本科１期４月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

1章　数と式（1）ー式の展開ー

問題

【1】(1) $-3x^2y^3 = -3y^3 \times x^2$ より，
係数は $\boldsymbol{-3y^3}$，次数は **2 次**

(2) $5ab^2x = 5b^2x \times a$ より，
係数は $\boldsymbol{5b^2x}$，次数は **1 次**

(3) $xy^3z^2 = xz^2 \times y^3$ より，
係数は $\boldsymbol{xz^2}$，次数は **3 次**

(4) $-\dfrac{2x^3yz^4}{3} = -\dfrac{2x^3y}{3} \times z^4$ より，
係数は $\boldsymbol{-\dfrac{2x^3y}{3}}$，次数は **4 次**

【2】(1)
$$x^2 - 2xy + 5y = (-2x+5)y + x^2$$
より，次数は **1 次**，定数項は $\boldsymbol{x^2}$

(2)
$$\begin{aligned} 1 - 2x + xy^3 - 2x^2y + 5x &= 1 + 3x + xy^3 - 2x^2y \\ &= -2yx^2 + (3+y^3)x + 1 \end{aligned}$$
より，次数は **2 次**，定数項は **1**

(3)
$$4x^5 - 2x^3 + 3xy^2 - y + 2 = 3xy^2 - y + 4x^5 - 2x^3 + 2$$
より，次数は **2 次**，定数項は $\boldsymbol{4x^5 - 2x^3 + 2}$

(4)
$$\begin{aligned} &a^2x - by^2 + a^2 - 3axy - b^2x^3 + by^2 - y + 2 \\ =&a^2x + a^2 - 3axy - b^2x^3 - y + 2 \\ =&-b^2x^3 + (a^2 - 3ay)x + a^2 - y + 2 \end{aligned}$$
より，次数は **3 次**，定数項は $\boldsymbol{a^2 - y + 2}$

【3】(1)
$$2x - 5x^3 + 3 - x^2 = \boldsymbol{-5x^3 - x^2 + 2x + 3}$$

(2)
$$3x^2y - y + 2x^2 + 7xy = \boldsymbol{(3y+2)x^2 + 7yx - y}$$

(3)
$$3 - x^2 + 2x - 5 + x^2 - x = \boldsymbol{x - 2}$$

(4)
$$\begin{aligned} &5ax + ab - 3bx + 2x^3 + ax - x^2 + 5bx - 1 \\ =&6ax + ab + 2bx + 2x^3 - x^2 - 1 \\ =&\boldsymbol{2x^3 - x^2 + (6a+2b)x + ab - 1} \end{aligned}$$

【4】(1) $3a^2b(a-b+1)=\mathbf{3a^3b-3a^2b^2+3a^2b}$

(2) $3xy^2(3x-y+2)=\mathbf{9x^2y^2-3xy^3+6xy^2}$

(3) $3ab^2(a^2-2ab+3b^2)=\mathbf{3a^3b^2-6a^2b^3+9ab^4}$

(4) $-2ab^2c(3a-2b+c)=\mathbf{-6a^2b^2c+4ab^3c-2ab^2c^2}$

(5)
$$
\begin{aligned}
(x+2)(x^2-6x+5) &= x(x^2-6x+5)+2(x^2-6x+5)\\
&= x^3-6x^2+5x+2x^2-12x+10\\
&= \mathbf{x^3-4x^2-7x+10}
\end{aligned}
$$

(6)
$$
\begin{aligned}
(x-1)(3x^2+2x-7) &= x(3x^2+2x-7)-(3x^2+2x-7)\\
&= 3x^3+2x^2-7x-3x^2-2x+7\\
&= \mathbf{3x^3-x^2-9x+7}
\end{aligned}
$$

(7)
$$
\begin{aligned}
(5x-y)(4x^2-xy+6y^2) &= 5x(4x^2-xy+6y^2)-y(4x^2-xy+6y^2)\\
&= 20x^3-5x^2y+30xy^2-4x^2y+xy^2-6y^3\\
&= \mathbf{20x^3-9x^2y+31xy^2-6y^3}
\end{aligned}
$$

(8)
$$
\begin{aligned}
(a-2b)(6a^2-ab+9b^2) &= a(6a^2-ab+9b^2)-2b(6a^2-ab+9b^2)\\
&= 6a^3-a^2b+9ab^2-12a^2b+2ab^2-18b^3\\
&= \mathbf{6a^3-13a^2b+11ab^2-18b^3}
\end{aligned}
$$

(9)
$$
\begin{aligned}
&(x+y-3)(3x-2y+1)\\
=&x(3x-2y+1)+y(3x-2y+1)-3(3x-2y+1)\\
=&3x^2-2xy+x+3xy-2y^2+y-9x+6y-3\\
=&\mathbf{3x^2+xy-8x-2y^2+7y-3}
\end{aligned}
$$

(10)
$$
\begin{aligned}
&(x^2-2x+3)(2x^3-3x^2+1)\\
=&x^2(2x^3-3x^2+1)-2x(2x^3-3x^2+1)+3(2x^3-3x^2+1)\\
=&2x^5-3x^4+x^2-4x^4+6x^3-2x+6x^3-9x^2+3\\
=&\mathbf{2x^5-7x^4+12x^3-8x^2-2x+3}
\end{aligned}
$$

(11)
$$
\begin{aligned}
&(a^2-ab+2b^2)(a^2+ab-3b^2)\\
=&a^2(a^2+ab-3b^2)-ab(a^2+ab-3b^2)+2b^2(a^2+ab-3b^2)\\
=&a^4+a^3b-3a^2b^2-a^3b-a^2b^2+3ab^3+2a^2b^2+2ab^3-6b^4\\
=&\mathbf{a^4-2a^2b^2+5ab^3-6b^4}
\end{aligned}
$$

(12)
$$
\begin{aligned}
&(x^2+1-x)(2x^2-x-3)\\
=&(x^2-x+1)(2x^2-x-3)\\
=&x^2(2x^2-x-3)-x(2x^2-x-3)+(2x^2-x-3)\\
=&2x^4-x^3-3x^2-2x^3+x^2+3x+2x^2-x-3\\
=&\mathbf{2x^4-3x^3+2x-3}
\end{aligned}
$$

【5】(1) x^3 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned}1\times 2-7\times(-3)&=2+21\\&=\mathbf{23}\end{aligned}$$

(2) x^4 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned}2\times 4+6\times 3&=8+18\\&=\mathbf{26}\end{aligned}$$

(3) x^5 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned}7\times 2+12\times 3-3\times 1&=14+36-3\\&=\mathbf{47}\end{aligned}$$

(4) x^4 の項は係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned}5\times 3-6\times(-6)+3\times 5&=15+36+15\\&=\mathbf{66}\end{aligned}$$

(5) x^3 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned}&1\times(-1)\times(-1)+1\times(-2)\times 2+1\times 1\times(-1)+1\times(-1)\times 2\\&\qquad+1\times(-2)\times 1+1\times 1\times 2+1\times(-1)\times 1\\&=1-4-1-2-2+2-1\\&=\mathbf{-7}\end{aligned}$$

【6】(1)

$$\begin{aligned}(3x+2)^3&=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2+3\cdot 3x\cdot 2^2+2^3\\&=3^3x^3+3\cdot 3^2x^2\cdot 2+3\cdot 3x\cdot 4+8\\&=27x^3+3\cdot 9x^2\cdot 2+36x+8\\&=\boldsymbol{27x^3+54x^2+36x+8}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(2a-4)^3&=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 4+3\cdot 2a\cdot 4^2-4^3\\&=2^3a^3-3\cdot 2^2a^2\cdot 4+3\cdot 2a\cdot 16-64\\&=8a^3-3\cdot 4a^2\cdot 4+96a-64\\&=\boldsymbol{8a^3-48a^2+96a-64}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(x+5y)^3&=x^3+3\cdot x^2\cdot 5y+3\cdot x\cdot(5y)^2+(5y)^3\\&=x^3+15x^2y+3\cdot x\cdot 5^2y^2+5^3y^3\\&=x^3+15x^2y+3\cdot x\cdot 25y^2+125y^3\\&=\boldsymbol{x^3+15x^2y+75xy^2+125y^3}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(3a-4b)^3&=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 4b+3\cdot 3a\cdot(4b)^2-(4b)^3\\&=3^3a^3-3\cdot 3^2a^2\cdot 4b+3\cdot 3a\cdot 4^2b^2-4^3b^3\\&=27a^3-3\cdot 9a^2\cdot 4b+3\cdot 3a\cdot 16b^2-64b^3\\&=\boldsymbol{27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3}\end{aligned}$$

(5) $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1^3$
$= \boldsymbol{x^3+1}$

(6) $(3a-2)(9a^2+6a+4) = (3a)^3-2^3$
$= 3^3a^3-8$
$= \boldsymbol{27a^3-8}$

(7) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) = (2a)^3-(3b)^3$
$= 2^3a^3-3^3b^3$
$= \boldsymbol{8a^3-27b^3}$

(8) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = x^3-(2y)^3$
$= x^3-2^3y^3$
$= \boldsymbol{x^3-8y^3}$

(9) $(x+y+1)^2 = x^2+y^2+1^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x$
$= x^2+y^2+1+2xy+2y+2x$
$= \boldsymbol{x^2+y^2+2xy+2x+2y+1}$

(10) $(a+b-2)^2 = a^2+b^2+(-2)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot(-2)+2\cdot(-2)\cdot a$
$= a^2+b^2+4+2ab-4b-4a$
$= \boldsymbol{a^2+b^2+2ab-4a-4b+4}$

(11) $(2x+y-z)^2 = (2x)^2+y^2+(-z)^2+2\cdot 2x\cdot y+2\cdot y\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot 2x$
$= 2^2\cdot x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4xz$
$= \boldsymbol{4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4zx}$

(12) $(a-2b-3c)^2$
$=a^2+(-2b)^2+(-3c)^2+2\cdot a\cdot(-2b)+2\cdot(-2b)\cdot(-3c)+2\cdot(-3c)\cdot a$
$=\boldsymbol{a^2+4b^2+9c^2-4ab+12bc-6ca}$

【7】(1) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}\{(x-1)(x^2+x+1)\}$
$=(x^3+1)(x^3-1)$
$=(x^3)^2-1$
$=x^{3\times 2}-1$
$=\boldsymbol{x^6-1}$

(2) $(a-1)(a-2)(a^2+a+1)(a^2+2a+4)$
$=\{(a-1)(a^2+a+1)\}\{(a-2)(a^2+2a+4)\}$
$=(a^3-1)(a^3-8)$
$=(a^3)^2-9a^3+8$
$=a^{3\times 2}-9a^3+8$
$=\boldsymbol{a^6-9a^3+8}$

(3)
$$\begin{aligned}&(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)\\=&\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}(x^6+x^3y^3+y^6)\\=&(x^3-y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)\\=&(x^3)^3-(y^3)^3\\=&x^{3\times3}-y^{3\times3}\\=&\boldsymbol{x^9-y^9}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(a+1)(a-1)(a^6-4)(a^4+a^2+1)\\=&\{(a+1)(a-1)\}(a^6-4)(a^4+a^2+1)\\=&(a^2-1)(a^6-4)(a^4+a^2+1)\\=&\{(a^2-1)(a^4+a^2+1)\}(a^6-4)\\=&\{(a^2)^3-1^3\}(a^6-4)\\=&(a^{2\times3}-1)(a^6-4)\\=&(a^6-1)(a^6-4)\\=&(a^6)^2-5a^6+4\\=&a^{6\times2}-5a^6+4\\=&\boldsymbol{a^{12}-5a^6+4}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2=&\{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^2\\=&\{(x^2-1)(x^2+1)\}^2\\=&\{(x^2)^2-1^2\}^2\\=&(x^{2\times2}-1)^2\\=&(x^4-1)^2\\=&(x^4)^2-2x^4+1\\=&x^{4\times2}-2x^4+1\\=&\boldsymbol{x^8-2x^4+1}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}(a-2)^2(a^2+2a+4)^2=&\{(a-2)(a^2+2a+4)\}^2\\=&(a^3-2^3)^2\\=&(a^3-8)^2\\=&(a^3)^2-16a^3+64\\=&a^{3\times2}-16a^3+64\\=&\boldsymbol{a^6-16a^3+64}\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}(x+1)^3(x-1)^3=&\{(x+1)(x-1)\}^3\\=&(x^2-1)^3\\=&(x^2)^3-3\cdot(x^2)^2\cdot1+3\cdot x^2\cdot1^2-1^3\\=&x^{2\times3}-3x^{2\times2}+3x^2-1\\=&\boldsymbol{x^6-3x^4+3x^2-1}\end{aligned}$$

(8) $(a+b)^2(a-b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)^2 = \{(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2$

$=\{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2$

$=\{(a^2)^3-(b^2)^3\}^2$

$=(a^{2\times 3}-b^{2\times 3})^2$

$=(a^6-b^6)^2$

$=(a^6)^2-2a^6b^6+(b^6)^2$

$=a^{6\times 2}-2a^6b^6+b^{6\times 2}$

$=\boldsymbol{a^{12}-2a^6b^6+b^{12}}$

【8】(1) $(2x^2-x+3)^2$

$=(2x^2)^2+(-x)^2+3^2+2\cdot 2x^2\cdot(-x)+2\cdot(-x)\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2x^2$

$=4x^4+x^2+9-4x^3-6x+12x^2$

$=\boldsymbol{4x^4-4x^3+13x^2-6x+9}$

(2) $(a+b)^3(a^2-ab+b^2)^3 = \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^3$

$=(a^3+b^3)^3$

$=(a^3)^3+3\cdot(a^3)^2\cdot b^3+3\cdot a^3\cdot(b^3)^2+(b^3)^3$

$=a^{3\times 3}+3a^{3\times 2}b^3+3a^3b^{3\times 2}+b^{3\times 3}$

$=\boldsymbol{a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9}$

(3) $(xy+z)^3 = (xy)^3+3\cdot(xy)^2\cdot z+3\cdot xy\cdot z^2+z^3$

$=\boldsymbol{x^3y^3+3x^2y^2z+3xyz^2+z^3}$

(4) $(x^2-2x+3)(x^2+2x-3) = \{x^2-(2x-3)\}\{x^2+(2x-3)\}$

$=(x^2)^2-(2x-3)^2$

$=x^4-\{(2x)^2-12x+9\}$

$=x^4-(4x^2-12x+9)$

$=\boldsymbol{x^4-4x^2+12x-9}$

(5) $(a^3+a^2+a+1)(a^3-a^2+a-1)$

$=(a^3+a+a^2+1)(a^3+a-a^2-1)$

$=\{(a^3+a)+(a^2+1)\}\{(a^3+a)-(a^2+1)\}$

$=(a^3+a)^2-(a^2+1)^2$

$=(a^3)^2+2\cdot a^3\cdot a+a^2-\{(a^2)^2+2a^2+1\}$

$=a^6+2a^4+a^2-(a^4+2a^2+1)$

$=a^6+2a^4+a^2-a^4-2a^2-1$

$=\boldsymbol{a^6+a^4-a^2-1}$

(6) $(25x^2+15xy+9y^2)(5x-3y) = (5x)^3-(3y)^3$

$=\boldsymbol{125x^3-27y^3}$

(7)
$$
\begin{aligned}
&(x^3+x^2+x-1)^2\\
=&\{(x^3+x^2)+(x-1)\}^2\\
=&(x^3+x^2)^2+2(x^3+x^2)(x-1)+(x-1)^2\\
=&(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot x^2+(x^2)^2+2(x^3\cdot x-x^3+x^2\cdot x-x^2)+x^2-2x+1\\
=&x^6+2x^5+x^4+2(x^4-x^3+x^3-x^2)+x^2-2x+1\\
=&x^6+2x^5+x^4+2(x^4-x^2)+x^2-2x+1\\
=&x^6+2x^5+x^4+2x^4-2x^2+x^2-2x+1\\
=&\boldsymbol{x^6+2x^5+3x^4-x^2-2x+1}
\end{aligned}
$$

(8)
$$
\begin{aligned}
(4x-3y)^3&=(4x)^3-3\cdot(4x)^2\cdot 3y+3\cdot 4x\cdot(3y)^2-(3y)^3\\
&=64x^3-3\cdot 16x^2\cdot 3y+3\cdot 4x\cdot 9y^2-27y^3\\
&=\boldsymbol{64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3}
\end{aligned}
$$

(9)
$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)&=(a^2)^3+(b^2)^3\\
&=\boldsymbol{a^6+b^6}
\end{aligned}
$$

(10)
$$
\begin{aligned}
&(a^6-8a^3+64)(a^2-2a+4)(a+2)\\
=&\{(a+2)(a^2-2a+4)\}(a^6-8a^3+64)\\
=&(a^3+2^3)(a^6-8a^3+64)\\
=&(a^3+8)(a^6-8a^3+64)\\
=&(a^3)^3+8^3\\
=&\boldsymbol{a^9+512}
\end{aligned}
$$

【9】(1) 左辺を展開して整理すると，

$$
\begin{aligned}
a(x-2)^2+b(x+3)+c&=x^2-x-2\\
a(x^2-4x+4)+bx+3b+c&=x^2-x-2\\
ax^2-4ax+4a+bx+3b+c&=x^2-x-2\\
ax^2+(-4a+b)x+4a+3b+c&=x^2-x-2
\end{aligned}
$$

両辺の係数を比較して，

$$
\begin{cases}
a=1 & \cdots ① \\
-4a+b=-1 & \cdots ② \\
4a+3b+c=-2 & \cdots ③
\end{cases}
$$

①を②に代入すると

$$
\begin{aligned}
-4\cdot 1+b&=-1\\
-4+b&=-1\\
\therefore\ b&=3\ \cdots ④
\end{aligned}
$$

①，④を③に代入すると，

$$
\begin{aligned}
4\cdot 1+3\cdot 3+c&=-2\\
4+9+c&=-2\\
13+c&=-2\\
\therefore\ c&=-15
\end{aligned}
$$

よって，

$$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-15}$$

<別解>

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，

$x=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a(0-2)^2+b(0+3)+c&=0^2-0-2 \\ 4a+3b+c&=-2 \end{aligned}$$

$x=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a(2-2)^2+b(2+3)+c&=2^2-2-2 \\ 5b+c&=0 \end{aligned}$$

$x=-3$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a(-3-2)^2+b(-3+3)+c&=(-3)^2-(-3)-2 \\ 25a+c&=10 \end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases} 4a+3b+c=-2 & \cdots① \\ 5b+c=0 & \cdots② \\ 25a+c=10 & \cdots③ \end{cases}$$

②より，$5b=-c\ \cdots④$

③より，$25a=10-c\ \cdots⑤$

これを ① $\times 25$ に代入すると，

$$\begin{aligned} 100a+75b+25c&=-50 \\ 4\cdot 25a+15\cdot 5b+25c&=-50 \\ 4(10-c)+15\cdot(-c)+25c&=-50 \\ 40-4c-15c+25c&=-50 \\ 40+6c&=-50 \\ 6c&=-90 \\ c&=-15 \end{aligned}$$

これを④に代入して，

$$\begin{aligned} 5b&=-(-15) \\ 5b&=15 \\ \therefore\ b&=3 \end{aligned}$$

さらに⑤を代入して，

$$\begin{aligned} 25a&=10-(-15) \\ 25a&=25 \\ \therefore\ a&=1 \end{aligned}$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} 1\cdot(x-2)^2+3(x+3)+(-15)&=(x-2)^2+3(x+3)-15 \\ &=x^2-4x+4+3x+9-15 \\ &=x^2-x-2=\text{右辺} \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a = 1,\ b = 3,\ c = -15}$$

(2) 右辺を展開して整理すると，

$$4x^2 + 3x + 2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$
$$4x^2 + 3x + 2 = a(x^2 - 2x + 1) + bx - b + c$$
$$4x^2 + 3x + 2 = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c$$
$$4x^2 + 3x + 2 = ax^2 + (-2a + b)x + a - b + c$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a = 4 & \cdots ① \\ -2a + b = 3 & \cdots ② \\ a - b + c = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②に代入すると，

$$-2 \cdot 4 + b = 3$$
$$-8 + b = 3$$
$$\therefore\ b = 11 \ \cdots ④$$

①，④を③に代入すると，

$$4 - 11 + c = 2$$
$$-7 + c = 2$$
$$\therefore\ c = 9$$

よって，

$$\boldsymbol{a = 4,\ b = 11,\ c = 9}$$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，

$x = 0$ を代入すると，

$$4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = a(0-1)^2 + b(0-1) + c$$
$$2 = a - b + c$$

$x = 1$ を代入すると，

$$4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = a(1-1)^2 + b(1-1) + c$$
$$4 + 3 + 2 = c$$
$$9 = c$$

$x = 2$ を代入すると，

$$4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = a(2-1)^2 + b(2-1) + c$$
$$16 + 6 + 2 = a + b + c$$
$$24 = a + b + c$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases} a - b + c = 2 & \cdots ① \\ c = 9 & \cdots ② \\ a + b + c = 24 & \cdots ③ \end{cases}$$

②を①に代入すると，

$$\begin{aligned} a-b+9&=2 \\ a-b&=-7 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

②を③に代入すると，

$$\begin{aligned} a+b+9&=24 \\ a+b&=15 \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

④ + ⑤ より，

$$2a=8 \qquad \therefore\ a=4$$

これを⑤に代入して，

$$4+b=15 \qquad \therefore\ b=11$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2+11(x-1)+9&=4(x^2-2x+1)+11x-11+9 \\ &=4x^2-8x+4+11x-11+9 \\ &=4x^2+3x+2=\text{左辺} \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=4,\ b=11,\ c=9}$$

(3) 左辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned} ax(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)(x-3)&=x^2-3 \\ ax^2+ax+bx^2-bx+c(x^2-4x+3)&=x^2-3 \\ ax^2+ax+bx^2-bx+cx^2-4cx+3c&=x^2-3 \\ (a+b+c)x^2+(a-b-4c)x+3c&=x^2-3 \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots ① \\ a-b-4c=0 & \cdots ② \\ 3c=-3 & \cdots ③ \end{cases}$$

③より，

$$\begin{aligned} 3c&=-3 \\ c&=-1 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

④を①に代入すると，

$$\begin{aligned} a+b-1&=1 \\ a+b&=2 \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

④を②に代入すると，

$$\begin{aligned} a-b-4\cdot(-1)&=0 \\ a-b+4&=0 \\ a-b&=-4 \quad \cdots ⑥ \end{aligned}$$

⑤＋⑥ より，

$2a=-2 \qquad \therefore\ a=-1$

これを⑤に代入すると，

$-1+b=2 \qquad \therefore\ b=3$

よって，

$\boldsymbol{a=-1,\ b=3,\ c=-1}$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，

$x=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a\cdot 0\cdot(0+1)+b\cdot 0\cdot(0-1)+c(0-1)(0-3)&=0^2-3 \\ 3c&=-3 \\ c&=-1 \quad \cdots① \end{aligned}$$

$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a\cdot 1\cdot(1+1)+b\cdot 1\cdot(1-1)+c(1-1)(1-3)&=1^2-3 \\ 2a&=-2 \\ a&=-1 \quad \cdots② \end{aligned}$$

$x=3$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a\cdot 3\cdot(3+1)+b\cdot 3\cdot(3-1)+c(3-1)(3-3)&=3^2-3 \\ 12a+6b&=6 \\ 2a+b&=1 \quad \cdots③ \end{aligned}$$

となる．②を③に代入すると，

$$\begin{aligned} 2\cdot(-1)\ +\ b&=1 \\ -2+b&=1 \\ \therefore\ b&=3 \end{aligned}$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} &-1\cdot x(x+1)+3x(x-1)+(-1)\cdot(x-1)(x-3) \\ =&-x^2-x+3x^2-3x-(x^2-4x+3) \\ =&-x^2-x+3x^2-3x-x^2+4x-3 \\ =&x^2-3 \\ =&\text{右辺} \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$\boldsymbol{a=-1,\ b=3,\ c=-1}$

(4) 右辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned} x^2+x+1&=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1) \\ x^2+x+1&=a(x^2-3x+2)+b(x^2-5x+6)+c(x^2-4x+3) \\ x^2+x+1&=ax^2-3ax+2a+bx^2-5bx+6b+cx^2-4cx+3c \\ x^2+x+1&=(a+b+c)x^2+(-3a-5b-4c)x+2a+6b+3c \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots ① \\ -3a-5b-4c=1 & \cdots ② \\ 2a+6b+3c=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 4+$② より，$a-b=5$ $\cdots$④

①$\times 3-$③ より，$a-3b=2$ $\cdots$⑤

④$-$⑤ より，

$$2b=3 \qquad \therefore\ b=\frac{3}{2} \ \cdots ⑥$$

⑥を④を代入して，

$$a-\frac{3}{2}=5 \qquad \therefore\ a=\frac{13}{2} \ \cdots ⑦$$

⑥，⑦を①に代入すると，

$$\frac{13}{2}+\frac{3}{2}+c=1$$
$$8+c=1$$
$$\therefore\ c=-7$$

よって，

$$\boldsymbol{a=\frac{13}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-7}$$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，$x=1$ を代入すると，

$$1^2+1+1=a(1-1)(1-2)+b(1-2)(1-3)+c(1-3)(1-1)$$
$$3=2b$$
$$\frac{3}{2}=b$$

$x=2$ を代入すると，

$$2^2+2+1=a(2-1)(2-2)+b(2-2)(2-3)+c(2-3)(2-1)$$
$$7=-c$$
$$-7=c$$

$x=3$ を代入すると，

$$3^2+3+1=a(3-1)(3-2)+b(3-2)(3-3)+c(3-3)(3-1)$$
$$13=2a$$
$$\frac{13}{2}=a$$

を得る．逆を確かめる．

$$\frac{13}{2}(x-1)(x-2)+\frac{3}{2}(x-2)(x-3)-7(x-3)(x-1)$$
$$=\frac{13}{2}(x^2-3x+2)+\frac{3}{2}(x^2-5x+6)-7(x^2-4x+3)$$
$$=\frac{13}{2}x^2-\frac{39}{2}x+13+\frac{3}{2}x^2-\frac{15}{2}x+9-7x^2+28x-21$$
$$=x^2+x+1$$
$$=\text{左辺}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=\frac{13}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-7}$$

(5) 両辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned}\text{左辺}=(2x-1)^3 &=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3\\ &=2^3\cdot x^3-3\cdot 2^2\cdot x^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1-1\\ &=8x^3-12x^2+6x-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d\\ &=a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+cx-c+d\\ &=ax^3-3ax^2+3ax-a+bx^2-2bx+b+cx-c+d\\ &=ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x-a+b-c+d\end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a=8 & \cdots ① \\ -3a+b=-12 & \cdots ② \\ 3a-2b+c=6 & \cdots ③ \\ -a+b-c+d=-1 & \cdots ④ \end{cases}$$

①に②に代入すると，

$$\begin{aligned}-3\cdot 8+b&=-12\\ -24+b&=-12\\ \therefore\ b=12\ &\cdots ⑤\end{aligned}$$

①，⑤を③に代入すると，

$$\begin{aligned}3\cdot 8-2\cdot 12+c&=6\\ 24-24+c&=6\\ \therefore\ c=6\ &\cdots ⑥\end{aligned}$$

①，⑤，⑥を④に代入すると，

$$\begin{aligned}-8+12-6+d&=-1\\ -2+d&=-1\\ \therefore\ d&=1\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=8,\ b=12,\ c=6,\ d=1}$$

＜別解１＞
x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，
$x=0$ を代入して，

$$\begin{aligned}(2\cdot 0-1)^3&=a(0-1)^3+b(0-1)^2+c(0-1)+d\\ -1&=-a+b-c+d\end{aligned}$$

$x=1$ を代入すると，

$$(2\cdot 1-1)^3=a(1-1)^3+b(1-1)^2+c(1-1)+d$$
$$1=d$$

$x=2$ を代入すると，

$$(2\cdot 2-1)^3=a(2-1)^3+b(2-1)^2+c(2-1)+d$$
$$27=a+b+c+d$$

$x=3$ を代入すると，

$$(2\cdot 3-1)^3=a(3-1)^3+b(3-1)^2+c(3-1)+d$$
$$125=8a+4b+2c+d$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases}-a+b-c+d=-1 & \cdots ① \\ d=1 & \cdots ② \\ a+b+c+d=27 & \cdots ③ \\ 8a+4b+2c+d=125 & \cdots ④\end{cases}$$

②を①，③，④にそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases}-a+b-c=-2 & \cdots ⑤ \\ a+b+c=26 & \cdots ⑥ \\ 8a+4b+2c=124 & \cdots ⑦\end{cases}$$

⑤ + ⑥ より，

$$2b=24$$
$$b=12$$

これを⑥，⑦にそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases}a+c=14 & \cdots ⑧ \\ 8a+2c=76 & \cdots ⑨\end{cases}$$

⑨ ÷ 2 − ⑧ より，

$$3a=24$$
$$a=8$$

これを⑧に代入して，

$$8+c=14$$
$$c=6$$

を得る．逆を確かめる．

$$\text{左辺}=(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$$
$$\begin{aligned}\text{右辺}&=8(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1\\&=8(x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3)+12(x^2-2x+1)+6x-6+1\\&=8(x^3-3x^2+3x-1)+12x^2-24x+12+6x-6+1\\&=8x^3-24x^2+24x-8+12x^2-24x+12+6x-6+1\\&=8x^3-12x^2+6x-1\end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺 となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$\boldsymbol{a = 8,\ b = 12,\ c = 6,\ d = 1}$

＜別解 **2** ＞

$x-1=k$ とおくと，$x=k+1$ だから，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \{2(k+1)-1\}^3 \\
&= (2k+2-1)^3 \\
&= (2k+1)^3 \\
&= (2k)^3 + 3\cdot(2k)^2\cdot 1 + 3\cdot 2k\cdot 1^2 + 1^3 \\
&= 2^3\cdot k^3 + 3\cdot 2^2\cdot k^2\cdot 1 + 6k + 1 \\
&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\
&= 8(x-1)^3 + 12(x-1)^2 + 6(x-1) + 1
\end{aligned}$$

よって，両辺を比較すると，

$\boldsymbol{a = 8,\ b = 12,\ c = 6,\ d = 1}$

【10】(1)

$$\begin{aligned}
(a+b-c+1)^2 &= \{(a+b)-(c-1)\}^2 \\
&= (A-B)^2 \qquad \text{〔}A=a+b,\ B=c-1 \text{ とおく〕} \\
&= A^2 - 2AB + B^2 \\
&= (a+b)^2 - 2(a+b)(c-1) + (c-1)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 - (2a+2b)(c-1) + c^2 - 2c + 1 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 - 2a(c-1) - 2b(c-1) + c^2 - 2c + 1 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac + 2a - 2bc + 2b + c^2 - 2c + 1 \\
&= \boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca + 2a + 2b - 2c + 1}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(a-b+c-1)^2 &= (A+B)^2 \qquad \text{〔}A=a-b,\ B=c-1 \text{ とおく〕} \\
&= A^2 + 2AB + B^2 \\
&= (a-b)^2 + 2(a-b)(c-1) + (c-1)^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 + 2a(c-1) - 2b(c-1) + c^2 - 2c + 1 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2a - 2bc + 2b + c^2 - 2c + 1 \\
&= \boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca - 2a + 2b - 2c + 1}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(a-b-c+d)^2 &= \{(a-b)-(c-d)\}^2 \\
&= (A-B)^2 \qquad \text{〔}A=a-b,\ B=c-d \text{ とおく〕} \\
&= A^2 - 2AB + B^2 \\
&= (a-b)^2 - 2(a-b)(c-d) + (c-d)^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 - (2a-2b)(c-d) + c^2 - 2cd + d^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 - 2a(c-d) + 2b(c-d) + c^2 - 2cd + d^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd + c^2 - 2cd + d^2 \\
&= \boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\
&\qquad \boldsymbol{-2ab + 2bc - 2ca + 2ad - 2bd - 2cd}
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(a+b-c-d)^2 &= \{(a+b)-(c+d)\}^2\\ &= (A-B)^2 \qquad 〔A=a+b,\ B=c+d \text{ とおく}〕\\ &= A^2-2AB+B^2\\ &= (a+b)^2-2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\\ &= a^2+2ab+b^2-2\{a(c+d)+b(c+d)\}+c^2+2cd+d^2\\ &= a^2+2ab+b^2-2(ac+ad+bc+bd)+c^2+2cd+d^2\\ &= a^2+2ab+b^2-2ac-2ad-2bc-2bd+c^2+2cd+d^2\\ &= \boldsymbol{a^2+b^2+c^2+d^2}\\ &\qquad \boldsymbol{+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}(a^2+a+4)(a^2+a-6) &= \{(a^2+a)+4\}\{(a^2+a)-6\}\\ &= (A+4)(A-6) \qquad 〔A=a^2+a \text{ とおく}〕\\ &= A^2-2A-24\\ &= (a^2+a)^2-2(a^2+a)-24\\ &= a^4+2a^3+a^2-2a^2-2a-24\\ &= \boldsymbol{a^4+2a^3-a^2-2a-24}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}(x^2+3x+2)(x^2-x+2) &= (x^2+2+3x)(x^2+2-x)\\ &= \{(x^2+2)+3x\}\{(x^2+2)-x\}\\ &= (A+3x)(A-x) \qquad 〔A=x^2+2 \text{ とおく}〕\\ &= A^2+2xA-3x^2\\ &= (x^2+2)^2+2x(x^2+2)-3x^2\\ &= x^4+4x^2+4+2x^3+4x-3x^2\\ &= \boldsymbol{x^4+2x^3+x^2+4x+4}\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}(x^2-xy+2y^2)(x^2+xy+2y^2) &= (x^2+2y^2-xy)(x^2+2y^2+xy)\\ &= \{(x^2+2y^2)-xy\}\{(x^2+2y^2)+xy\}\\ &= (A-xy)(A+xy)\\ &\qquad 〔A=x^2+2y^2 \text{とおく}〕\\ &= A^2-(xy)^2\\ &= (x^2+2y^2)^2-x^2y^2\\ &= x^4+2\cdot x^2\cdot 2y^2+4y^4-x^2y^2\\ &= x^4+4x^2y^2+4y^4-x^2y^2\\ &= \boldsymbol{x^4+3x^2y^2+4y^4}\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2) &= (x^2+4y^2+2xy)(x^2+4y^2-2xy)\\ &= \{(x^2+4y^2)+2xy\}\{(x^2+4y^2)-2xy\}\\ &= (A+2xy)(A-2xy)\\ &\qquad 〔A=x^2+4y^2 \text{とおく}〕\\ &= A^2-(2xy)^2\\ &= (x^2+4y^2)^2-4x^2y^2\\ &= (x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 4y^2+(4y^2)^2-4x^2y^2\\ &= x^4+8x^2y^2+16y^4-4x^2y^2\\ &= \boldsymbol{x^4+4x^2y^2+16y^4}\end{aligned}$$

(9)
$$
\begin{aligned}
(a-b+c-1)(a+b-c-1) &= (a-1-b+c)(a-1+b-c)\\
&= \{(a-1)-(b-c)\}\{(a-1)+(b-c)\}\\
&= (A-B)(A+B)\\
&\qquad\text{〔}A=a-1,\ B=b-c\text{ とおく〕}\\
&= A^2-B^2\\
&= (a-1)^2-(b-c)^2\\
&= a^2-2a+1-(b^2-2bc+c^2)\\
&= \boldsymbol{a^2-2a+1-b^2+2bc-c^2}
\end{aligned}
$$

(10)
$$
\begin{aligned}
(1-a+b-c)(1+c-a-b) &= (1-a+b-c)(1-a-b+c)\\
&= \{(1-a)+(b-c)\}\{(1-a)-(b-c)\}\\
&= (A+B)(A-B)\\
&\qquad\text{〔}A=1-a,\ B=b-c\text{ とおく〕}\\
&= A^2-B^2\\
&= (1-a)^2-(b-c)^2\\
&= 1-2a+a^2-(b^2-2bc+c^2)\\
&= \boldsymbol{1-2a+a^2-b^2+2bc-c^2}
\end{aligned}
$$

(11)
$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)\\
=&(1+x^2+x+x^3)(1+x^2-x-x^3)\\
=&\{(1+x^2)+(x+x^3)\}\{(1+x^2)-(x+x^3)\}\\
=&(A+B)(A-B)\qquad\text{〔}A=1+x^2,\ B=x+x^3\text{とおく〕}\\
=&A^2-B^2\\
=&(1+x^2)^2-(x+x^3)^2\\
=&1+2x^2+(x^2)^2-\{x^2+2\cdot x\cdot x^3+(x^3)^2\}\\
=&1+2x^2+x^{2\times2}-(x^2+2x^{1+3}+x^{3\times2})\\
=&1+2x^2+x^4-(x^2+2x^4+x^6)\\
=&1+2x^2+x^4-x^2-2x^4-x^6\\
=&\boldsymbol{1+x^2-x^4-x^6}
\end{aligned}
$$

(12)
$$
\begin{aligned}
&(8x^3-8x^2+4x-1)(8x^3+8x^2+4x+1)\\
=&(8x^3+4x-8x^2-1)(8x^3+4x+8x^2+1)\\
=&\{(8x^3+4x)-(8x^2+1)\}\{(8x^3+4x)+(8x^2+1)\}\\
=&(A-B)(A+B)\qquad\text{〔}A=8x^3+4x,\ B=8x^2+1\text{ とおく〕}\\
=&A^2-B^2\\
=&(8x^3+4x)^2-(8x^2+1)^2\\
=&(8x^3)^2+2\cdot8x^3\cdot4x+(4x)^2-\{(8x^2)^2+2\cdot8x^2\cdot1+1^2\}\\
=&8^2\cdot(x^3)^2+64x^{3+1}+4^2\cdot x^2-\{8^2\cdot(x^2)^2+16x^2+1\}\\
=&64x^{3\times2}+64x^4+16x^2-(64x^{2\times2}+16x^2+1)\\
=&64x^6+64x^4+16x^2-(64x^4+16x^2+1)\\
=&64x^6+64x^4+16x^2-64x^4-16x^2-1\\
=&\boldsymbol{64x^6-1}
\end{aligned}
$$

【11】(1) $(x^2-1)(x^3+ax^2+3)$ において，x^2 の係数だけ計算すると $-a+3$ だから，

$$
\begin{aligned}
-a+3&=0\\
a&=\mathbf{3}
\end{aligned}
$$

(2) $(x^2+ax+b)(x^2+bx+2)$ において，x^3 の係数だけ計算すると $a+b$ だから，

$$a+b=0$$
$$b=-a \ \cdots ①$$

x^2 の係数だけ計算すると $2+ab+b$ なので，

$$ab+b+2=0 \ \cdots ②$$

①を②に代入すると，

$$a\cdot(-a)+(-a)+2=0$$
$$-a^2-a+2=0$$
$$a^2+a-2=0$$
$$(a+2)(a-1)=0$$
$$a=-2,\ 1$$

$a=1$ を①に代入すると，$b=-1$
$a=-2$ を①に代入すると，$b=2$
よって，

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ -1),\ (-2,\ 2)}$$

(3) $(x^2+ax+b)(x^2-2bx+a)$ において，x^3 の係数だけ計算すると $a-2b$ だから，

$$a-2b=7$$
$$a=2b+7 \ \cdots ①$$

x^2 の係数だけ計算すると $a-2ab+b$ なので，

$$a-2ab+b=13 \ \cdots ②$$

①を②に代入すると

$$(2b+7)-2b(2b+7)+b=13$$
$$2b+7-4b^2-14b+b=13$$
$$-4b^2-11b+7=13$$
$$-4b^2-11b-6=0$$
$$4b^2+11b+6=0$$
$$(b+2)(4b+3)=0$$
$$b=-2,\ -\frac{3}{4}$$

b は整数だから，$b=-2$
これを①に代入して，

$$a=2\cdot(-2)+7=-4+7$$
$$\therefore\ a=3$$

を得る．よって，

$$\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$$

(4) x^4 の係数が 1 なので，2 次式を x^2+mx+n とおくと，

$$\begin{aligned}(x^2+mx+n)^2 &= (x^2)^2+(mx)^2+n^2+2\cdot x^2\cdot mx+2\cdot mx\cdot n+2\cdot n\cdot x^2\\ &= x^{2\times2}+m^2x^2+n^2+2mx^{2+1}+2mnx+2nx^2\\ &= x^4+m^2x^2+n^2+2mx^3+2mnx+2nx^2\\ &= x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mnx+n^2\end{aligned}$$

これより，

$$x^4-6x^3+ax^2+6x+b=x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mn+n^2$$

となる．両辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases}-6=2m & \cdots① \\ a=m^2+2n & \cdots② \\ 6=2mn & \cdots③ \\ b=n^2 & \cdots④\end{cases}$$

を得る．①より，

$$\begin{aligned}2m&=-6\\ m&=-3 \ \cdots⑤\end{aligned}$$

⑤を③に代入すると，

$$\begin{aligned}2n\cdot(-3)&=6\\ -6n&=6\\ n&=-1 \ \cdots⑥\end{aligned}$$

⑤，⑥を②に代入して，

$$\begin{aligned}a&=(-3)^2+2\cdot(-1)\\ &=9-2\\ &=7\end{aligned}$$

⑥を④に代入して，

$$\begin{aligned}b&=(-1)^2\\ &=1\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=7,\ b=1}$$

【12】(1)

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (x+a)(x+b)(x+c)\\ &= (x+a)(x^2+bx+cx+bc)\\ &= x(x^2+bx+cx+bc)+a(x^2+bx+cx+bc)\\ &= x^3+bx^2+cx^2+bcx+ax^2+abx+acx+abc\\ &= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc\\ &= \text{右辺}\end{aligned}$$

（証明終）

(2) ① $(x+1)(x+2)(x+4)$

$=x^3+(1+2+4)x^2+(1\cdot 2+2\cdot 4+4\cdot 1)x+1\cdot 2\cdot 4$

$=\boldsymbol{x^3+7x^2+14x+8}$

② $(a+2)(a+3)(a+4)$

$=a^3+(2+3+4)a^2+(2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 2)a+2\cdot 3\cdot 4$

$=\boldsymbol{a^3+9a^2+26a+24}$

【13】(1) 左辺 $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+b(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\quad +c(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc$
$\quad +a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

=右辺　(証明終)

(2) ① $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$

$=\boldsymbol{x^3+y^3+1-3xy}$

② $(a+b-1)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$

$=(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a)$

$=a^3+b^3+(-1)^3-3\cdot a\cdot b\cdot(-1)$

$=\boldsymbol{a^3+b^3-1+3ab}$

【14】(1) $\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

(2) $(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$

$=\boldsymbol{a^3+b^3}$

(3) $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2b-3ab^2$

$=\boldsymbol{a^3-b^3}$

(4) パスカルの三角形より，

$(a+b)^7=\boldsymbol{a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7}$

(5) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a(a^3+a^2b+ab^2+b^3)-b(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4$

$=\boldsymbol{a^4-b^4}$

(6) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$=a(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)-b(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4-a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5$

$=\boldsymbol{a^5-b^5}$

(7) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$=a(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+b(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4+a^4b-a^3b^2+a^2b^3-ab^4+b^5$

$=\boldsymbol{a^5+b^5}$

(8) $(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

$=a(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$
$\quad+b(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

$=a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+a^3b^4-a^2b^5+ab^6$
$\quad+a^6b-a^5b^2+a^4b^3-a^3b^4+a^2b^5-ab^6+b^7$

$=\boldsymbol{a^7+b^7}$

(9) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

$=a(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+b(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

$=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4$

$=\boldsymbol{a^4-b^4}$

(10) $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$

$=a(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)+b(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$

$=a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+a^5b-a^4b^2+a^3b^3-a^2b^4+ab^5-b^6$

$=\boldsymbol{a^6-b^6}$

> 一般に次のことが成り立つ.
>
> ✦ $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$
>
> ✦ n が奇数のとき
>
> $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n+b^n$
>
> ✦ n が偶数のとき
>
> $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})=a^n-b^n$

【15】(1) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$

$=\{(a+b+c)+(a+b-c)\}\{(a+b+c)-(a+b-c)\}$

$=(2a+2b)\cdot 2c$

$=\boldsymbol{4ac+4bc}$

(2) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3$

$=\{(a+b)+c\}^3-\{(a+b)-c\}^3$

$=(A+c)^3-(A-c)^3$ 〔$A=a+b$ とおく〕

$=A^3+3A^2c+3Ac^2+c^3-(A^3-3A^2c+3Ac^2-c^3)$

$=A^3+3A^2c+3Ac^2c^3-A^3+3A^2c-3Ac^2+c^3$

$=6A^2c+2c^3$

$=6c(a+b)^2+2c^3$

$=6c(a^2+2ab+b^2)+2c^3$

$=\boldsymbol{6a^2c+12abc+6b^2c+2c^3}$

＜別解＞

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-(a+b-c)^3\\
=&\{(a+b)+c\}^3-\{(a+b)-c\}^3\\
=&(A+c)^3-(A-c)^3 \quad \text{〔}A=a+b\text{ とおく〕}\\
=&\{(A+c)-(A-c)\}\{(A+c)^2+(A+c)(A-c)+(A-c)^2\}\\
=&2c(A^2+2Ac+c^2+A^2-c^2+A^2-2Ac+c^2)\\
=&2c(3A^2+c^2)\\
=&6A^2c+2c^3\\
=&6c(a+b)^2+2c^3\\
=&6c(a^2+2ab+b^2)+2c^3\\
=&\boldsymbol{6a^2c+12abc+6b^2c+2c^3}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\\
=&a(a^2-ab-ac+bc)+b(b^2-bc-ab+ca)+c(c^2-ca-bc+ab)\\
=&a^3-a^2b-a^2c+abc+b^3-b^2c-ab^2+abc+c^3-c^2a-c^2b+abc\\
=&\boldsymbol{a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-a^2c-ab^2-b^2c-ac^2-bc^2}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)\\
=&(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\
=&\{a+(b+c)\}\{-a+(b+c)\}\times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\
=&(a+A)(-a+A)\times(a-B)(a+B) \quad \text{〔}A=b+c,\ B=b-c\text{ とおく〕}\\
=&(-a^2+A^2)(a^2-B^2)\\
=&-(a^2-A^2)(a^2-B^2)\\
=&-\{a^4-a^2(A^2+B^2)+A^2B^2\}\\
=&-a^4+a^2(A^2+B^2)-(AB)^2\\
=&-a^4+a^2\{(b+c)^2+(b-c)^2\}-\{(b+c)(b-c)\}^2\\
=&-a^4+a^2(b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2)-(b^2-c^2)^2\\
=&-a^4+a^2(2b^2+2c^2)-\{(b^2)^2-2b^2c^2+(c^2)^2\}\\
=&-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-(b^{2\times2}-2b^2c^2+c^{2\times2})\\
=&-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-(b^4-2b^2c^2+c^4)\\
=&-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4\\
=&\boldsymbol{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2\\
=&\{a+(b+c)\}^2+\{-a+(b+c)\}^2+\{a-(b-c)\}^2+\{a+(b-c)\}^2\\
=&(a+A)^2+(-a+A)^2+(a-B)^2+(a+B)^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{〔}A=b+c,\ B=b-c\text{ とおく〕}\\
=&a^2+2aA+A^2+a^2-2aA+A^2+a^2-2aB+B^2+a^2+2aB+B^2\\
=&4a^2+2A^2+2B^2\\
=&4a^2+2(b+c)^2+2(b-c)^2\\
=&4a^2+2(b^2+2bc+c^2)+2(b^2-2bc+c^2)\\
=&4a^2+2b^2+4bc+2c^2+2b^2-4bc+2c^2\\
=&\boldsymbol{4a^2+4b^2+4c^2}
\end{aligned}
$$

(6) $(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2-(a+b-c)^2$

$=\{(a+b+c)+(-a+b+c)\}\{(a+b+c)-(-a+b+c)\}$

$\quad +\{(a-b+c)+(a+b-c)\}\{(a-b+c)-(a+b-c)\}$

$=(2b+2c)\cdot 2a+2a(-2b+2c)$

$=4ab+4ac-4ab+4ac$

$=\boldsymbol{8ac}$

(7) $(a+b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(a-b-c)+(a-b-c)(a+b+c)$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}+\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}$

$\quad +\{a-(b+c)\}\{a+(b+c)\}$

$=(A+c)(A-c)+(B+b)(B-b)+(a-C)(a+C)$

〔$A=a+b,\ B=a-c,\ C=b+c$ とおく〕

$=A^2-c^2+B^2-b^2+a^2-C^2$

$=(a+b)^2-c^2+(a-c)^2-b^2+a^2-(b+c)^2$

$=a^2+2ab+b^2-c^2+a^2-2ac+c^2-b^2+a^2-(b^2+2bc+c^2)$

$=a^2+2ab+b^2-c^2+a^2-2ac+c^2-b^2+a^2-b^2-2bc-c^2$

$=\boldsymbol{3a^2-b^2-c^2+2ab-2bc-2ca}$

(8) $(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)$

$=\{x^2-(b+c)x+bc\}(b-c)+\{x^2-(c+a)x+ca\}(c-a)$

$\quad +\{x^2-(a+b)x+ab\}(a-b)$

$=(b-c)x^2-(b+c)(b-c)x+bc(b-c)$

$\quad +(c-a)x^2-(c+a)(c-a)x+ca(c-a)$

$\quad +(a-b)x^2-(a+b)(a-b)x+ab(a-b)$

$=(b-c+c-a+a-b)x^2-\{(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)\}x$

$\quad +bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$=-(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)x+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$

$=\boldsymbol{b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2}$

添削課題

【1】(1) $$(2x-3y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2-(3y)^3$$
$$=\boldsymbol{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$$

(2) $$(a-3)(a^2+3a+9)=a^3-3^3=\boldsymbol{a^3-27}$$

(3) $$(2m+3n)(4m^2-6mn+9n^2)=(2m)^3+(3n)^3$$
$$=\boldsymbol{8m^3+27n^3}$$

(4) $$(3x+y-2)^2=(3x)^2+y^2+(-2)^2+2\cdot 3x\cdot y+2\cdot 3x\cdot(-2)+2\cdot y\cdot(-2)$$
$$=\boldsymbol{9x^2+6xy+y^2-12x-4y+4}$$

【2】(1) $$(2x+y)(2x+3y)(2x-5y)$$
$$=(2x)^3+(y+3y-5y)\cdot(2x)^2+(y\cdot 3y-3y\cdot 5y-5y\cdot y)\cdot 2x-y\cdot 3y\cdot 5y$$
$$=\boldsymbol{8x^3-4x^2y-34xy^2-15y^3}$$

(2) $$(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$$
$$=\{(a+b)+c\}^3-3\{c^2+(a+b)c+ab\}(a+b)$$
$$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3-3(a+b)c^2-3(a+b)^2c-3ab(a+b)$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3$$
$$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3}$$

(3) $$(x^8-x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$
$$=(x^8-x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)$$
$$=(x^8-x^4+1)(x^8+x^4+1)$$
$$=\boldsymbol{x^{16}+x^8+1}$$

(4) $$(a-b+2)(a^2+ab+b^2-2a+2b+4)$$
$$=(a-b+2)(a^2+b^2+2^2+ab-2a+2b)$$
$$=a^3+(-b)^3+2^3-3\cdot a\cdot(-b)\cdot 2$$
$$=\boldsymbol{a^3-b^3+6ab+8}$$

08_3MJS-3MJ(81CS6)_mishina.indd 24 2020/02/27 10:33:44

【3】 x^4 の係数について

$-6-a+7b=13 \cdots ①$

x^5 の係数について

$-3+7a+4b=-30 \cdots ②$

①, ②より,

$\boldsymbol{a=-5,\ b=2}$

【4】(1) 与式の左辺を k について整理すると

$$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$$

これが k についての恒等式だから

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ x-3y-5=0 \end{cases}$$

よって, $\boldsymbol{x=-1,\ y=-2}$

(2) まず,

$$\begin{cases} x-y+z=1 & \cdots ① \\ 2x+y-2z=0 & \cdots ② \end{cases}$$

より, y と z を x であらわすことを考える.

① + ② から,

$3x-z=1 \qquad \therefore\ z=3x-1$

① × 2 + ② から

$4x-y=2 \qquad \therefore\ y=4x-2$

これらを $ax^2+by^2+cz^2=-4$ に代入して整理すると,

$$ax^2+b(4x-2)^2+c(3x-1)^2=-4$$

$$(a+16b+9c)x^2-2(8b+3c)x+(4b+c)=-4$$

この等式が x の値にかかわらず成り立つ条件は

$$\begin{cases} a+16b+9c=0 \\ 8b+3c=0 \\ 4b+c=-4 \end{cases}$$

よって, $\boldsymbol{a=-24,\ b=-3,\ c=8}$

問題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
&x^3+8\\
=&x^3+2^3\\
=&(x+2)(x^2-2\cdot x+2^2)\\
=&\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&x^3y^3+1\\
=&(xy)^3+1^3\\
=&(xy+1)\{(xy)^2-1\cdot xy+1^2\}\\
=&\boldsymbol{(xy+1)(x^2y^2-xy+1)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&27a^3-b^3\\
=&(3a)^3-b^3\\
=&(3a-b)\{(3a)^2+3a\cdot b+b^2\}\\
=&\boldsymbol{(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&3a^3-24\\
=&3(a^3-8)\\
=&3(a^3-2^3)\\
=&3\{(a-2)(a^2+a\cdot 2+2^2)\}\\
=&\boldsymbol{3(a-2)(a^2+2a+4)}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
a^4+a&=a(a^3+1)\\
&=a\{(a+1)(a^2-a\cdot 1+1^2)\}\\
&=\boldsymbol{a(a+1)(a^2-a+1)}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
x^3-(y-1)^3&=x^3-A^3 \quad 〔A=y-1\text{ とおく}〕\\
&=(x-A)(x^2+x\cdot A+A^2)\\
&=(x-A)(x^2+xA+A^2)\\
&=\{x-(y-1)\}\{x^2+x(y-1)+(y-1)^2\}\\
&=\boldsymbol{(x-y+1)(x^2+xy-x+y^2-2y+1)}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
(a-b)^4-a+b&=(a-b)^4-(a-b)\\
&=A^4-A \quad 〔A=a-b\text{ とおく}〕\\
&=A(A^3-1)\\
&=A(A-1)(A^2+A+1)\\
&=(a-b)\{(a-b)-1\}\{(a-b)^2+(a-b)+1\}\\
&=\boldsymbol{(a-b)(a-b-1)(a^2-2ab+b^2+a-b+1)}
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
& x^3+y^3-z^3+3xyz \\
=& (x+y)^3-3xy(x+y)-z^3+3xyz \\
=& \{(x+y)^3-z^3\}-\{3xy(x+y)-3xyz\} \\
=& \{(x+y)-z\}\{(x+y)^2+(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y-z) \\
=& (x+y-z)(x^2+2xy+y^2+xz+yz+z^2)-3xy(x+y-z) \\
=& \boldsymbol{(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)}
\end{aligned}
$$

(9)

$$
\begin{aligned}
& 8x^3-6xy-y^3-1 \\
=& (2x)^3+(-y)^3+(-1)^3-3\cdot 2x\cdot(-y)\cdot(-1) \\
=& \{2x+(-y)+(-1)\}\{(2x)^2+(-y)^2+(-1)^2-2x\cdot(-y) \\
& \qquad -(-y)\cdot(-1)-(-1)\cdot 2x\} \\
=& \boldsymbol{(2x-y-1)(4x^2+y^2+1+2xy-y+2x)}
\end{aligned}
$$

(10)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3-a^3-b^3 &= (a+b)^3-(a^3+b^3) \\
&= (a+b)^3-(a+b)(a^2-ab+b^2) \\
&= (a+b)\{(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)\} \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2) \\
&= \boldsymbol{3ab(a+b)}
\end{aligned}
$$

【2】(1) x と y を交換すると，$12y^2+40yx-12x^2$

$$
\begin{aligned}
& 12y^2+40yx-12x^2 \fallingdotseq 12x^2+40xy-12y^2 \\
& 12y^2+40yx-12x^2 \fallingdotseq -(12x^2+40xy-12y^2)
\end{aligned}
$$

よって，**対称式でも交代式でもない**

(2) x と y を交換すると，y^5-x^5

$$y^5-x^5=-(x^5-y^5)$$

よって，**交代式である**

(3) a と b を交換すると，$b^2+5ba+a^2$

$$b^2+5ba+a^2=a^2+5ab+b^2$$

よって，**対称式である**

(4) x と y を交換すると，

$$(y+x)^2(y^2+x^2)+1=(x+y)^2(x^2+y^2)+1$$

よって，**対称式である**

(5) a と b を交換すると,

$$b^3-3b^2a+3ba^2-a^3=-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$

よって，交代式である

(6) a と b を交換すると，$3b(b-a)-a(a-b)$

$$3b(b-a)-a(a-b)\fallingdotseq 3a(a-b)-b(b-a)$$
$$3b(b-a)-a(a-b)\fallingdotseq -\{3a(a-b)-b(b-a)\}$$

よって，対称式でも交代式でもない

(7) ① a と b を交換すると

$$bac+ac+cb+ba+b+a+c+1=abc+bc+ca+ab+a+b+c+1$$

② b と c を交換すると

$$acb+cb+ba+ac+a+c+b+1=abc+bc+ca+ab+a+b+c+1$$

③ a と c を交換すると

$$cba+ba+ac+cb+c+b+a+1=abc+bc+ca+ab+a+b+c+1$$

よって，a，b，c の対称式である

(8) ① a と b を交換すると,

$$b^2(a-c)+a^2(c-b)+c^2(b-a)=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

② b と c を交換すると,

$$a^2(c-b)+c^2(b-a)+b^2(a-c)=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

③ c と a を交換すると,

$$c^2(b-a)+b^2(a-c)+a^2(c-b)=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

よって，a，b，c の交代式である

(9) ① x と y を交換すると，$y^2+x^2+xz-zy-2yx$

$$y^2+x^2+xz-zy-2yx \fallingdotseq x^2+y^2+yz-zx-2xy$$
$$y^2+x^2+xz-zy-2yx \fallingdotseq -\{x^2+y^2+yz-zx-2xy\}$$

② y と z を交換すると，$x^2+z^2+zy-yx-2xz$

$$x^2+z^2+zy-yz-2xz \fallingdotseq x^2+y^2+yz-zx-2xy$$
$$x^2+z^2+zy-yz-2xz \fallingdotseq -\{x^2+y^2+yz-zx-2xy\}$$

③ x と z を交換すると，$z^2+y^2+yx-xz-2zx$

$$z^2+y^2+yz-xz-2zx \fallingdotseq x^2+y^2+yz-zx-2xy$$
$$z^2+y^2+yz-xz-2zx \fallingdotseq -\{x^2+y^2+yz-zx-2xy\}$$

よって，対称式でも交代式でもない

(10) ① x と y を交換すると，$y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2)$

$$y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2)=-\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}$$

② y と z を交換すると，$x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2)+y(x^2-z^2)$

$$x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2)+y(x^2-z^2)=-\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}$$

③ z と x を交換すると，$z(y^2-x^2)+y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)$

$$z(y^2-x^2)+y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)=-\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}$$

よって，交代式である

(11) ① x と y を交換すると，$y^2x-y^2z+x^2z-x^2y$

$$y^2x-y^2z+x^2z-x^2y=-(x^2y-x^2z+y^2z-y^2x)$$

② y と z を交換すると，$x^2z-x^2y+z^2y-z^2x$

$$x^2z-x^2y+z^2y-z^2x \fallingdotseq x^2y-x^2z+y^2z-y^2x$$
$$x^2z-x^2y+z^2y-z^2x \fallingdotseq -(x^2y-x^2z+y^2z-y^2x)$$

③ x と z を交換すると，$z^2y-z^2x+y^2x-y^2z$

$$z^2y-z^2x+y^2x-y^2z \fallingdotseq x^2y-x^2z+y^2z-y^2x$$
$$z^2y-z^2x+y^2x-y^2z \fallingdotseq -(x^2y-x^2z+y^2z-y^2x)$$

よって，対称式でも交代式でもない

(12) a と b を交換すると，$(ba+1)(b+1)(a+1)+ba$

$$(ba+1)(b+1)(a+1)+ba=(ab+1)(a+1)(b+1)+ab$$

よって，対称式である

【3】(1)

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=4^2-2\cdot 1$$
$$=16-2=\mathbf{14}$$

(2)

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=4^3-3\cdot 1\cdot 4$$
$$=64-12=\mathbf{52}$$

＜別解＞

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=(x+y)(x^2+y^2-xy)$$
$$=4\cdot(14-1)=\mathbf{52}$$

(3)

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=4^2-4\cdot 1$$
$$=12$$

よって，$x-y=\boldsymbol{\pm 2\sqrt{3}}$

(4)

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$
$$=4\cdot(\pm 2\sqrt{3})$$
$$=\boldsymbol{\pm 8\sqrt{3}}$$

(5)

$$x^4+y^4=(x^2-y^2)^2+2x^2y^2$$
$$=(x^2-y^2)^2+2(xy)^2$$
$$=(\pm 8\sqrt{3})^2+2\cdot 1^2$$
$$=192+2\cdot 1^2$$
$$=\mathbf{194}$$

(6)

$$x^5+y^5$$
$$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$$
$$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$$
$$=14\cdot 52-1^2\cdot 4$$
$$=728-4=\mathbf{724}$$

【4】(1)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$
$$=4^2-2=\mathbf{14}$$

(2)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=4^3-3\cdot 4=64-12=\mathbf{52}$$

(3)

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\cdot x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$$
$$=4^2-4=16-4=12$$

よって，$x-\dfrac{1}{x}=\pm2\sqrt{3}$

ここで，$x>1$ より，$x-\dfrac{1}{x}>0$ なので，

$$x-\frac{1}{x}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

(4)

$$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=4\cdot2\sqrt{3}=\mathbf{8\sqrt{3}}$$

【5】(1)

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \\ &= 6^2-2\cdot 8 \\ &= 36-16=\mathbf{20} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= 6\cdot(20-8)+3\cdot 5 \\ &= 6\cdot 12+15=\mathbf{87} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= (xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy) \\ &= (xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z) \\ &= 8^2-2\cdot 5\cdot 6 \\ &= 64-60=\mathbf{4} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} x^4+y^4+z^4 &= (x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \\ &= 20^2-2\cdot 4 \\ &= 400-8=\mathbf{392} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{yz+zx+xy}{xyz} \\ &= \mathbf{\frac{8}{5}} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} &= \frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2} \\ &= \frac{4}{5^2}=\mathbf{\frac{4}{25}} \end{aligned}$$

【6】(1) $(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$ より，

$$\begin{aligned}3^2&=5+2(xy+yz+zx)\\2(xy+yz+zx)&=9-5\\2(xy+yz+zx)&=4\\xy+yz+zx&=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より，

$$\begin{aligned}15-3xyz&=3\cdot(5-2)\\3xyz&=15-9=6\\xyz&=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(3) $x+y+z=3$ より，

$$\begin{aligned}(3-x)(3-y)(3-z)&=(3-x)(9-3y-3z+yz)\\&=27-9y-9z+3yz-9x+3xy+3xz-xyz\\&=27-9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)-xyz\\&=27-9\cdot3+3\cdot2-2\\&=27-27+6-2\\&=\mathbf{4}\end{aligned}$$

【7】(1)

$$
\begin{aligned}
& xy + x - 3y - bx + 2ay + 2a + 3b - 2ab - 3 \\
=& x(y-b+1) - 3(y-b+1) + 2a(y-b+1) \\
=& \boldsymbol{(x+2a-3)(y-b+1)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
& x^2y - xy^2 - x^2z - xz^2 - y^2z + yz^2 + 2xyz \\
=& (y-z)x^2 - (y^2 - 2yz + z^2)x - y^2z + yz^2 \\
=& (y-z)x^2 - (y-z)^2x - yz(y-z) \\
=& (y-z)\{x^2 - (y-z)x - yz\} \\
=& (y-z)\{(x-y)(x+z)\} \\
=& \boldsymbol{(x-y)(y-z)(x+z)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
& (xy+1)(x+1)(y+1) + xy \\
=& (xy+1)(xy+x+y+1) + xy \\
=& x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy + xy + x + y + 1 + xy \\
=& x^2y^2 + x^2y + xy^2 + 3xy + x + y + 1 \\
=& y(y+1)x^2 + (y^2+3y+1)x + (y+1) \\
=& \{yx + (y+1)\}\{(y+1)x + 1\} \\
=& \boldsymbol{(xy+y+1)(xy+x+1)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
& (x+y)(y+z)(z+x) + xyz \\
=& (xy + xz + y^2 + yz)(z+x) + xyz \\
=& xyz + x^2y + xz^2 + x^2z + y^2z + y^2x + yz^2 + xyz + xyz \\
=& (y+z)x^2 + (y^2 + 3yz + z^2)x + y^2z + yz^2 \\
=& (y+z)x^2 + (y^2 + 3yz + z^2)x + yz(y+z) \\
=& \{(y+z)x + yz\}\{x + (y+z)\} \\
=& \boldsymbol{(yz+zx+xy)(x+y+z)}
\end{aligned}
$$

【8】(1) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ は3変数の対称式なので，$x+y$ が因数ならば $y+z$，$z+x$ も因数にもつ.

$$
\begin{aligned}
&(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\\
=&x^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^3+y^2z+z^2x+z^2y+z^3\\
&\quad+2x^2y+2xy^2+2xyz+2xyz+2y^2z+2yz^2+2zx^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+2xyz+2z^2x-x^3-y^3-z^3\\
=&3x^2y+3x^2z+3xy^2+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz\\
=&3(y+z)x^2+3(y^2+z^2+2yz)x+3yz(y+z)\\
=&3(y+z)x^2+3(y+z)^2x+3yz(y+z)\\
=&3(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}\\
=&\boldsymbol{3(y+z)(x+y)(x+z)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\\
=&a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc\\
=&(b+c)a^2+(2bc+b^2+c^2)a+(b^2c+bc^2)\\
=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)
\end{aligned}
$$

3変数の対称式なので，$b+c$ が因数ならば $a+b$，$c+a$ も因数にもつ．よって，

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\
&=\boldsymbol{(b+c)(a+b)(a+c)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(x+y)z^2+(y+z)x^2+(z+x)y^2+2xyz\\
=&xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2+xy^2+2xyz\\
=&(y+z)x^2+(z^2+y^2+2yz)x+yz^2+y^2z\\
=&(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)
\end{aligned}
$$

3変数の対称式なので，$y+z$ が因数ならば $x+y$，$z+x$ も因数にもつ．よって，

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}\\
&=\boldsymbol{(y+z)(x+y)(x+z)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc\\
=&a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc\\
=&ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+ba^2+ca^2+2abc+cb^2-4abc\\
=&(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2\\
=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)
\end{aligned}
$$

3 変数の対称式なので，$b+c$ が因数ならば，$a+b$，$c+a$ も因数にもつ．よって，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\
&= \boldsymbol{(b+c)(a+b)(a+c)}
\end{aligned}
$$

【9】

(1)

$$\begin{aligned} xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x) &= x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2 \\ &= x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+y^2z-yz^2 \\ &= x^2(y-z)-(y+z)(y-z)x+yz(y-z) \end{aligned}$$

交代式なので，$(x-y)(y-z)(z-x)$ を因数にもつ.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\} \\ &= (y-z)(x-z)(x-y) \\ &= \boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) &= a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b \\ &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c) \end{aligned}$$

交代式なので，$(b-c)(c-a)(a-b)$ を因数にもつ.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= \boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3) \\ =& xy^3-xz^3+yz^3-yx^3+zx^3-zy^3 \\ =& x(y^3-z^3)-x^3(y-z)-yz(y^2-z^2) \\ =& x(y-z)(y^2+yz+z^2)-x^3(y-z)-yz(y+z)(y-z) \\ =& (y-z)\{x(y^2+yz+z^2)-x^3-yz(y+z)\} \\ =& (y-z)\{xy^2+xyz+xz^2-x^3-y^2z-yz^2\} \\ =& (y-z)\{(x-y)z^2+(xy-y^2)z+xy^2-x^3\} \\ =& (y-z)\{(x-y)z^2+(xy-y^2)z-x(x^2-y^2)\} \\ =& (y-z)\{(x-y)z^2+(xy-y^2)z-x(x+y)(x-y)\} \\ =& (y-z)(x-y)\{z^2+yz-x^2-xy\} \\ =& (y-z)(x-y)\{z^2-x^2+y(z-x)\} \\ =& (y-z)(x-y)\{(z+x)(z-x)+y(z-x)\} \\ =& \boldsymbol{(y-z)(x-y)(z-x)(x+y+z)} \end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\
=&a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b\\
=&a^3(b-c)+bc(b^2-c^2)-a(b^3-c^3)\\
=&a^3(b-c)+bc(b+c)(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)\\
=&(b-c)\{a^3+bc(b+c)-a(b^2+bc+c^2)\}\\
=&(b-c)\{a^3+b^2c+bc^2-ab^2-abc-ac^2\}\\
=&(b-c)\{(b-a)c^2+(b^2-ab)c+a^3-ab^2\}\\
=&(b-c)\{(b-a)c^2+b(b-a)c-a(b+a)(b-a)\}\\
=&(b-c)(b-a)\{c^2+bc-a(b+a)\}\\
=&(b-c)(b-a)(c^2+bc-ab-a^2)\\
=&(b-c)(b-a)\{(c-a)b+(c+a)(c-a)\}\\
=&(b-c)(b-a)(c-a)(a+b+c)\\
=&\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}
\end{aligned}
$$

添削課題

【1】(1) $x^3+125=x^3+5^3=\boldsymbol{(x+5)(x^2-5x+25)}$

(2) $4x^5-32x^2=4x^2(x^3-8)=\boldsymbol{4x^2(x-2)(x^2+2x+4)}$

(3)
$$\begin{aligned} a^6+26a^3-27 &= (a^3-1)(a^3+27) \\ &= \boldsymbol{(a-1)(a^2+a+1)(a+3)(a^2-3a+9)} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} m^6-n^6 &= (m^3)^2-(n^3)^2 \\ &= (m^3-n^3)(m^3+n^3) \\ &= \boldsymbol{(m-n)(m^2+mn+n^2)(m+n)(m^2-mn+n^2)} \end{aligned}$$

＜別解＞

$$\begin{aligned} m^6-n^6 &= (m^2)^3-(n^2)^3 \\ &= (m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4) \\ &= (m^2-n^2)\left\{(m^2+n^2)^2-(mn)^2\right\} \\ &= \boldsymbol{(m-n)(m+n)(m^2-mn+n^2)(m^2+mn+n^2)} \end{aligned}$$

【2】(1)
$$\begin{aligned} a^3+b^3+1-3ab &= a^3+b^3+1^3-3\cdot a\cdot b\cdot 1 \\ &= \boldsymbol{(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b)} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 27a^3-36ab-b^3-64 &= (3a)^3+(-b)^3+(-4)^3-3\cdot 3a\cdot(-b)\cdot(-4) \\ &= \boldsymbol{(3a-b-4)(9a^2+b^2+16+3ab+12a-4b)} \end{aligned}$$

(3) $a-x=A,\ b-x=B$ とおくと，$a+b-2x=A+B$ だから，

$$\begin{aligned} \text{与式} &= A^3+B^3-(A+B)^3 \\ &= A^3+B^3-(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3) \\ &= -3A^2B-3AB^2 \\ &= -3AB(A+B) \\ &= \boldsymbol{-3(a-x)(b-x)(a+b-2x)} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x^3-6x^2+12x-8 &= x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3 \\ &= \boldsymbol{(x-2)^3} \end{aligned}$$

【3】(1)
$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$
$$=3^2+2=\mathbf{11}$$

(2)
$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=3\cdot(11+1)=\mathbf{36}$$

(3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} = 13$ だから,
$$x+\frac{1}{x}=\boldsymbol{\pm\sqrt{13}}$$

(4)
$$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3\cdot(\pm\sqrt{13})=\boldsymbol{\pm 3\sqrt{13}}$$

(5)
$$x^5-\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=11\cdot 36-3=\mathbf{393}$$

【4】 $\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ① \\ x^2+y^2+z^2=3 & \cdots ② \\ xyz=-1 & \cdots ③ \end{cases}$

(1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ に①，②を代入して

$$1=3+2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore\ xy+yz+zx=\frac{1-3}{2}=\mathbf{-1}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz \\ &= 1\cdot(3+1)+3\cdot(-1) \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (x+y)(y+z)(z+x) &= (1-z)(1-x)(1-y) \\ &= 1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz \\ &= 1-1-1+1=\mathbf{0} \end{aligned}$$

(4)

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

ここで,

$$\begin{aligned} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= (xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z) \\ &= (-1)^2-2\cdot(-1)\cdot 1=3 \end{aligned}$$

だから,

$$x^4+y^4+z^4=3^2-2\cdot 3=\mathbf{3}$$

３章　数と式（３）ー実数ー

問題

【1】(1) $|2.71| = \mathbf{2.71}$

(2) $|2-9| = |-7| = \mathbf{7}$

(3)
$$\begin{aligned}|-3.5| - 3|-1.5| &= 3.5 - 3\times 1.5\\ &= 3.5 - 4.5\\ &= \mathbf{-1}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

(5) $3-\sqrt{10}<0$ なので，

$$\begin{aligned}\left|3-\sqrt{10}\right| &= -(3-\sqrt{10})\\ &= \boldsymbol{\sqrt{10}-3}\end{aligned}$$

(6) $3-\pi<0$ なので，

$$\begin{aligned}|3-\pi| &= -(3-\pi)\\ &= \boldsymbol{\pi-3}\end{aligned}$$

【2】(1) (i) $-x \geqq 0$ のとき，
つまり，$x \leqq 0$ のとき，

$$|-x| = \boldsymbol{-x}$$

(ii) $-x<0$ のとき，
つまり，$x>0$ のとき，

$$|-x| = -(-x) = \boldsymbol{x}$$

(i)，(ii) より

$$|-x| = \begin{cases}\boldsymbol{-x} & (\boldsymbol{x \leqq 0}\ \textbf{のとき})\\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x > 0}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(2) (i) $7-x \geqq 0$ のとき，
つまり，$x \leqq 7$ のとき，

$$|7-x| = \boldsymbol{7-x}$$

(ii) $7-x<0$ のとき，
つまり，$x>7$ のとき

$$|7-x| = -(7-x) = \boldsymbol{-7+x}$$

(i)，(ii) より

$$|7-x| = \begin{cases}\boldsymbol{7-x} & (\boldsymbol{x \leqq 7}\ \textbf{のとき})\\ \boldsymbol{x-7} & (\boldsymbol{x > 7}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(3) (i) $2+x \geqq 0$ のとき，
つまり，$x \geqq -2$ のとき，

$$x+|2+x| = x+(2+x) = \boldsymbol{2+2x}$$

(ii) $2+x<0$ のとき，
つまり，$x<-2$ のとき

$$x+|2+x| = x-(2+x) = \boldsymbol{-2}$$

(i)，(ii) より

$$x+|2+x| = \begin{cases}\boldsymbol{2+2x} & (\boldsymbol{x \geqq -2}\ \textbf{のとき})\\ \boldsymbol{-2} & (\boldsymbol{x < -2}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(4)

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & (x+3 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq -3 \text{ のとき}) \\ -x-3 & (x+3 < 0,\ \text{すなわち},\ x < -3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって,

(i) $x < -3$ のとき,

$$\begin{aligned} |x| - |x+3| &= -x + (x+3) \\ &= -x + x + 3 \\ &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

(ii) $-3 \leqq x < 0$ のとき,

$$\begin{aligned} |x| - |x+3| &= -x - (x+3) \\ &= -x - x - 3 \\ &= \boldsymbol{-2x-3} \end{aligned}$$

(iii) $x \geqq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} |x| - |x+3| &= x - (x+3) \\ &= x - x - 3 \\ &= \boldsymbol{-3} \end{aligned}$$

(i)〜(iii) より,

$$|x| - |x+3| = \begin{cases} \mathbf{3} & (\boldsymbol{x < -3} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-2x-3} & (\boldsymbol{-3 \leqq x < 0} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-3} & (\boldsymbol{x \geqq 0} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(5)

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x-2 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ -x+2 & (x-2 < 0,\ \text{すなわち},\ x < 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & (x+1 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq -1 \text{ のとき}) \\ -x-1 & (x+1 < 0,\ \text{すなわち},\ x < -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $x < -1$ のとき,

$$\begin{aligned} |x-2| - 5|x+1| &= -(x-2) + 5(x+1) \\ &= -x + 2 + 5x + 5 \\ &= \boldsymbol{4x+7} \end{aligned}$$

(ii) $-1 \leqq x < 2$ のとき,

$$\begin{aligned} |x-2| - 5|x+1| &= -(x-2) - 5(x+1) \\ &= -x + 2 - 5x - 5 \\ &= \boldsymbol{-6x-3} \end{aligned}$$

(iii) $x \geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} |x-2| - 5|x+1| &= (x-2) - 5(x+1) \\ &= x - 2 - 5x - 5 \\ &= \boldsymbol{-4x-7} \end{aligned}$$

(i)〜(iii) より,

$$|x-2| - 5|x+1| = \begin{cases} \boldsymbol{4x+7} & (\boldsymbol{x < -1} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-6x-3} & (\boldsymbol{-1 \leqq x < 2} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-4x-7} & (\boldsymbol{x \geqq 2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

【3】(1) $$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|$$

$2<\sqrt{5}<3$ より，$\sqrt{5}-2>0$ だから，

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{5}-2}$$

(2) $$\sqrt{(2\pi-7)^2}-\sqrt{(\pi+1)^2}=|2\pi-7|-|\pi+1|$$

$6<2\pi<7$ より，$2\pi-7<0$ だから，

$$\begin{aligned}\sqrt{(2\pi-7)^2}-\sqrt{(\pi+1)^2}&=|2\pi-7|-|\pi+1|\\&=-(2\pi-7)-(\pi+1)\\&=-2\pi+7-\pi-1\\&=\boldsymbol{-3\pi+6}\end{aligned}$$

(3) $$\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$$

(i) $2x-1\geqq 0$，すなわち $x\geqq\frac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(2x-1)^2}&=|2x-1|\\&=\boldsymbol{2x-1}\end{aligned}$$

(ii) $2x-1<0$，すなわち $x<\frac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(2x-1)^2}&=|2x-1|\\&=-(2x-1)\\&=\boldsymbol{-2x+1}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，

$$\sqrt{(2x-1)^2}=\begin{cases}\boldsymbol{2x-1} & \left(\boldsymbol{x\geqq\frac{1}{2}}\text{のとき}\right)\\ \boldsymbol{-2x+1} & \left(\boldsymbol{x<\frac{1}{2}}\text{のとき}\right)\end{cases}$$

(4) $$\sqrt{9x^2-6x+1}=\sqrt{(3x-1)^2}=|3x-1|$$

(i) $3x-1\geqq 0$，すなわち $x\geqq\frac{1}{3}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2-6x+1}&=|3x-1|\\&=\boldsymbol{3x-1}\end{aligned}$$

(ii) $3x-1<0$，すなわち $x<\frac{1}{3}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2-6x+1}&=|3x-1|\\&=-(3x-1)\\&=\boldsymbol{-3x+1}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，

$$\sqrt{9x^2-6x+1}=\begin{cases}\boldsymbol{3x-1} & \left(\boldsymbol{x\geqq\frac{1}{3}}\text{のとき}\right)\\ \boldsymbol{-3x+1} & \left(\boldsymbol{x<\frac{1}{3}}\text{のとき}\right)\end{cases}$$

(5) $$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-3|-|x+3|$$

であり，

$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & (x-3\geqq 0,\ \text{すなわち},\ x\geqq 3\ \text{のとき}) \\ -x+3 & (x-3<0,\ \text{すなわち},\ x<3\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases} x+3 & (x+3\geqq 0,\ \text{すなわち},\ x\geqq -3\ \text{のとき}) \\ -x-3 & (x+3<0,\ \text{すなわち},\ x<-3\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(i) $x<-3$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=|x-3|-|x+3|\\&=-(x-3)+(x+3)\\&=-x+3+x+3\\&=\mathbf{6}\end{aligned}$$

(ii) $-3\leqq x<3$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=|x-3|-|x+3|\\&=-(x-3)-(x+3)\\&=-x+3-x-3\\&=\boldsymbol{-2x}\end{aligned}$$

(iii) $x\geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=|x-3|-|x+3|\\&=(x-3)-(x+3)\\&=x-3-x-3\\&=\boldsymbol{-6}\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，

$$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=\begin{cases} \mathbf{6} & (\boldsymbol{x<-3}\ \textbf{のとき}) \\ \boldsymbol{-2x} & (\boldsymbol{-3\leqq x<3}\ \textbf{のとき}) \\ \boldsymbol{-6} & (\boldsymbol{x\geqq 3}\ \textbf{のとき}) \end{cases}$$

(6)
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=\sqrt{(x-5)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}\\&=|x-5|-|2x-1|\end{aligned}$$

であり,

$$|x-5|=\begin{cases}x-5 & (x-5\geqq 0,\ \text{すなわち},\ x\geqq 5\text{のとき})\\-x+5 & (x-5<0,\ \text{すなわち},\ x<5\text{のとき})\end{cases}$$

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \left(2x-1\geqq 0,\ \text{すなわち},\ x\geqq \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)\\-2x+1 & \left(2x-1<0,\ \text{すなわち},\ x<\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)\end{cases}$$

(i) $x<\dfrac{1}{2}$ のとき,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=|x-5|-|2x-1|\\&=-(x-5)+(2x-1)\\&=-x+5+2x-1\\&=\boldsymbol{x+4}\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq x<5$ のとき,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=|x-5|-|2x-1|\\&=-(x-5)-(2x-1)\\&=-x+5-2x+1\\&=\boldsymbol{-3x+6}\end{aligned}$$

(iii) $x\geqq 5$ のとき,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=|x-5|-|2x-1|\\&=(x-5)-(2x-1)\\&=x-5-2x+1\\&=\boldsymbol{-x-4}\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より,

$$\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\begin{cases}\boldsymbol{x+4} & \left(\boldsymbol{x<\dfrac{1}{2}}\textbf{のとき}\right)\\\boldsymbol{-3x+6} & \left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq x<5}\textbf{のとき}\right)\\\boldsymbol{-x-4} & (\boldsymbol{x\geqq 5}\textbf{のとき})\end{cases}$$

【4】(1)
$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3&=(\sqrt{3})^3+3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3\\&=3\sqrt{3}+9\sqrt{5}+15\sqrt{3}+5\sqrt{5}\\&=\boldsymbol{18\sqrt{3}+14\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-1)^3&=(\sqrt{3})^3-3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2-1^3\\&=3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1\\&=\boldsymbol{6\sqrt{3}-10}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+2)^3&=(\sqrt{2})^3+3\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 2+3\cdot\sqrt{2}\cdot 2^2+2^3\\&=2\sqrt{2}+12+12\sqrt{2}+8\\&=\boldsymbol{14\sqrt{2}+20}\end{aligned}$$

(4) $(3\sqrt{2}+1)^3 = (3\sqrt{2})^3 + 3\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot 1 + 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1^2 + 1^3$
$= 54\sqrt{2} + 54 + 9\sqrt{2} + 1$
$= \mathbf{63\sqrt{2} + 55}$

(5) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$
$=(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$
$=2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$
$=\mathbf{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}}$

(6) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$
$=(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3}) + 2\cdot(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$
$=2+3+5-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}$
$=\mathbf{10-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}}$

【5】(1) $\sqrt{11+2\sqrt{30}} = \sqrt{(6+5)+2\sqrt{6\cdot 5}}$
$= \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2}$
$= |\sqrt{6}+\sqrt{5}|$
$= \mathbf{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$
$=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot 3}}$
$=\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}$
$=|\sqrt{4}-\sqrt{3}|$
$=\sqrt{4}-\sqrt{3}$
$=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$
$=\sqrt{11+2\sqrt{28}}$
$=\sqrt{(7+4)+2\sqrt{7\cdot 4}}$
$=\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{4})^2}$
$=|\sqrt{7}+\sqrt{4}|$
$=\mathbf{\sqrt{7}+2}$

(4) $\sqrt{3+\sqrt{8}}$
$=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
$=\sqrt{(2+1)+2\sqrt{2\cdot 1}}$
$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{1})^2}$
$=|\sqrt{2}+\sqrt{1}|$
$=\mathbf{\sqrt{2}+1}$

(5) $\sqrt{17+3\sqrt{32}}$
$=\sqrt{17+\sqrt{288}}$
$=\sqrt{17+2\sqrt{72}}$
$=\sqrt{(9+8)+2\sqrt{9\cdot 8}}$
$=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2}$
$=|\sqrt{9}+\sqrt{8}|$
$=\mathbf{3+2\sqrt{2}}$

(6)

$$\begin{aligned}\sqrt{3+\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{(5+1)+2\sqrt{5\cdot 1}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{1})^2}{2}}\\ &= \frac{\left|\sqrt{5}+\sqrt{1}\right|}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

【6】

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\\ &= \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}\\ &= 9+4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\\ &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}\\ &= 9-4\sqrt{5}\end{aligned}$$

(1)
$$\begin{aligned}x+y &= (9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})\\ &= \mathbf{18}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}xy &= (9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})\\ &= 81-80 = \mathbf{1}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy\\ &= 18^2-2\cdot 1\\ &= 324-2 = \mathbf{322}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{x} &= \frac{x^2+y^2}{xy}\\ &= \frac{322}{1} = \mathbf{322}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y)\\ &= 18^3-3\cdot 1\cdot 18\\ &= 5832-54 = \mathbf{5778}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\ &= (x^2+y^2)^2-2(xy)^2\\ &= 322^2-2\cdot 1^2\\ &= 103684-2 = \mathbf{103682}\end{aligned}$$

【7】

$$\begin{aligned}x &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= 7-4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\\ &= 7+4\sqrt{3}\end{aligned}$$

(1)
$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x} &= (7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})\\ &= \mathbf{14}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}x-\frac{1}{x} &= (7-4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3})\\ &= \mathbf{-8\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}\\ &= 14^2-2\\ &= 196-2 = \mathbf{194}\end{aligned}$$

(4)
$$
\begin{aligned}
&x^3+\frac{1}{x^3}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
=&14^3-3\cdot 14\\
=&2744-42=\mathbf{2702}
\end{aligned}
$$

(5)
$$
\begin{aligned}
x^3-\frac{1}{x^3}&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\\
&=(-8\sqrt{3})^3+3\cdot(-8\sqrt{3})\\
&=-1536\sqrt{3}-24\sqrt{3}\\
&=\mathbf{-1560\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(6) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2$ より，

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\\
=&x+\frac{1}{x}+2\\
=&14+2=16
\end{aligned}
$$

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ より，

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\mathbf{4}$$

【8】(1)
$$\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{3}}\times\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ より，

$$
\begin{aligned}
-2\ &<\ -\sqrt{3}\ <\ -1\\
3-2&<3-\sqrt{3}<-1+3\\
1\ &<3-\sqrt{3}<\ 2
\end{aligned}
$$

なので，$\frac{6}{3+\sqrt{3}}$ の整数部分 a は，$a=\mathbf{1}$

(2) 整数部分 $a=1$ なので，

$$b=\frac{6}{3+\sqrt{3}}-1=(3-\sqrt{3})-1=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\mathbf{2+\sqrt{3}}$$

(3)
$$\begin{aligned} a^2+3ab+b^2 &= (a+b)^2+ab \\ &= (3-\sqrt{3})^2+1\cdot(2-\sqrt{3}) \\ &= (3-\sqrt{3})^2+2-\sqrt{3} \\ &= 9-6\sqrt{3}+3+2-\sqrt{3} \\ &= \mathbf{14-7\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} (a+b-1)^3 &= (3-\sqrt{3}-1)^3 \\ &= (2-\sqrt{3})^3 \\ &= 2^3-3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3 \\ &= 8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3} \\ &= \mathbf{26-15\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} b^2+\frac{1}{b^2} &= \left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2\cdot b\cdot\frac{1}{b} \\ &= \left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2 \\ &= (2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2-2 \\ &= 4^2-2 \\ &= 16-2 \\ &= \mathbf{14} \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} \frac{1}{b^3}-b^3 &= \left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{b^2}+b\cdot\frac{1}{b}+b^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{b^2}+1+b^2\right) \\ &= \left\{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\right\}(14+1) \\ &= 2\sqrt{3}\times 15 \\ &= \mathbf{30\sqrt{3}} \end{aligned}$$

添削課題

【1】(1)

$$|x+3|=\begin{cases} x+3 & (x+3\geqq 0,\ \text{すなわち}, x\geqq -3\ \text{のとき}) \\ -x-3 & (x+3<0,\ \text{すなわち}, x<-3\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x-2\geqq 0,\ \text{すなわち}, x\geqq 2\ \text{のとき}) \\ -x+2 & (x-2<0,\ \text{すなわち}, x<2\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(i) $x\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}|x+3|-|x-2| &= (x+3)-(x-2) \\ &= \mathbf{5}\end{aligned}$$

(ii) $-3\leqq x<2$ のとき

$$\begin{aligned}|x+3|-|x-2| &= (x+3)+(x-2) \\ &= \mathbf{2x+1}\end{aligned}$$

(iii) $x<-3$ のとき

$$\begin{aligned}|x+3|-|x-2| &= -(x+3)+(x-2) \\ &= \mathbf{-5}\end{aligned}$$

(i)～(iii) より,

$$|x+3|-|x-2|=\begin{cases} \mathbf{5} & (\boldsymbol{x\geqq 2}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{2x+1} & (\boldsymbol{-3\leqq x<2}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-5} & (\boldsymbol{x<-3}\ \textbf{のとき}) \end{cases}$$

(2) ①

$$\begin{aligned}(3-2\sqrt{3})^3 &= 3^3-3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{3}+3\cdot 3\cdot(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^3 \\ &= 27-54\sqrt{3}+108-24\sqrt{3} \\ &= \mathbf{135-78\sqrt{3}}\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 &= 2+3+5-2\sqrt{6}-2\sqrt{10}+2\sqrt{15} \\ &= \mathbf{10-2\sqrt{6}-2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}\end{aligned}$$

【2】$(9+4\sqrt{5})^n=A,\ (9-4\sqrt{5})^n=B$ とおくと,

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (A+B)^2-(A-B)^2=4AB \\ &= 4(9+4\sqrt{5})^n(9-4\sqrt{5})^n \\ &= 4\{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})\}^n \\ &= 4\cdot(81-80)^n=4\cdot 1^n=\mathbf{4}\end{aligned}$$

【3】 $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

ここで，$1<\sqrt{3}<2$ より，

$$1<\sqrt{3}<2$$
$$2<\sqrt{3}+1<3$$
$$\therefore\ 1<\frac{\sqrt{3}+1}{2}<\frac{3}{2}$$

したがって，$\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ の整数部分 a は，$a=1$.

小数部分 b は，$b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

よって，$a+b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$a-b=1-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}&=\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{2(3-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{2\cdot 4}{\sqrt{3}\cdot(3-1)}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

【4】 $x-2=\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2=a+\dfrac{1}{a}$

また，

$$x^2-4x=(x-2)^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$
$$\therefore\ \sqrt{x^2-4x}=\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

したがって，$a\geqq\dfrac{1}{a}$ $(a>0)$ のとき，すなわち，$1\leqq a$ のとき

$$x-2+\sqrt{x^2-4x}=a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}=\boldsymbol{2a}$$

$a<\dfrac{1}{a}$ $(a>0)$ のとき，すなわち，$0<a<1$ のとき

$$x-2+\sqrt{x^2-4x}=a+\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{a}}$$

3MJS/3MJ
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	