本科 1 期 4 月度

解答

Z会東大進学教室

難関大物理／難関大物理 T

１章　単振動１

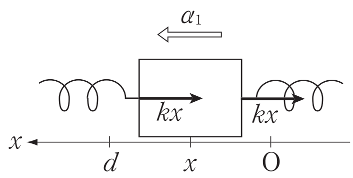
問題

■演習

【１】

《解答》

(1) $\boxed{\text{ア}}$　図の左向きを x 軸の正の向きとする．



M が位置 x を通過するときの加速度を α_1 とすると，x 軸方向の運動方程式は

$$m\alpha_1 = -kx + (-kx) \qquad \therefore \quad \alpha_1 = -\frac{2k}{m}x$$

単振動の角振動数を ω_1 とすると

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \qquad \therefore \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

(2) $\boxed{\text{イ}}$　M と B，C の系における力学的エネルギー保存より

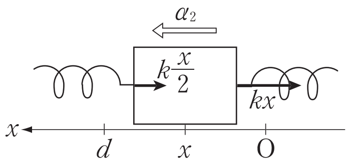
$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2$$

$$\therefore \quad v_1 = \underline{d\sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

■別解　O 点はこの単振動の振動の中心であり，O 点を通るときの速さ v_1 は速さの最大値であるから，振幅 d を用いて

$$v_1 = d\omega_1 = \underline{d\sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

(3) $\boxed{\text{ウ}}$　P を抜くと，M が位置 x の位置を通過するとき，A，B はそれぞれ $\dfrac{x}{2}$ ずつ縮んでいる．



よって，このときの M の加速度を α_2 とすると，x 軸方向の運動方程式は

$$m\alpha_2 = -k\frac{x}{2} + (-kx) \qquad \therefore \quad \alpha_2 = -\frac{3k}{2m}x$$

単振動の角振動数を ω_2 とすると

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \qquad \therefore \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}}$$

$\boxed{\text{エ}}$　$$\frac{T_2}{T_1} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}\Big/2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \quad T_2 = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}T_1}$$

(4) $\boxed{\text{オ}}$　P を抜く前後で，M と A，B，C の系における力学的エネルギーは変化しない．よって，C が a 縮んだとき，A，B はそれぞれ $\dfrac{a}{2}$ ずつ伸びているので，M と A，B，C の系における力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 + \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ka^2$$
$$\therefore \quad a = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}d}$$

■別解　O 点はこの単振動の振動の中心であり，O 点を通るときの速さの最大値 v_1 は $\boxed{\text{イ}}$ のときと変化しないから，振幅 d を用いて

$$v_1 = a\omega_2 \qquad \therefore \quad a = \frac{v_1}{\omega_2} = d\sqrt{\frac{2k}{m}}\Big/\sqrt{\frac{3k}{2m}} = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}d}$$

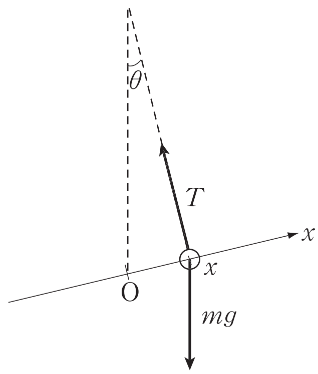
【2】

《解答》

(1) 小球 Q に働く力のうち，糸と垂直な方向の力 (復元力) は $-mg\sin\theta$ であるから，復元力の大きさは

$$F = \underline{mg\sin\theta}$$

(2) θ が十分小さいとき， $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$ と近似できることより



$$F = mg\sin\theta \fallingdotseq mg\tan\theta$$

また， 図より $\tan\theta = \dfrac{x}{l}$ であるから

$$F = mg\tan\theta \fallingdotseq \underline{\frac{mg}{l}x}$$

(3)

$$\underline{ma = -\frac{mg}{l}x}$$

(4) (3) の結果より $a = -\dfrac{g}{l}x$ であるから，単振動の角振動数を ω [rad/s] とすると

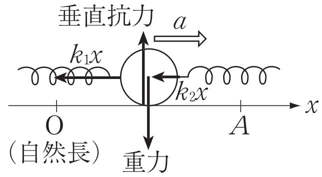
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

したがって， その周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

添削課題

《解答》



(1) x 軸方向の運動方程式は

$$\underline{ma = -k_1x - k_2x}$$

(2) (1) の結果より　$\underline{a = -\dfrac{k_1 + k_2}{m}x}$

(3) (1) の結果より，この運動は単振動であるから，角振動数を ω とすると
$a = -\dfrac{k_1 + k_2}{m}x$ と $a = -\omega^2 x$ を比較して

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$

(4) 周期を T とすると　$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}}$

(5) この運動は，振幅 A，角振動数 $\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$ の単振動であり，$t = 0$ のときに正の向きに最大変位となっているので，振動の形は cos 型である．よって

$$\underline{x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \cdot t\right)}$$

(6) (5) の結果より，時刻 t [s] における速度 v [m/s] は

$$v = \dot{x} = -A\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \cdot t\right)$$

よって，$\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}} \cdot t = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数)，つまり速さが最大となるのは $\underline{x = 0}$ のときで，その最大値を v_{MAX} とすると，

$$\underline{v_{\mathrm{MAX}} = A\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$

配点

(1)〜(4) 各 15 点
(5) 20 点
(6) 各 10 点

2章　単振動2

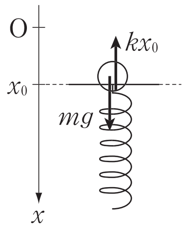
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) Bが自然長のときのAの位置を原点Oとしているので，つり合いの位置 (x 座標) を x_0 とすると，Bは x_0 縮んでいるから



$$mg + (-kx_0) = 0 \qquad \therefore \quad x_0 = \underline{\frac{mg}{k}}$$

(2) Aがつり合いの位置を通過するときの速さを v とすると，AとBの系における，重力と弾性力の合力による力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k{x_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 \qquad \therefore \quad v = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{g\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

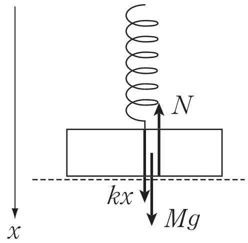
(3) 加速度を a とすると，位置 x におけるAの運動方程式は，角振動数を ω として

$$\begin{aligned} ma &= -kx + mg \\ &= -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \\ a &= -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right) \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

つまり　周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ であることがわかり，求める時間は半周期であるから

$$\frac{T}{2} = \underline{\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

(4) A が任意の位置 x にある (B が x 縮んでいる) ときに床から受ける垂直抗力の大きさを N として，C に働く力のつり合いより



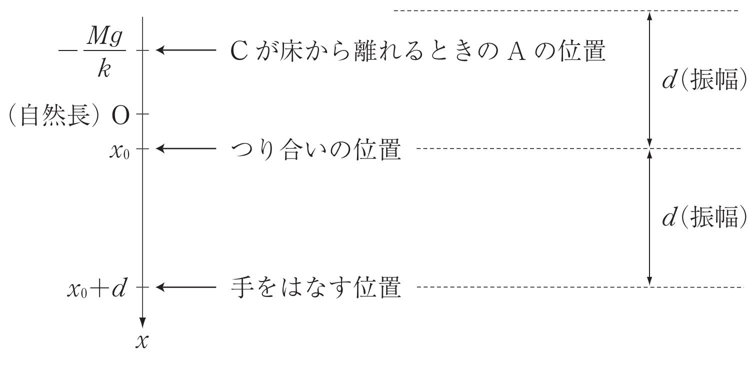
$$Mg + kx + (-N) = 0 \qquad \therefore \quad N = Mg + kx$$

$N = 0$ となるときに C が床から離れることから

$$N = Mg + kx = 0$$
$$\therefore \quad x = -\frac{Mg}{k}$$

つまり，ばねが $\dfrac{Mg}{k}$ 伸びたときに C が床から離れるので，振動の最高点が $x = -\dfrac{Mg}{k}$ の位置より高くなればよい．つまり，d は $x_0 + \dfrac{Mg}{k}$ よりも大きければよいので，求める d の最小値は

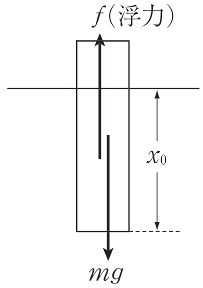
$$d = \underline{\frac{(M+m)g}{k}}$$



【2】

《解答》

(1) アルキメデスの原理より，浮力の大きさ f は浮きの水中部分の体積と同体積の水に働く重力の大きさに等しいから



$$f = \rho S x_0 g$$

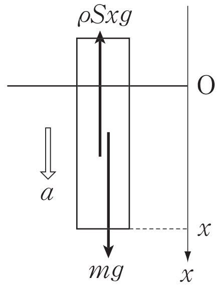
よって，鉛直下向きを正とすると，浮きに働く力のつり合いの式は

$$\underline{0 = mg + (-\rho S x_0 g)}$$

(2) (1) の結果より　$x_0 = \dfrac{m}{\rho S}$　であり，また，$0 < x_0 < l$ であるから $0 < \dfrac{m}{\rho S} < l$ である．浮きの質量 m が m_1 となるとき　$\dfrac{m_1}{\rho S} = l$　であるから

$$\therefore \quad m_1 = \underline{\rho S l}$$

(3) 鉛直下向きを正とし，水面の位置を原点，浮きの底の位置を x，加速度を a とすると，浮きの運動方程式より



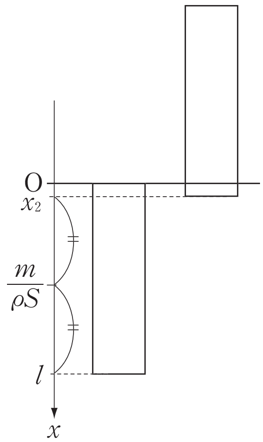
$$\begin{aligned} ma &= mg + (-\rho Sxg) \\ &= -\rho Sg\left(x - \frac{m}{\rho S}\right) \qquad \therefore \quad a = -\frac{\rho Sg}{m}\left(x - \frac{m}{\rho S}\right) \end{aligned}$$

この運動は単振動であるから，角振動数を ω とすると

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho Sg}{m}}$$

よって，求める周期を T とすると　$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho Sg}}}$

(4) 浮きの振動の最高点の座標を x_2 とすると，最高点と最下点の中点が振動の中心であるから



$$\frac{l + x_2}{2} = \frac{m}{\rho S} \qquad \therefore \quad x_2 = \frac{2m}{\rho S} - l$$

水中から飛び出さないとき，振動の最上点が水面下，つまり $x_2 \geqq 0$ となるから $m = m_2$ のとき

$$\frac{2m_2}{\rho S} - l = 0 \qquad \therefore \quad m_2 = \underline{\frac{\rho Sl}{2}}$$

添削課題

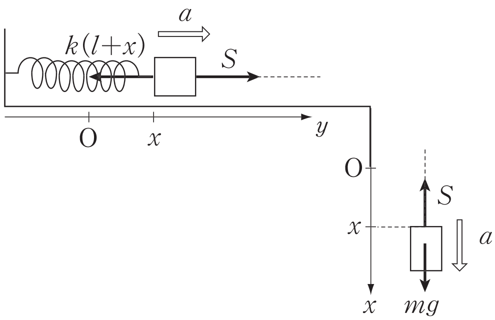
《解答》

(1) 糸の張力の大きさを S_0，ばね定数を k とすると，A(水平方向)，B(鉛直方向) のつり合いの式は

$$\mathrm{A}：0 = S_0 + (-kl) \quad \cdots\cdots ① \qquad \mathrm{B}：0 = mg + (-S_0) \quad \cdots\cdots ②$$

①+②より　$\underline{k = \dfrac{mg}{l}}$

(2) 図のように y 軸をとり，A のつり合いの位置を原点とする．



糸の張力の大きさを S，y 軸の正の向きに加速度 a を設定すると，A，B の y 軸，x 軸方向の運動方程式は

$$\mathrm{A}：2ma = S + \{-k(l+x)\} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \mathrm{B}：ma = mg + (-S) \quad \cdots\cdots ④$$

③+④より　$3ma = mg - k(l+x) = mg - \dfrac{mg}{l}(l+x) = -\dfrac{mg}{l}x \qquad \therefore \quad \underline{a = -\dfrac{g}{3l}x}$

(3) (2) の結果より，この運動は単振動であるから，角振動数を ω，周期を T とすると

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{3l}} \qquad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{3l}{g}}}$$

(4) ④より　$S = mg - ma$

B の最高点の座標は $x = -l$ であるから，(2) の結果より　$a = -\dfrac{g}{3l} \times (-l) = \dfrac{g}{3}$

よって，　$S = mg - m \times \dfrac{g}{3} = \underline{\dfrac{2}{3}mg}$

配点

(1) 20 点

(2) 40 点

(3) 20 点

(4) 20 点

3章　非慣性系と慣性系

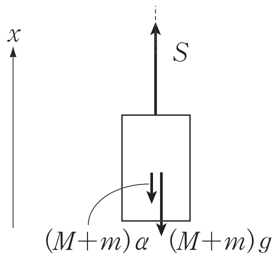
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) エレベーター上で観測すると，慣性力が観測されて，エレベーターと物体に働く力はつり合うから，綱の張力の大きさを S とすると力のつり合いより



$$(M+m)\cdot 0 = S + \{-(M+m)g\} + \{-(M+m)\alpha\}$$

$$\therefore\quad S = \underline{(M+m)(g+\alpha)}$$

■別解　地上から観測すると，物体とエレベーターの系の運動方程式

$$(M+m)\alpha = -(M+m)g + S$$

$$\therefore\quad S = \underline{(M+m)(g+\alpha)}$$

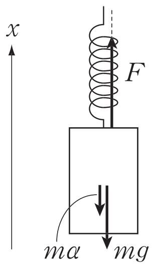
(2) エレベーター内で観測した場合，おもりは単振動するから，振り子のおもりの質量を m_0 とすると，(1) より，エレベーター内では重力と慣性力の合力が見かけの重力となって単振動するので，この見かけの重力の大きさを m_0g' とすると

$$m_0g' = m_0(g+\alpha) \qquad \therefore\quad g' = g+\alpha \qquad \therefore\quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\alpha}}$$

よって

$$T/T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Bigg/2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\alpha}} = \underline{\sqrt{\frac{g+\alpha}{g}}}$$

(3) 物体の質量は 500g = 0.500kg これを m[kg] とし，ばね秤のばねの弾性力は 625gw = 0.625kgw = 0.625×9.80N これを F[N] とすると，力のつり合いより



$$F + (-mg) + (-m\alpha) = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{F}{m} - g$$

よって

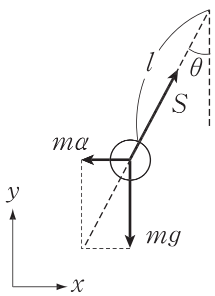
$$\alpha = \frac{0.625 \times 9.80}{0.500} - 9.80 = \underline{2.45\mathrm{m/s^2}}$$

＜研究＞　1kgw とは質量 1kg の物体に働く重力の大きさのことです。つまり

$$1\mathrm{kgw} = 1\mathrm{kg} \times 9.8\mathrm{m/s^2} = 9.8\mathrm{N}$$

ということになります。もちろん，重力以外の力の単位としても用います。

(4) 糸の張力の大きさを S とすると，電車の中で観測したときの，おもりに働く力のつり合いより

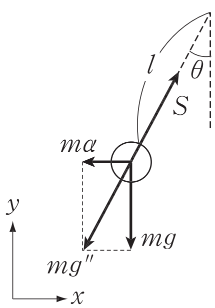


$$m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S\sin\theta \\ S\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} S\sin\theta = m\alpha \\ S\cos\theta = mg \end{cases}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \underline{\frac{\alpha}{g}}$$

(5) (4) において，電車内では重力と慣性力の合力が見かけの重力となるから，この見かけの重力の大きさを mg'' とすると，図より



$$mg'' = \sqrt{(mg)^2 + (m\alpha)^2} = m\sqrt{g^2 + \alpha^2}$$

$$\therefore \quad g'' = \sqrt{g^2 + \alpha^2}$$

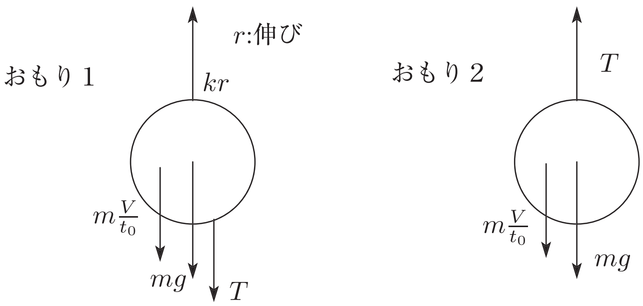
よって，この単振り子の周期を T'' とすると

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g''}} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \alpha^2}}}}$$

【2】

《解答》

(1) 時刻 t_0 までの間におもり 1，2 に作用する力は，ばねの伸びを r，糸の張力の大きさを T として，慣性力も含めて下図のように表される．



時刻 0 以前のおもり 1 の静止位置を原点とする，エレベーターに固定した鉛直上向き正の座標軸を設定する．このときのおもり 1，2 の運動方程式はそれぞれ，

$$\text{おもり 1：}\quad m\cdot 0 = +kr - T - mg - m\frac{V}{t_0}$$

$$\text{おもり 2：}\quad m\cdot 0 = +T - mg - m\frac{V}{t_0}$$

これより，静止状態でのばねの伸び r は，

$$r = \underline{\frac{2m}{k}\left(g + \frac{V}{t_0}\right)}$$

以下，おもり 1，2 の座標をそれぞれ x_1，x_2 とする．時刻 t_0 では $x_1 = -\dfrac{2m}{k}\cdot\dfrac{V}{t_0}$ である．

(2) 時刻 t_0 以後のおもり 1，2 の運動方程式は，ばねの伸びを r'，糸の張力の大きさを T' として

$$\text{おもり 1：}\quad m\ddot{x}_1 = +kr' - T' - mg \quad \cdots①$$
$$\text{おもり 2：}\quad m\ddot{x}_2 = +T' - mg \quad \cdots②$$

また，伸び r' は，

$$r' = \frac{2mg}{k} - x_1 \quad \cdots③$$

さらに，糸が張っているならば，2 つのおもりの加速度は等しいので，

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \quad \cdots④$$

①～④から T' を消去すると，

$$2m\ddot{x}_1 = -kx_1 \qquad \therefore \quad \ddot{x}_1 = -\frac{k}{2m}x_1$$

よって，2 つのおもりの運動は，

<u>振動中心 $x_1 = 0$，$x_2 = -\{$ 糸の長さ $\}$，角振動数 $\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ の単振動である．</u>

なお，初期条件 $t = t_0$ で $x_1 = -\dfrac{2m}{k}\cdot\dfrac{V}{t_0}$，$\dot{x}_1 = 0$ であるから，x_1 は次のように表される。

$$x_1 = -\frac{2m}{k}\cdot\frac{V}{t_0}\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}(t - t_0)$$

(3) ①～④より，糸が張っているときの張力の大きさ T' は，

$$T' = -\frac{1}{2}kx_1 + mg$$

(2) で求めた x_1 を代入すると，

$$T' = m\left\{\frac{V}{t_0}\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}(t - t_0) + g\right\} \geqq m\left(-\frac{V}{t_0} + g\right)\ (= T'_{\min})$$

糸がゆるまないとき，$T'_{\min} \geqq 0$．逆に糸がゆるむときの条件は，形式的に $T'_{\min} < 0$ として，

$$\underline{\frac{V}{t_0} > g}$$

添削課題

《解答》

(1) (ア) $\underline{M\alpha[\mathrm{N}]}$, $\underline{\text{電車の進行の向きと逆向き}}$

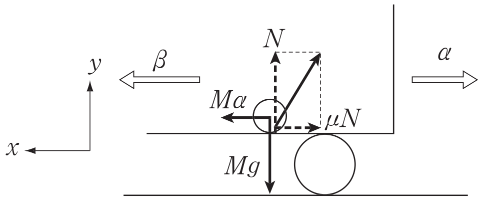
(イ) 物体が床から受ける垂直抗力の大きさを $N[\mathrm{N}]$ とすると, 物体に働く鉛直方向の力のつり合いより

$$-Mg + N = 0 \qquad \therefore \quad N = Mg$$

したがって, 物体に働く動摩擦力の大きさは

$$\mu N = \underline{\mu Mg}$$

(2) 車内から観測したときに物体が加速する方向は, 電車の運動方向と逆向きであるから, 物体の運動方程式は



$$M\beta = M\alpha + (-\mu Mg)$$

$$\therefore \quad \beta = \underline{\alpha - \mu g}$$

(3) $$l = \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{1}{2}(\alpha - \mu g)t^2 \qquad \therefore \quad \alpha = \underline{\mu g + \frac{2l}{t^2}}$$

配点

(1)(ア) 各 10 点　　(イ) 20 点

(2) 30 点

(3) 30 点

Z-KAI

会員番号	

氏　名	