P3J

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理

４章　ケプラー運動：角運動量・中心力

問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) $m \cdot l{\omega_1}^2 = T \quad \cdots ①$

(イ) $0 = T - Mg \quad \cdots ②$

(ウ) ①，②より T を消去すると，

$$m \cdot l{\omega_1}^2 = Mg \qquad \therefore \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{Mg}{ml}}$$

(エ) 面積速度が一定 (あるいは角運動量の保存) より，

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}\omega_2 = l \cdot l\omega_1 \qquad \therefore \quad \omega_2 = 4 \times \omega_1$$

(オ) 張力の大きさを T' とすると，A の運動方程式の向心成分より，

$$T' = m \cdot \frac{l}{2}{\omega_2}^2 = 8 \times Mg$$

(カ) B を引き下げる前・後の A の運動エネルギーを K_1，K_2 とすると，

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{2}m(l\omega_1)^2 = \dfrac{1}{2}Mgl \\ K_2 = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{l}{2}\omega_2\right)^2 = 2Mgl \end{cases} \qquad \therefore \quad K_2 - K_1 = \frac{3}{2}Mgl$$

(キ) $-Mg \cdot \dfrac{l}{2}$

(ク) 外部から与えた仕事 W が，この系の力学的エネルギーの変化と一致するので，

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{2}Mgl + \left(-\frac{1}{2}Mgl\right) \\ &= Mgl \end{aligned}$$

【2】

《解答》

(1) $f = G\dfrac{mM}{r^2}$

(2) 地表と点 A での重力を万有引力として表すと，

$$\begin{cases} mg = G\dfrac{mM}{R^2} \\ mg' = G\dfrac{mM}{r^2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{g'}{g} = \frac{R^2}{r^2}$$

(3) $m\dfrac{{v_\mathrm{A}}^2}{r} = G\dfrac{mM}{r^2}$

(4) g を用いると $GM = gR^2$ と表せる．これと (3) より，

$$m\frac{{v_\mathrm{A}}^2}{r} = \frac{m \cdot gR^2}{r^2} \qquad \therefore \quad r = \frac{gR^2}{{v_\mathrm{A}}^2}$$

このとき，地表からの高さは，

$$\begin{aligned} h &= \frac{gR^2}{{v_\mathrm{A}}^2} - R \\ &= \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{(7.2 \times 10^3)^2} - 6.4 \times 10^6 \fallingdotseq 1.3 \times 10^6\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(5) $E_\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 - G\dfrac{mM}{r}$ (無限遠を位置エネルギーの基準とした)

(6) $\dfrac{1}{2}rv_\mathrm{A}$

(7) ケプラーの第 2 法則より，

$$\frac{1}{2}rv_\mathrm{A} = \frac{1}{2}nr \cdot v_\mathrm{B} \qquad \therefore \quad v_\mathrm{B} = \frac{v_\mathrm{A}}{n}$$

(8) エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 - G\frac{mM}{nr} \qquad \therefore \quad {v_\mathrm{A}}^2 - \frac{2GM}{r} = {v_\mathrm{B}}^2 - \frac{2GM}{nr}$$

これと (7) より，

$${v_\mathrm{A}}^2 - \frac{2GM}{r} = \left(\frac{v_\mathrm{A}}{n}\right)^2 - \frac{2GM}{nr} \qquad \therefore \quad v_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2nGM}{(n+1)r}}$$

(9) (8) で $n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2GM}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)r}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

【3】

《解答》

(1) 無限遠方を基準とした万有引力による位置エネルギーを用いると，

$$E = \frac{m}{2}v^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right)$$

また，面積速度が s なので，

$$s = \frac{1}{2}rv\sin\theta \qquad \therefore \quad v = \frac{2s}{r\sin\theta}$$

これらより，v を消去すると，

$$E = \frac{2ms^2}{r^2\sin^2\theta} - G\frac{Mm}{r}$$

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ となる近地点または遠地点で，$r = x$ とすると，

$$E = \frac{2ms^2}{x^2} - \frac{GMm}{x} \qquad \therefore \quad Ex^2 + GMmx - 2ms^2 = 0 \quad \cdots ①$$

これを解いて，

$$x = \frac{1}{2E}\left\{-GMm \pm \sqrt{(GMm)^2 + 8Ems^2}\right\}$$

この解の一方が r_1，他方が r_2 であり，これらはともに正であることから $E < 0$ と分かる．よって，複号 $-$ の解が遠地点，複号 $+$ の解が近地点に対応し，

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{2E}\left\{-GMm + \sqrt{(GMm)^2 + 8Ems^2}\right\} \\ r_2 = \dfrac{1}{2E}\left\{-GMm - \sqrt{(GMm)^2 + 8Ems^2}\right\} \end{cases}$$

(3) 面積速度が s で一定より，

$$T = \frac{\pi ab}{s} \qquad \therefore \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{as^2} \quad \cdots ②$$

一方，問題文の右下図より，幾何学的関係として，

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ b^2 = a^2 - (a - r_1)^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a = \dfrac{r_1 + r_2}{2} \\ b = \sqrt{r_1 r_2} \end{cases}$$

さらに，① の解と係数の関係より，

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{GmM}{E} \quad \cdots ③ \\ r_1 r_2 = -\dfrac{2ms^2}{E} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a = -\dfrac{GmM}{2E} \\ b = \sqrt{-\dfrac{2ms^2}{E}} \end{cases}$$

これらと ② より，

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{\pi^2\cdot\left(-\dfrac{2ms^2}{E}\right)}{-\dfrac{GmM}{2E}\cdot s^2}=\frac{4\pi^2}{GM}\quad\cdots b,\ E,\ s,\ m\text{ によらない.}$$

(4) 近地点での速さを v_1 とすると，

$$\frac{1}{2}r_1v_1=s\qquad\therefore\quad v_1=\frac{2s}{r_1}$$

一方，半径 r_1 の円運動の速さを $v_1{}'$ とすると，運動方程式の向心成分は，

$$m\frac{v_1{}'^2}{r_1}=G\frac{mM}{r_1{}^2}\qquad\therefore\quad v_1{}'=\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

ここで ③ を書き換えると，$E=-G\dfrac{mM}{r_1+r_2}$ となるので，r_1 を変えずに r_2 を減少させたとき E は減少する．撃力を加える前後で位置エネルギーは不変なので，運動エネルギーが減少して $v_1{}'<v_1$ となることが分かる．よって，力積は速度と逆向きで，運動量変化と力積の関係より，

$$\begin{aligned}|I|&=|(\pm mv_1{}')-mv_1|\\&=m\left(\frac{2s}{r_1}\mp\sqrt{\frac{GM}{r_1}}\right)\end{aligned}$$

ここで複号の $-$ は回転の向きが変わらない場合に，複号の $+$ は回転の向きが反対になる場合に対応する．

(5) 力積の向きが速度と垂直の場合は，動径に垂直な方向の速度成分は変化しない．よって，面積速度も変化しない．

【4】

《ポイント》

根本となる式は，エネルギー保存則と角運動量保存則 (面積速度一定) である．物体の軌道 (楕円，放物線，双曲線) の定量的予言は行わないゆえ (大学課程にゆずる)，この 2 つの保存則で問題を解決する．

《解答》

問 1　位置エネルギーの符号に注意して，エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 + k\frac{Qq}{r_\mathrm{B}} = \text{全エネルギー}$$

問 2　点 A における速度の動径 $\mathrm{F_1A}$ に垂直な成分は $v_\mathrm{A}\sin\alpha$ であるから，面積速度は，

$$\frac{1}{2}r_\mathrm{A}v_\mathrm{A}\sin\alpha$$

問 3　q_-，q_+ の無限遠における面積速度が等しいから，第 2 法則より，点 A，B における面積速度も等しい．よって，

$$\frac{1}{2}r_\mathrm{A}v_\mathrm{A}\sin\alpha = \frac{1}{2}r_\mathrm{B}v_\mathrm{B}\sin\beta = \frac{1}{2}r_\mathrm{B}v_\mathrm{B}\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}r_\mathrm{B}v_\mathrm{B}\sin\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{v_\mathrm{A}}{v_\mathrm{B}} = \frac{r_\mathrm{B}}{r_\mathrm{A}}$$

問 4　q_-，q_+ について，無限遠における運動エネルギーは等しいので，全エネルギーは等しい．すなわち，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 - k\frac{Qq}{r_\mathrm{A}} = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 + k\frac{Qq}{r_\mathrm{B}}$$

上式と問 3 の結果より v_B を消去すると，A 点での運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 = \frac{kQqr_\mathrm{B}}{r_\mathrm{A}(r_\mathrm{B} - r_\mathrm{A})}$$

よって，改めて q_- のエネルギー保存則を考えると，全エネルギーは，

$$\text{全エネルギー} = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 - k\frac{Qq}{r_\mathrm{A}} = k\frac{Qq}{r_\mathrm{B} - r_\mathrm{A}}$$

問 5　問 4 の結果より，v_A について解くと，

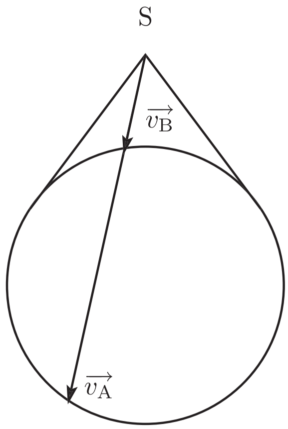
$$v_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2kQq}{m}\cdot\frac{r_\mathrm{B}}{r_\mathrm{A}(r_\mathrm{B} - r_\mathrm{A})}} \qquad \therefore \quad ([\quad]\text{の中}) = \sqrt{\frac{r_\mathrm{B}}{r_\mathrm{A}(r_\mathrm{B} - r_\mathrm{A})}}$$

問 6　問 3，問 5 より，

$$v_\mathrm{A}v_\mathrm{B} = \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A}}^2 = \frac{2kQq}{m(r_\mathrm{B} - r_\mathrm{A})}$$

問 7　$v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}$ が最小になるのは，q_-，q_+ が対称な無限遠点 (X，V) または (Y，U) にあるときであり，最小値は 0 である．

また，定点からの距離の積が一定であるような点は円を描くから，$\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{v_{\mathrm{B}}}$ の始点を S にそろえたときに，$v_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{B}}$ が一定であるような $\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{v_{\mathrm{B}}}$ の始点の描く図形は円である．



以上より

$$0 \cdots\cdots (7a) \qquad 円 \cdots\cdots (7b)$$

添削課題

《解答》

(1) おもりが台に乗ったままと仮定し，おもりが台から受ける抗力を N，糸の張力を T とすると，おもりと質点の運動方程式は，

$$\begin{cases} M\cdot 0 = N + T - Mg \\ m\dfrac{{v_0}^2}{b} = T \end{cases} \qquad \therefore \quad N = Mg - m\frac{{v_0}^2}{b}$$

$v_0 = u_1$ のとき，おもりが台から離れる限界で $N = 0$ となるので，

$$Mg - m\frac{{u_1}^2}{b} = 0 \qquad \therefore \quad u_1 = \sqrt{\frac{M}{m}gb}$$

(2) おもりが台から高さ z まで上昇したときの質点の角速度を ω として，角運動量の保存とエネルギーの保存より，

$$\begin{cases} mbv_0 = m(b+z)^2\omega \qquad \therefore \quad \omega = \dfrac{bv_0}{(b+z)^2} \\ \dfrac{m}{2}\{v^2 + (b+z)^2\omega^2\} + \dfrac{M}{2}v^2 + Mgz = \dfrac{m}{2}{v_0}^2 \end{cases}$$

これらより，ω を消去すると，

$$\frac{m+M}{2}v^2 + \frac{m}{2}{v_0}^2\cdot\left(\frac{b}{b+z}\right)^2 + Mgz = \frac{m}{2}{v_0}^2$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{1}{m+M}\left[m{v_0}^2\left\{1-\left(\frac{b}{b+z}\right)^2\right\} - 2Mgz\right]}$$

(3) $v_0 = u_2$ のとき，おもりが水平面に達する限界で，$z = s$ において $v = 0$ となるので，

$$m{u_2}^2\left\{1-\left(\frac{b}{b+s}\right)^2\right\} - 2Mgs = 0 \qquad \therefore \quad u_2 = \sqrt{\frac{2(b+s)^2}{2b+s}\cdot\frac{M}{m}g}$$

配点

100 点

(1)，(3) →各 30 点　(2) → 40 点

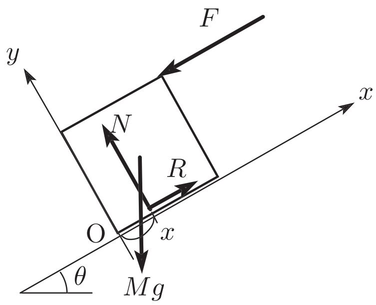
５章　剛体の運動

問題

■演習

【1】

《解答》



(1)　斜面から直方体に働く垂直抗力を N[N]，摩擦力を R[N]，直方体の左下端から抗力の作用点までの距離を x[m] とする．静止を保つときの力のつり合いより，

$$R = Mg\sin\theta, \qquad N = Mg\cos\theta$$

また，O のまわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0 = Nx - Mg\cos\theta\cdot\frac{b}{2} + Mg\sin\theta\cdot\frac{h}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\dfrac{Mg}{2}(b\cos\theta - h\sin\theta)}{Mg\cos\theta}$$

(イ) 抗力が底面内で作用して，直方体が倒れ始めないための条件 $x \geqq 0$ より，

$$b\cos\theta - h\sin\theta \geqq 0 \qquad \therefore \quad \tan\theta \leqq \frac{b}{h}$$

(ロ) 滑り始めないための条件 $R \leqq \mu N$ より，

$$Mg\sin\theta \leqq \mu Mg\cos\theta \qquad \therefore \quad \tan\theta \leqq \mu$$

(2)　直方体の加速度の斜面下向き成分を a として，運動方程式は，

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - \mu' N \\ M\cdot 0 = N - Mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore \quad Ma = Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta$$

ここでは $\tan\theta = \mu$ なので，

$$\sin\theta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

以上より，

$$Ma = Mg\cdot\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} - \mu' Mg\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad \therefore \quad a = \frac{\mu-\mu'}{\sqrt{1+\mu^2}}g$$

直方体はこの加速度を保って滑り下りていく．

(3)　静止を保つときの運動方程式は，

$$\begin{cases} 0 = Mg\sin\theta + F - R \\ 0 = N - Mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} R = Mg\sin\theta + F \\ N = Mg\cos\theta \end{cases}$$

また，O のまわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0 = Nx - Mg\cos\theta\cdot\frac{b}{2} + Mg\sin\theta\cdot\frac{h}{2} + Fh$$

$$\therefore \quad x = \frac{\dfrac{Mg}{2}(b\cos\theta - h\sin\theta) - Fh}{Mg\cos\theta}$$

(ハ) 直方体が倒れ始めないための条件 $x \geqq 0$ より，

$$F \leqq \frac{Mg}{2}\left(\frac{b}{h}\cos\theta - \sin\theta\right)$$

(ニ) 滑り始めないための条件が $R \leqq \mu N$ なので，滑り出してしまうための条件は形式上 $R > \mu N$ として与えられ，

$$Mg\sin\theta + F > \mu Mg\cos\theta \qquad \therefore \quad F > Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)$$

(ホ) 倒れ始めることなく滑り出させるような F が存在するための条件は，

$$Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) < \frac{Mg}{2}\left(\frac{b}{h}\cos\theta - \sin\theta\right) \qquad \therefore \quad \tan\theta > 2\mu - \frac{b}{h}$$

【2】

《解答》

右，左の各ローラーから板に働く垂直抗力を順に N_1，N_2 として，力のつりあいより，

$$0 = N_1 + N_2 - Mg \qquad \therefore \quad N_1 + N_2 = Mg \quad \cdots (*)$$

また，板の重心の座標が x のとき，重心のまわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0 = (l - x)N_1 - (l + x)N_2$$

これらより，ひもの有無によらずに，

$$N_1 = \frac{l + x}{2l}Mg, \qquad N_2 = \frac{l - x}{2l}Mg$$

(1) $x = d$ で静止を保つとき，運動方程式の x 成分は，

$$0 = T + \mu \cdot \frac{l - d}{2l}Mg - \mu \cdot \frac{l + d}{2l}Mg \qquad \therefore \quad T = \frac{\mu d}{l}Mg$$

(2) 板の重心座標が x のとき，運動方程式の x 成分は，

$$M\ddot{x} = \mu \cdot \frac{l - x}{2l}Mg - \mu \cdot \frac{l + x}{2l}Mg \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{\mu g}{l}x$$

よって運動は単振動で，

$$\begin{cases} \text{角振動数 } \omega = \sqrt{\dfrac{\mu g}{l}} \\ \text{振動中心 } x_0 = 0 \end{cases}$$

初期条件は $x(0) = d$，$\dot{x}(0) = 0$ なので，

$$x(t) = d\cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t\right)$$

(3) (2) より，速度の x 成分は，

$$\dot{x}(t) = -d\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t\right)$$

よって，$x = 0$ を右から左に通過する瞬間の速さは，

$$v_0 = \left|-d\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\right| = d\sqrt{\frac{\mu g}{l}}$$

(4) 運動エネルギー変化と仕事の関係より，

$$0 - \frac{M}{2}{v_0}^2 = -\mu(N_1 + N_2)\Delta d$$

v_0 を代入して $(*)$ を用いると，

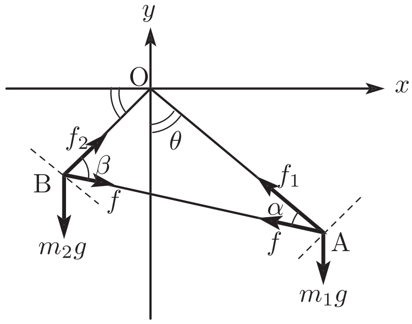
$$-\frac{M}{2} \cdot \frac{\mu g d^2}{l} = -\mu Mg \cdot \Delta d \qquad \therefore \quad \Delta d = \frac{d^2}{2l}$$

(5) $x = -d$ のとき $\dot{x} = 0$ なので，このときローラーを止めると，板とローラーの間のすべりはなくなる．よって，新たに板を動かす力は作用せず，板は $x = -d$ に静止を続ける．

【3】

《解答》

OA が $-y$ 方向となす角を反時計まわりを正として θ とすると，OB が $-x$ 方向となす角も θ と表せる．また，各おもりに働く力は一例として右図のように f_1，f_2，f とおける．ここで薄い板の各辺を棒とみなして質量を無視する近似を用いた．図の角 α，β を用いると，各おもりの運動方程式の接線成分は，



$$\begin{cases} m_1 \cdot a\ddot{\theta} = -m_1 g \sin\theta - f\sin\alpha & \cdots ① \\ m_2 \cdot b\ddot{\theta} = +m_2 g\cos\theta + f\sin\beta & \cdots ② \end{cases}$$

ここで $\dot{\theta} = \omega$ と表し，$a\sin\alpha = b\sin\beta$ に注意すると，① $\times\, a +$ ② $\times\, b$ より，

$$(m_1 a^2 + m_2 b^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -m_1 g a\sin\theta + m_2 g b\cos\theta \quad \cdots ③$$

(1) $\theta = \theta_0$ のとき，③で $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$ より，

$$0 = -m_1 g a \sin\theta_0 + m_2 g b\cos\theta_0 \qquad \therefore \quad \tan\theta_0 = \frac{m_2 b}{m_1 a} \quad \cdots ④$$

このとき，A および B の座標は，

$$\mathrm{A}(a\sin\theta_0, -a\cos\theta_0), \qquad \mathrm{B}(-b\cos\theta_0,\ -b\sin\theta_0)$$

ここで，④ より，

$$\sin\theta_0 = \frac{m_2 b}{\sqrt{(m_1 a)^2 + (m_2 b)^2}}, \qquad \cos\theta_0 = \frac{m_1 a}{\sqrt{(m_1 a)^2 + (m_2 b)^2}}$$

以上より，重心の座標は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{G}} = \dfrac{m_1 a\sin\theta_0 + m_2(-b\cos\theta_0)}{m_1 + m_2} = 0 \\ y_{\mathrm{G}} = \dfrac{m_1(-a\cos\theta_0) + m_2(-b\sin\theta_0)}{m_1 + m_2} = -\dfrac{\sqrt{(m_1 a)^2 + (m_2 b)^2}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

(2) ③ で $I = m_1 a^2 + m_2 b^2$ とおくと，

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -m_1 g a\sin\theta + m_2 g b\cos\theta$$

$\omega = \dot{\theta}$ をかけて整理すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I}{2}\omega^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1 g a\cos\theta + m_2 g b\sin\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I}{2}\omega^2 - m_1 g a\cos\theta - m_2 g b\sin\theta\right) = 0$$

初期条件は $\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$，$\omega(0) = 0$ なので，

$$\frac{I}{2}\omega^2 - m_1 g a\cos\theta - m_2 g b\sin\theta = -m_2 g b \quad \cdots ⑤$$

ここで④を用いて，左辺の位置エネルギーを整理すると，

$$\begin{aligned} U(\theta) &= -m_1 g a\cos\theta - m_2 g b\sin\theta \\ &= -g\sqrt{(m_1a)^2 + (m_2b)^2}\cdot(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0) \\ &= -g\sqrt{(m_1a)^2 + (m_2b)^2}\cos(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

位置エネルギー U が最小となる $\theta = \theta_0$ のとき運動エネルギー $\dfrac{I}{2}\omega^2$ は最大となり，A の速さも最大となるので，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{m}} = a\sin\theta_0 = \dfrac{m_2 ab}{\sqrt{(m_1a)^2 + (m_2b)^2}} \\[2ex] y_{\mathrm{m}} = -a\cos\theta_0 = -\dfrac{m_1 a^2}{\sqrt{(m_1a)^2 + (m_2b)^2}} \end{cases}$$

(3) ⑤ で $\theta = 0$ のとき，$|\omega| = \omega_0$ とすると，

$$\frac{I}{2}{\omega_0}^2 - m_1 g a = -m_2 g b \qquad \therefore\quad \frac{I}{2}{\omega_0}^2 = (m_1 a - m_2 b)g \quad \cdots ⑥$$

A が $\theta = 0$ の位置を通過するとき $\dfrac{I}{2}{\omega_0}^2 > 0$ なので，必要な条件は，

$$m_1 a - m_2 b > 0 \qquad \therefore\quad m_1 a > m_2 b$$

⑥ に I を代入すると，

$$\frac{m_1a^2 + m_2b^2}{2}{\omega_0}^2 = (m_1 a - m_2 b)g \qquad \therefore\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g(m_1a - m_2b)}{m_1a^2 + m_2b^2}}$$

このとき，A の速さは，

$$a\omega_0 = a\sqrt{\frac{2g(m_1a - m_2b)}{m_1a^2 + m_2b^2}}$$

【4】

《解答》

(1) 全体が水没したときの力の鉛直上向き成分の和が正となる条件を求めて，

$$\rho(l_1+l_2)a^2g-\rho(c_1l_1+c_2l_2)a^2g>0$$

$$\therefore\quad l_1+l_2>c_1l_1+c_2l_2$$

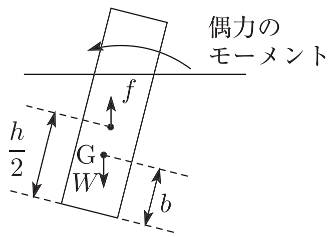
(2) 求める長さを l_0 とすると，運動方程式の鉛直上向き成分より，

$$0=\rho(l_1+l_2-l_0)a^2g-\rho(c_1l_1+c_2l_2)a^2g$$

$$\therefore\quad l_0=l_1+l_2-(c_1l_1+c_2l_2)$$

(3) 重心まわりの浮力のモーメントが四角柱の傾きを戻す向きに作用すればよい．そのためには重心位置より浮力の作用点が上方にあることが必要となる．よって，

$$\frac{h}{2}>b$$



(G は重心)
(f は浮力，W は重力)

(4) 水面を原点とし，鉛直上向きを正とする x 座標をとる．四角柱の位置の代表点 x を水面に触れる部分 (静止状態で $x=0$) とし，運動方程式の x 成分より，

$$\begin{aligned}\rho(c_1l_1+c_2l_2)a^2\ddot{x}&=+\rho(l_1+l_2-l_0-x)a^2g-\rho(c_1l_1+c_2l_2)a^2g\\&=-\rho a^2gx\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \ddot{x}=-\frac{g}{c_1l_1+c_2l_2}x=-\omega^2x$$

$$\therefore\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{c_1l_1+c_2l_2}{g}}$$

(5) 振動中心は $x=0$ より，振幅は (2) の l_0 ゆえ，求める条件は，

$$l_0>\frac{1}{2}(l_1+l_2)$$

l_0 を代入，整理して，

$$2(c_1l_1+c_2l_2)<l_1+l_2$$

(6) (1) の条件は，$l_1=4l_2$ より，

$$5l_2>4c_1l_2+c_2l_2\qquad\therefore\quad \overline{c}<5\qquad(\cdots①)$$

(3) の条件は，

$$\frac{h}{2}=\frac{c_1l_1+c_2l_2}{2}=\frac{\overline{c}l_2}{2}$$

$$b = \frac{c_1 l_1 \left(l_2 + \dfrac{l_1}{2} \right) + c_2 l_2 \dfrac{l_2}{2}}{c_1 l_1 + c_2 l_2} = \frac{3\overline{c} - \dfrac{5}{2}c_2}{\overline{c}} l_2$$

より，

$$\frac{\overline{c}}{2} > \frac{3\overline{c} - \dfrac{5}{2}c_2}{\overline{c}}$$

$$\therefore \quad c_2 > -\frac{1}{5}(\overline{c} - 3)^2 + \frac{9}{5} \qquad \cdots ②$$

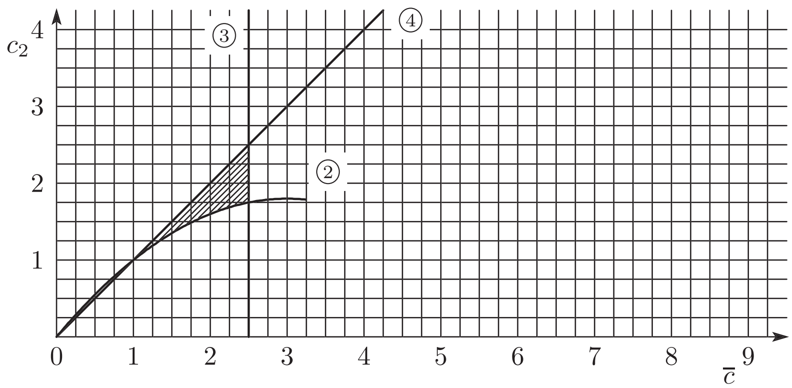
(5) の条件は，

$$2\overline{c} < 5 \qquad \therefore \quad \overline{c} < \frac{5}{2} \qquad \cdots ③$$

これと，

$$c_2 > c_1 > 0 \qquad \cdots ④$$

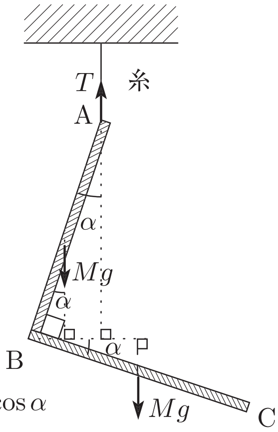
より，①～④のすべてを満たす範囲は，下図の斜線部分である．



添削課題

《解答》

(1) (a) 力のつり合いから，糸の張力の大きさ T は，



$$T = 2Mg$$

(b) $2a\sin\alpha \times T = 4Mga\sin\alpha$

(c) AB および BC に働く重力のモーメントは，それぞれ，

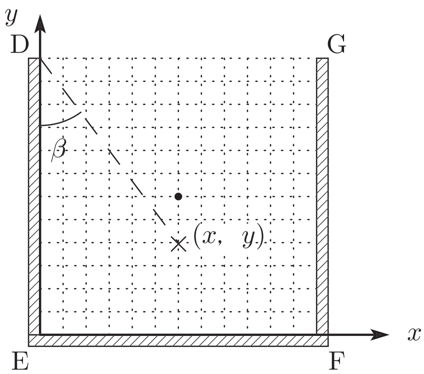
$$\begin{cases} \mathrm{AB} & \cdots \quad -a\sin\alpha \times Mg \\ \mathrm{BC} & \cdots \quad -a\cos\alpha \times Mg \end{cases}$$

(d) (b)，(c) をふまえると，

$$0 = 4Mga\sin\alpha - Mga\sin\alpha - Mga\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{1}{3}$$

(2) (e) 点 E を原点として，棒 EF に沿って x 軸を，棒 ED に沿って y 軸を設定し，重心を $(x,\ y)$ とする．重心の定義より，



$$x = \frac{M\cdot 0 + M\cdot a + M\cdot 2a}{3M} = a$$

$$y = \frac{M\cdot a + M\cdot 0 + M\cdot a}{3M} = \frac{2}{3}a$$

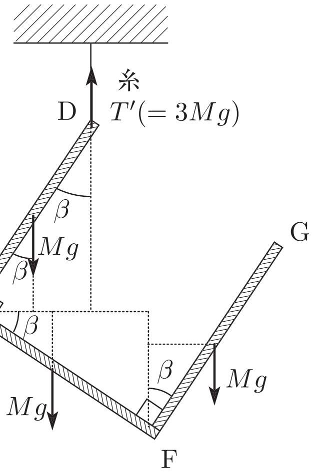
よって，図の位置になる．

(f) $\tan\beta = \dfrac{3}{4}$

《解説》

(f) は，問題文に示されている方法ではなく，点 E 回りの力のモーメントのつり合いを使っても求めることができる．

点 E 回りの力のモーメントのつり合いより，



$$T'\cdot 2a\sin\beta - Mg\cdot a\sin\beta - Mg\cdot a\cos\beta$$
$$- Mg\cdot(2a\cos\beta + a\sin\beta) = 0$$

$$\therefore \quad \tan\beta = \frac{3}{4}$$

配点

100 点

(a)，(b) 各 10 点，(c)〜(f) 各 20 点