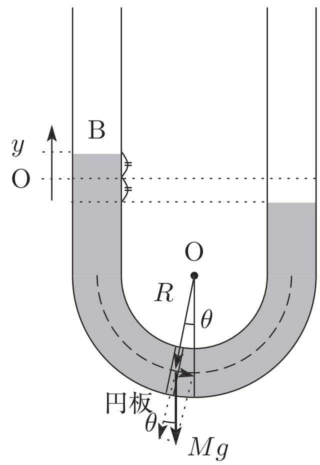
運動は中心が $y = 0$ の単振動と分かり,

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

(3) 振動を始めた時刻を $t = 0$ とすると,初期条件を満たす解は $y = y_{\max}\cos(\omega t)$ と表せるので,

$$\dot{y} = -\omega y_{\max}\sin(\omega t) \qquad \therefore \quad \dot{y}_{\max} = y_{\max}\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

(4) 円板が受ける重力の U 字管に沿った成分と (1) の F の合力が復元力 F' となるので,



$$\begin{aligned} F' &= F - Mg\sin\theta \\ &\fallingdotseq F - Mg \cdot \theta \\ &= -2\pi r^2 \rho g y - Mg \cdot \frac{y}{R} \\ &= -\left(2\pi r^2 \rho g + \frac{Mg}{R}\right) y \end{aligned}$$

(5) この系の運動方程式は,

$$(\rho \times \pi r^2 \times L + M) \times \ddot{y} = -\left(2\pi r^2 \rho g + \frac{Mg}{R}\right) y \qquad \therefore \quad \ddot{y} = -\frac{g}{R} \cdot \frac{2\pi r^2 \rho R + M}{\pi r^2 \rho L + M} y$$

運動は中心が $y = 0$ の単振動と分かり,

$$\text{角振動数 } \omega' = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \frac{2\pi r^2 \rho R + M}{\pi r^2 \rho L + M}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T' = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{\pi r^2 \rho L + M}{2\pi r^2 \rho R + M}}$$

【4】

《解答》

(1) (a) 運動方程式の斜面上向き成分より，

$$0 = kl - 2mg\sin\theta \qquad \therefore \quad k = \frac{2mg\sin\theta}{l}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{A}: &\quad ma = -k(x-l) - mg\sin\theta - N \\ \mathrm{B}: &\quad ma = N - mg\sin\theta \end{aligned}$$

(c) 上式より a を消去して，

$$N = -\frac{1}{2}k(x-l)$$

(2) (a) $T_{\mathrm{AB}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$，$T_{\mathrm{A}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ より，

$$\frac{T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b)

$$0 = -g\sin\theta\cdot t_{\mathrm{B}} + v_0 \qquad \therefore \quad t_{\mathrm{B}} = \frac{v_0}{g\sin\theta}$$

$$0^2 - {v_0}^2 = 2(-g\sin\theta)L \qquad \therefore \quad L = \frac{{v_0}^2}{2g\sin\theta}$$

(c) (1)(b) の運動方程式より，2 物体およびばねを内界にとったエネルギー保存を導いて，

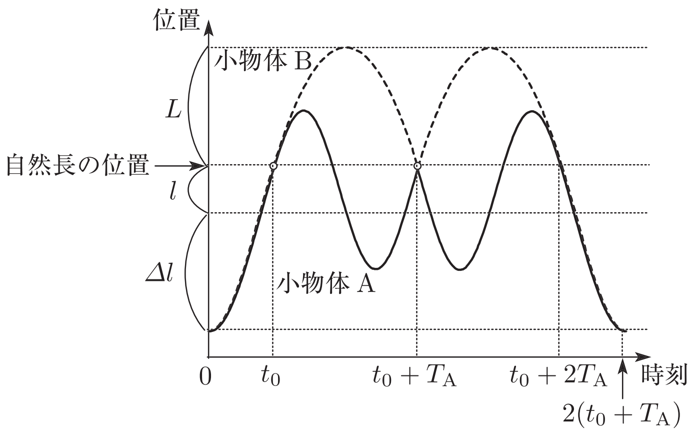
$$\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot {v_0}^2 + \frac{1}{2}kl^2 = 0 + \frac{1}{2}k(\varDelta l)^2 \qquad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}\{(\varDelta l)^2 - l^2\}}$$

(3) (a) グラフより，$T_{\mathrm{A}} = 2t_{\mathrm{B}}$ であればよい．計算の際，k．v_0 を消去して，

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2v_0}{g\sin\theta}$$

$$\therefore \quad \varDelta l = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}}\, l$$

(b) 小物体 B が小物体 A から離れた時刻を t_0 として，速度交換を考慮して右図．



添削課題

《解答》

(1) 張力を T_0 として，運動方程式の鉛直上向き成分は，

$$\begin{cases} M\cdot 0 = kd - Mg - T_0 \\ m\cdot 0 = T_0 - mg \end{cases}$$

これらより T_0 を消去して，

$$0 = kd - (M+m)g \qquad \therefore \quad d = \frac{(M+m)g}{k}$$

(2) つりあいから x_{A} 上方で，ばねの伸びは $d - x_{\mathrm{A}}$ なので，

$$\begin{cases} Ma_{\mathrm{A}} = k\left\{\dfrac{(M+m)g}{k} - x_{\mathrm{A}}\right\} - T - Mg & \cdots ① \\ ma_{\mathrm{B}} = T - mg \quad \cdots ② \end{cases}$$

(3) 糸がたるまないとき $x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}}$ なので，$\ddot{x}_{\mathrm{B}} = \ddot{x}_{\mathrm{A}}$ すなわち $a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}}$ となる．
このとき，① +② より，

$$(M+m)\ddot{x}_{\mathrm{A}} = -kx_{\mathrm{A}} \qquad \therefore \quad \ddot{x}_{\mathrm{A}} = -\frac{k}{M+m}x_{\mathrm{A}}$$

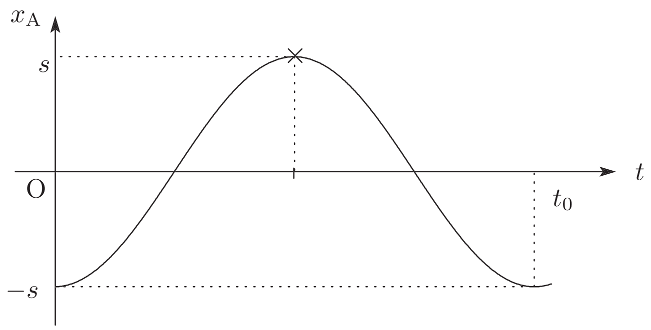
これより，A(及び B) の運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ の単振動で，

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

初期条件 $x_{\mathrm{A}}(0) = -s$，$\dot{x}_{\mathrm{A}}(0) = 0$ を考慮すると，

$$x_{\mathrm{A}}(t) = -s\cos(\omega t)$$

これを図示すると下図のようになる．



(4) 糸がたるまないで $a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}}$ のとき，① $\times m -$ ② $\times M$ より，

$$0 = m(mg - kx_{\mathrm{A}} - T) - M(T - mg) \qquad \therefore \quad T = m\left(g - \frac{kx_{\mathrm{A}}}{M+m}\right)$$

これより，x_{A} が最大のとき，T は最小とわかり，

$$t_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}t_0 = \pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

このとき，$x_{\mathrm{A}} = s$ なので，

$$T_{\mathrm{m}} = m\left(g - \frac{ks}{M+m}\right)$$

(5) $s = s_{\mathrm{m}}$ のとき $T_{\mathrm{m}} = 0$ となるので，

$$m\left(g - \frac{ks_{\mathrm{m}}}{M+m}\right) = 0 \qquad \therefore \quad s_{\mathrm{m}} = \frac{(M+m)g}{k}$$

(6) (5) の結果に数値を代入すると

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{m}} &= \frac{(5.0 \times 10^{-2}[\mathrm{kg}] + 5.0 \times 10^{-2}[\mathrm{kg}]) \times 9.8[\mathrm{m/s^2}]}{9.8[\mathrm{N/m}]} \\ &= 1.0 \times 10^{-1}[\mathrm{m}] \end{aligned}$$

s が s_{m} より大きいのでたるむ.

配点

100 点

(1)10 点，(2)20 点，(3)30 点，(4)15 点，(5)15 点，(6)10 点

３章　円軌道への束縛

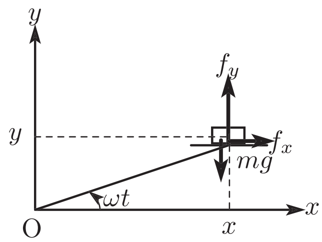
問題

■演習

【1】

《解答》

(1)　平板が A に及ぼす抗力の x，y 成分を f_x，f_y とする．



〔解 1〕A の運動方程式の接線成分と向心成分は，

$$\begin{cases} m\cdot 0 = -f_x\sin\omega t + f_y\cos\omega t - mg\cos\omega t & \cdots ① \\ mr\omega^2 = -f_x\cos\omega t - f_y\sin\omega t + mg\sin\omega t & \cdots ② \end{cases}$$

①$\times\sin\omega t+$②$\times\cos\omega t$ および ①$\times\cos\omega t-$②$\times\sin\omega t$ をつくり，それぞれを整理すると，

$$\begin{cases} f_x = -mr\omega^2\cos\omega t \\ f_y = m(g - r\omega^2\sin\omega t) \end{cases}$$

〔解 2〕A の運動方程式の x 成分と y 成分は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_x \\ m\ddot{y} = f_y - mg \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} f_x = m\ddot{x} & \cdots ③ \\ f_y = m(g+\ddot{y}) & \cdots ④ \end{cases}$$

時刻 t における A の位置は，

$$\begin{cases} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \end{cases} \quad\therefore\quad \begin{cases} \ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t & \cdots ⑤ \\ \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t & \cdots ⑥ \end{cases}$$

これらより，

$$\begin{cases} f_x = -mr\omega^2\cos\omega t \\ f_y = m(g - r\omega^2\sin\omega t) \end{cases}$$

(2)　A が平板と接触しているとき，$f_y \geqq 0$ なので，

$$g - r\omega^2\sin\omega t \geqq 0 \qquad\therefore\quad \sin\omega t \leqq \frac{g}{r\omega^2}$$

これが任意の t に対して成立するための条件は，

$$\frac{g}{r\omega^2} \geqq 1 \qquad\therefore\quad \omega \leqq \sqrt{\frac{g}{r}}$$

さらに，A が滑らないとき $\left|\dfrac{f_x}{f_y}\right| \leqq \mu$ なので，

$$|f_x| \leqq \mu f_y \qquad\therefore\quad -\mu f_y \leqq f_x \leqq \mu f_y$$

f_x，f_y を代入して整理すると，

$$\begin{cases} \mu\sin\omega t+\cos\omega t \leqq \dfrac{\mu g}{r\omega^2} \\ \mu\sin\omega t-\cos\omega t \leqq \dfrac{\mu g}{r\omega^2} \end{cases}$$

ここで $\mu=\tan\delta$ を用いると，

$$\begin{cases} \sqrt{\mu^2+1}\cos(\omega t-\delta) \leqq \dfrac{\mu g}{r\omega^2} \\ \sqrt{\mu^2+1}\cos(\omega t+\delta) \geqq -\dfrac{\mu g}{r\omega^2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \cos(\omega t-\delta) \leqq \dfrac{g}{r\omega^2}\sin\delta \\ \cos(\omega t+\delta) \geqq -\dfrac{g}{r\omega^2}\sin\delta \end{cases}$$

これらが任意の t に対して成立するための条件は，

$$\frac{g}{r\omega^2}\sin\delta \geqq 1 \qquad \therefore \quad \omega \leqq \sqrt{\frac{g}{r}\sin\delta}$$

この条件は $|\,f_y\,| \geqq 0$ であるための条件 $\omega \leqq \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ も満たしている．よって，A が平板から離れることなくかつ滑り出さないための条件は，

$$\omega \leqq \sqrt{\frac{g}{r}\sin\delta}\left(=\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}}\right)$$

《解説》

物体の円運動を扱う場合，加速度の接線成分と向心成分を導き，それを用いて運動方程式を立てることが多い．〔解 1〕がこの扱い方である．しかし，今回はそれではかえってまわりくどくなっている．

なお，〔解 1〕の運動方程式を〔解 2〕の運動方程式から導出するためには次のようにすればよい．まず ⑤，⑥ を ③，④ に代入して，

$$\begin{cases} m(-r\omega^2\cos\omega t)=f_x \quad \cdots ③' \\ m(-r\omega^2\sin\omega t)=f_y-mg \quad \cdots ④' \end{cases}$$

次に $③'\times(-\sin\omega t)+④'\times\cos\omega t$ および $③'\times(-\cos\omega t)+④'\times(-\sin\omega t)$ をつくり，それぞれを整理すると，

$$\begin{cases} 0=-f_x\sin\omega t+f_y\cos\omega t-mg\cos\omega t \\ mr\omega^2=-f_x\cos\omega t-f_y\sin\omega t+mg\sin\omega t \end{cases}$$

【2】

《解答》

(1) $r\dot{\theta} = v$ とおくと，小球の運動方程式は，

$$\begin{cases} \text{接線成分} : m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta \quad \cdots ① \\ \text{向心成分} : m\dfrac{v^2}{r} = T - mg\cos\theta \quad \cdots ② \end{cases}$$

(2) ①に $v = r\dot{\theta}$ をかけると，

$$mv\dot{v} = -mg\sin\theta \cdot r\dot{\theta}$$

ここで，合成関数の微分公式を利用すると，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m}{2}v^2\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\dfrac{m}{2}v^2\right) \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\dot{v} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgr\cos\theta\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(mgr\cos\theta\right) \cdot \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -mgr\sin\theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

以上より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}v^2 - mgr\cos\theta\right) = 0 \qquad \therefore \quad \frac{m}{2}v^2 - mgr\cos\theta = E_0(\text{定数})$$

さらに，初期条件 $\theta(0) = 0$，$v(0) = v_0$ を考慮すると，

$$\frac{m}{2}v^2 - mgr\cos\theta = \frac{m}{2}{v_0}^2 - mgr \quad \cdots ③$$

(3) ②，③より v^2 を消去して整理すると，

$$T = m\frac{{v_0}^2}{r} + mg(3\cos\theta - 2)$$

(4) $\dfrac{m}{2}v^2 = K$ とおくと，③より，

$$K = \frac{m}{2}{v_0}^2 + mgr(\cos\theta - 1)$$

小球が運動を続けるために必要な条件は，任意の θ で $K > 0$ すなわち $K_{\min} > 0$ なので，

$$\frac{m}{2}{v_0}^2 + mgr(\cos\pi - 1) > 0 \qquad \therefore v_0 > \sqrt{4gr}$$

また，糸の場合は任意の θ で $T \geqq 0$ すなわち $T_{\min} \geqq 0$ も必要なので，

$$m\frac{{v_0}^2}{r} + mg(3\cos\pi - 2) \geqq 0 \qquad \therefore \quad v_0 \geqq \sqrt{5gr}$$

これらより，糸の場合に円運動を続けるための条件は $v_0 \geqq \sqrt{5gr}$ となる．一方，棒の場合は $T < 0$ になり得るので， $K_{\min} > 0$ の条件だけでよい．

以上より，円運動を続けるための条件は，

$$\begin{cases} \text{糸の場合} \quad \cdots v_0 \geqq \sqrt{5gr} \\ \text{棒の場合} \quad \cdots v_0 > \sqrt{4gr} \end{cases}$$

(5)　微小振動では $|\theta| \ll 1$ なので，① で $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できる．$v = r\dot{\theta}$ も用いると，

$$m \cdot r\ddot{\theta} = -mg\theta \qquad \therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\theta$$

この微小振動は，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ の単振動と分かり，

$$(\text{周期}) = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

【3】

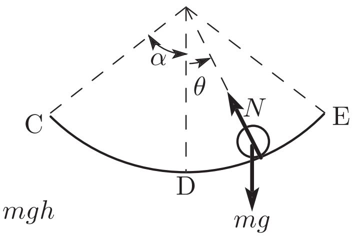
《解答》

(1) 球が軌道から受ける抗力を N とする.

(i) AC 上および EF 上：小球の運動方程式の斜面垂直成分は,

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\alpha \qquad \therefore \quad N = mg\cos\alpha$$

(ii) 円弧 CDE 上：右図の角 θ を用いて $r\dot{\theta} = v$ とおくと,
小球の運動方程式の向心成分は,



$$m\frac{v^2}{r} = N - mg\cos\theta$$

エネルギーの保存より,

$$\frac{m}{2}v^2 - mg \cdot r\cos\theta = mgh$$

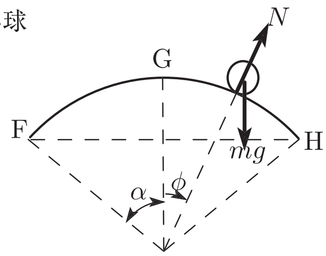
これらより v を消去して整理すると,

$$N = mg\left(3\cos\theta + \frac{2h}{r}\right)$$

$|\theta| \leqq \alpha$ より，$\theta = 0$ の点 D において N は最大となり,

$$N_{\mathrm{D}} = mg\left(3 + \frac{2h}{r}\right)$$

(iii) 円弧 FGH 上：右図の角 ϕ を用いて $r\dot{\phi} = v$ とおくと，小球の運動方程式の向心成分は,



$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\phi - N$$

エネルギーの保存より,

$$\frac{m}{2}v^2 + mg \cdot r(\cos\phi - \cos\alpha) = mgh$$

これらより v を消去して整理すると,

$$N = mg\left(3\cos\phi - 2\cos\alpha - \frac{2h}{r}\right)$$

$|\phi| \leqq \alpha$ より，$\phi = 0$ の点 G において N は最大となり,

$$N_{\mathrm{G}} = mg\left(3 - 2\cos\alpha - \frac{2h}{r}\right)$$

以上より，抗力が最大となる点は D と分かり，その最大値は,

$$N_{\max} = N_{\mathrm{D}} = mg\left(3 + \frac{2h}{r}\right)$$

(2) 軌道の各部分における N の最小値に注目する．

(i) AC 上および EF 上：

$$N = mg\cos\alpha$$

(ii) 円弧 CDE 上：

$\theta = -\alpha$ の点 C(および $\theta = \alpha$ の点 E) において N は最小となり，

$$N_{\mathrm{C}} = mg\left(3\cos\alpha + \frac{2h}{r}\right)$$

(iii) 円弧 FGH 上：

$\phi = -\alpha$ の点 F(および $\phi = \alpha$ の点 H) において N は最小となり，

$$N_{\mathrm{F}} = mg\left(\cos\alpha - \frac{2h}{r}\right)$$

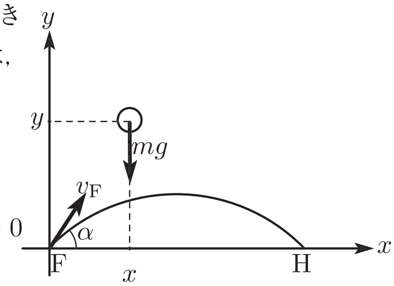
以上より，軌道に沿って運動すると仮定したとき，点 F(および点 H) において N は最小となり，

$$N_{\min} = N_{\mathrm{F}} = mg\left(\cos\alpha - \frac{2h}{r}\right)$$

$h = h_0$ のとき，点 F で軌道から浮き上がる限界に達して $N_{\min} = 0$ となるので，

$$\cos\alpha - \frac{2h_0}{r} = 0 \qquad \therefore \quad h_0 = \frac{r}{2}\cos\alpha$$

(3) 点 F を原点として，水平右向き正の x 軸と鉛直上向き正の y 軸を設定すると，飛び出した後の運動方程式は，



$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

点 F での速さを v_{F} とし，点 F を飛び出す時刻を $t = 0$ とすると初期条件は，

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{\mathrm{F}}\cos\alpha \\ \dot{y}(0) = v_{\mathrm{F}}\sin\alpha \end{cases}$$

よって，時刻 t での位置は，

$$\begin{cases} x(t) = v_{\mathrm{F}}\cos\alpha \cdot t \\ y(t) = v_{\mathrm{F}}\sin\alpha \cdot t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

点 H に落下する時刻を $t = t_{\mathrm{H}}$ とすると，$x(t_{\mathrm{H}}) = 2 \cdot r\sin\alpha$ かつ $y(t_{\mathrm{H}}) = 0$ なので，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{F}}\cos\alpha \cdot t_{\mathrm{H}} = 2r\sin\alpha \\ v_{\mathrm{F}}\sin\alpha \cdot t_{\mathrm{H}} - \dfrac{g}{2}{t_{\mathrm{H}}}^2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad t_{\mathrm{H}} = \frac{2v_{\mathrm{F}}\sin\alpha}{g}$$

これらより t_{H} を消去すると，

$$v_{\mathrm{F}}\cos\alpha\cdot\frac{2v_{\mathrm{F}}\sin\alpha}{g}=2r\sin\alpha \qquad \therefore\quad v_{\mathrm{F}}=\sqrt{\frac{gr}{\cos\alpha}}$$

これと別にエネルギーの保存より，

$$\frac{m}{2}{v_{\mathrm{F}}}^2=mgh \qquad \therefore\quad v_{\mathrm{F}}=\sqrt{2gh}$$

これらが一致していればよいので，

$$\sqrt{\frac{gr}{\cos\alpha}}=\sqrt{2gh} \qquad \therefore\quad h=\frac{r}{2\cos\alpha}$$

(4) 点 F で浮き上がらないための条件は，

$$h\leqq h_0 \qquad \therefore\quad h\leqq\frac{r}{2}\cos\alpha$$

また，エネルギー的に見て，点 G を通過するための条件は，

$$(\text{G の高さ})<(\text{A の高さ}) \qquad \therefore\quad h>r(1-\cos\alpha)$$

これらの条件をともに満たす h の範囲は，

$$r(1-\cos\alpha)<h\leqq\frac{r}{2}\cos\alpha$$

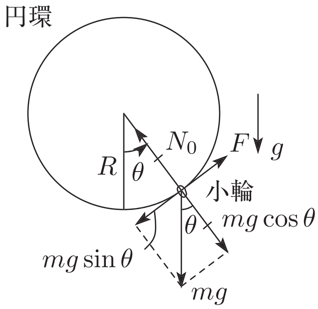
これを満たす h が存在するための条件は，

$$r(1-\cos\alpha)<\frac{r}{2}\cos\alpha \qquad \therefore\quad \cos\alpha>\frac{2}{3}$$

【4】

《解答》

(a) 静止摩擦力を F，円環からの垂直抗力を N_0 とすると，運動方程式の軌道接線，法線成分より，



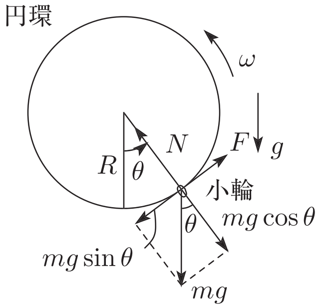
$$0 = F - mg\sin\theta \qquad \therefore \quad F = mg\sin\theta$$

$$0 = N_0 - mg\cos\theta \qquad \therefore \quad N_0 = mg\cos\theta$$

今回，題意より $\theta = \theta_0$ で F は最大摩擦力ゆえ，

$$\frac{F}{N_0} = \mu \qquad \therefore \quad \mu = \tan\theta_0$$

(b) 力の作用は右図．(a) と同様，



$$0 = F - mg\sin\theta$$
$$\therefore \quad F = mg\sin\theta$$
$$mR\omega^2 = N - mg\cos\theta$$
$$\therefore \quad N = mR\omega^2 + mg\cos\theta$$

F は静止摩擦力ゆえ，

$$\frac{F}{N} \leqq \mu \qquad \therefore \quad \frac{mg\sin\theta}{mR\omega^2 + mg\cos\theta} \leqq \mu$$

(c) (b) より，$\tan\alpha = \dfrac{\mu g}{g} = \mu (= \tan\theta_0)$ のもと，

$$g\sin\theta - \mu g\cos\theta = g\sqrt{1+\mu^2}\sin(\theta - \alpha) \leqq \mu R\omega^2$$

これがあらゆる θ で成り立つ条件は，

$$g\sqrt{1+\mu^2} \leqq \mu R\omega^2$$

(a) の結論より μ を消去して，

$$\omega \geqq \sqrt{\frac{g}{R\sin\theta_0}}$$

(d) (b) の結論で $\theta = \theta_1$ で等号ゆえ，

$$\frac{g\sin\theta_1}{R\omega^2 + g\cos\theta_1} = \mu$$

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ を代入，整理して，

$$\sqrt{1+\mu^2}\sin(\theta_1 - \alpha) = \mu \qquad \therefore \quad \sin(\theta_1 - \alpha) = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \sin\theta_0$$

ここで $\alpha = \theta_0$ ゆえ，

$$\theta_1 = \alpha + \theta_0 = 2\theta_0$$

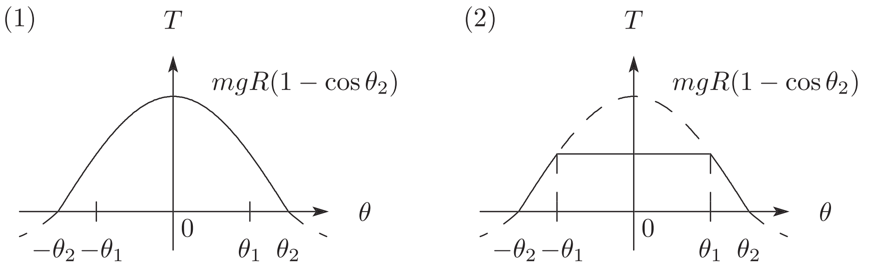
(e) 滑らずに速さ $v = R\omega$ で回転しているとき，

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

で一定．また，θ_1 で滑りはじめ，θ_2 まで上昇するとき，エネルギー保存より (基準は円環の中心)，

$$T - mgR\cos\theta = 0 - mgR\cos\theta_2 \qquad \therefore \quad T = mgR(\cos\theta - \cos\theta_2)$$

上昇後下降をはじめ，円環の回転との相対速度が 0 となったときから静止摩擦力が作用し小輪は $v = R\omega$ の等速円運動を始めるので，グラフは以下のようになる．



添削課題

《解答》

(1) エネルギーの保存より,

$$\frac{m}{2}{v_\mathrm{C}}^2 = mga\sin\alpha \qquad \therefore\quad v_\mathrm{C} = \sqrt{2ga\sin\alpha}$$

(2) 面から離れることなく C 点を通過した直後に小球が受ける垂直抗力を N_C とすると,点 C での運動方程式の向心成分は,

$$m\frac{{v_\mathrm{C}}^2}{a} = mg - N_\mathrm{C} \qquad \therefore\quad N_\mathrm{C} = m\left(g - \frac{{v_\mathrm{C}}^2}{a}\right)$$

C 点で面と接触したままとなるとき $N_\mathrm{C} > 0$ なので,C 点で面から離れてしまうための条件は形式上 $N_\mathrm{C} \leqq 0$ として得られ,

$$g - \frac{{v_\mathrm{C}}^2}{a} \leqq 0 \qquad \therefore\quad v_\mathrm{C} \geqq \sqrt{ga}$$

これと (1) より,

$$2ga\sin\alpha \geqq ga \qquad \therefore\quad \frac{\pi}{6} \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

C 点で離れてから着地するまでの時間を t とすると,鉛直方向の運動について,

$$\frac{1}{2}gt^2 = a \qquad \therefore\quad t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

以上より,

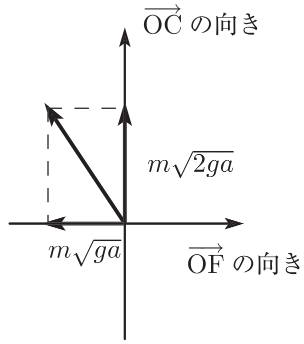
$$x_0 = \sqrt{ga}\cdot\sqrt{\frac{2a}{g}} = \sqrt{2}a$$

(3) 水平右向き,鉛直上向きをそれぞれ正とすると,F 点の直前における運動量は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= (m\sqrt{ga},\ -mgt)\\ &= (m\sqrt{ga},\ -m\sqrt{2ga})\end{aligned}$$

運動量変化と力積の関係より,小球が受けた力積は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{I} &= \overrightarrow{0} - \overrightarrow{p}\\ &= (-m\sqrt{ga},\ +m\sqrt{2ga})\end{aligned}$$



これを図示すると右上図のようになる.また,小球が A でもっていた力学的エネルギーは,衝突の際に床や小球の微小な変形に使われ,最終的には熱に変換された.

(4) 垂直抗力が 0 となる点 E での速さを v_{E} とすると，小球の運動方程式の向心成分は，

$$m\frac{{v_{\mathrm{E}}}^2}{a} = mg\cos\beta \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{E}} = \sqrt{ga\cos\beta}$$

また，エネルギーの保存より，

$$\frac{m}{2}{v_{\mathrm{E}}}^2 + mga\cos\beta = \frac{m}{2}{v_{\mathrm{C}}}^2 + mga$$

これらより v_{E} を消去して整理すると，

$${v_{\mathrm{C}}}^2 = ga(3\cos\beta - 2)$$

C を通過するとき ${v_{\mathrm{C}}}^2 > 0$ であり，さらにここでは $v_{\mathrm{C}} < \sqrt{ga}$ なので，

$$0 < ga(3\cos\beta - 2) < ga \qquad \therefore \quad \frac{2}{3} < \cos\beta < 1$$

配点

100 点

(1)10 点，(2)α の条件：20 点，x_0：20 点，(3) 図：20 点，エネルギー：10 点，
(4)v_{C}とβ の関係：10 点，β の範囲：10 点

P3J

東大物理

Z-KAI

会員番号	

氏　名	