6章　非慣性系と慣性力

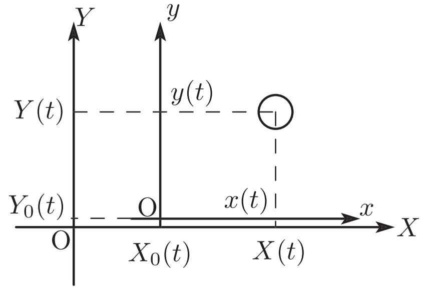
問題

■演習

【1】

《解答》

小球の質量を m とする．座標系 B は慣性系なので，小球の運動方程式は，



$$\begin{cases} m\ddot{X} = 0 & \cdots ① \\ m\ddot{Y} = -mg & \cdots ② \end{cases}$$

投射点を座標系 A の原点とし，その XY 座標を $(X_0,\ Y_0)$ とすると，投射からの時刻 t のとき，

$$\begin{cases} X(t) = X_0(t) + x(t) = Vt + \dfrac{\alpha}{2}t^2 + x(t) \\ Y(t) = y(t) \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \ddot{X} = \alpha + \ddot{x} \\ \ddot{Y} = \ddot{y} \end{cases}$$

①，② に代入すると，

$$\begin{cases} m(\alpha + \ddot{x}) = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -m\alpha & \cdots ③ \\ m\ddot{y} = -mg & \cdots ④ \end{cases}$$

これが座標系 A での小球の運動方程式となる．

(1) ③，④ より，$\ddot{x} = -\alpha$，$\ddot{y} = -g$ と分かる．また，座標系 A での初速度の大きさを v，仰角を θ とすると，初期条件は，

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v\cos\theta \\ \dot{y}(0) = v\sin\theta \end{cases}$$

$t = t_0$ で再び原点に戻ったとき，$x(t_0) = 0$ かつ $y(t_0) = 0$ より，

$$\begin{cases} v\cos\theta \cdot t_0 - \dfrac{1}{2}\alpha {t_0}^2 = 0 \\ v\sin\theta \cdot t_0 - \dfrac{1}{2}g{t_0}^2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} v\cos\theta = \dfrac{\alpha t_0}{2} \\ v\sin\theta = \dfrac{g t_0}{2} \end{cases}$$

これら 2 式より，

$$\tan\theta = \frac{g}{\alpha}, \quad v = \frac{t_0}{2}\sqrt{g^2 + \alpha^2}$$

よって，$0 \leqq t \leqq t_0$ での位置は，

$$\begin{cases} x = v\cos\theta \cdot t - \dfrac{\alpha}{2}t^2 = \dfrac{\alpha t_0}{2} \cdot t - \dfrac{\alpha}{2}t^2 \\ y = v\sin\theta \cdot t - \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{g t_0}{2} \cdot t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

これらより t を消去すると，座標系 A での軌跡は $y=\dfrac{g}{\alpha}x$ と分かる．また，x が最大となる時刻は $t=\dfrac{t_0}{2}$ なので，

$$x_{\max}=\frac{\alpha t_0}{2}\cdot\frac{t_0}{2}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{t_0}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\alpha {t_0}^2 \qquad \therefore \quad 0\leqq x(t)\leqq\frac{1}{8}\alpha {t_0}^2$$

(2) ①，②より，$\ddot{X}=0$，$\ddot{Y}=-g$ と分かる．初期条件は，

$$\begin{cases}X(0)=0\\Y(0)=0\end{cases},\qquad \begin{cases}\dot{X}(0)=V+v\cos\theta=V+\dfrac{\alpha t_0}{2}\\[2mm]\dot{Y}(0)=v\sin\theta=\dfrac{g t_0}{2}\end{cases}$$

よって，$0\leqq t\leqq t_0$ での位置は，

$$\begin{cases}X(t)=\left(V+\dfrac{\alpha t_0}{2}\right)t\\[2mm]Y(t)=\dfrac{g t_0}{2}t-\dfrac{g}{2}t^2\end{cases}$$

これらより t を消去すると，座標系 B での軌跡が得られ，

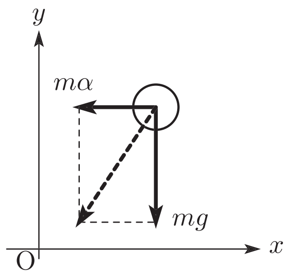
$$Y=\frac{g t_0}{2V+\alpha t_0}X-\frac{2g}{(2V+\alpha t_0)^2}X^2$$

$X_{\max}=\left(V+\dfrac{\alpha t_0}{2}\right)t_0$ より，X の変域は，

$$0\leqq X(t)\leqq\frac{1}{2}t_0(2V+\alpha t_0)$$

《解説》

③，④ で，$-m\alpha$ も力とみなすとき，これを慣性力 (みかけの力) という．慣性力は今までの力と異なり，反作用が存在しない．しかし，あえてそれを重力 mg と対等な力と解釈するならば，作用する力は右図のようになる．重力と慣性力の合力を「みかけの重力」と呼ぶことにすると，みかけの重力の大きさは，



$$mg'=\sqrt{(mg)^2+(m\alpha)^2} \qquad \therefore \quad g'=\sqrt{g^2+\alpha^2}$$

この g' がみかけの重力加速度の大きさとなる．みかけの重力方向が座標系 A におけるみかけの鉛直方向となる．

みかけの重力を利用して，(1) の v を見通しよく求めてみよう．小球が投射点に戻ってくるためには，みかけの鉛直上向きに初速度 v を与えればよく，みかけの鉛直方向の運動に注目すると，

$$v t_0-\frac{1}{2}g'{t_0}^2=0 \qquad \therefore \quad v=\frac{t_0}{2}\sqrt{g^2+\alpha^2}$$

また，みかけの重力の向きより，初速度の向きは，

$$\tan\theta=\frac{mg}{m\alpha}=\frac{g}{\alpha}$$

【2】

《解答》

I (1) 左

(2) mA

(3) y 方向の力のつりあいより，

$$0 = N - mg\cos\theta - mA\sin\theta \qquad \therefore \quad N = m(g\cos\theta + A\sin\theta)$$

(4) x 方向の力のつりあいより，

$$0 = F + mg\sin\theta - mA\cos\theta \qquad \therefore \quad F = m(A\cos\theta - g\sin\theta)$$

(5) $F < 0$ にもなり得ることに注意すると，物体が滑らないための条件は，

$$|F| \leqq \mu_0 N \qquad \therefore \quad -\mu_0 N \leqq F \leqq \mu_0 N$$

これと (3)，(4) より，

$$\begin{cases} -\mu_0 \cdot m(g\cos\theta + A\sin\theta) \leqq m(A\cos\theta - g\sin\theta) & \cdots ① \\ m(A\cos\theta - g\sin\theta) \leqq \mu_0 \cdot m(g\cos\theta + A\sin\theta) & \cdots ② \end{cases}$$

①より，

$$g(\sin\theta - \mu_0\cos\theta) \leqq A(\cos\theta + \mu_0\sin\theta) \qquad \therefore \quad A \geqq \frac{\tan\theta - \mu_0}{1 + \mu_0\tan\theta}g$$

(6) ②より，

$$A(\cos\theta - \mu_0\sin\theta) \leqq g(\sin\theta + \mu_0\cos\theta) \qquad \therefore \quad A \leqq \frac{\tan\theta + \mu_0}{1 - \mu_0\tan\theta}g$$

II (1) $m\dfrac{v^2}{r}$

(2)（ア）$S = \dfrac{mv^2}{r}\cos\alpha - mg\sin\alpha \quad \cdots ①$

（イ）$N = \dfrac{mv^2}{r}\sin\alpha + mg\cos\alpha \quad \cdots ②$

(3) (a) $S \leqq \mu N \quad \cdots ③$

(b) ①，②を③に代入すると，

$$\frac{mv^2}{r}\cos\alpha - mg\sin\alpha \leqq \mu\left(\frac{mv^2}{r}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right) \qquad \therefore \quad v \leqq \sqrt{\frac{\tan\alpha + \mu}{1 - \mu\tan\alpha} \cdot gr}$$

(4) (a) $-S \leqq \mu N \quad \cdots ④$

(b) ①，②を④に代入すると，

$$mg\sin\alpha - \frac{mv^2}{r}\cos\alpha \leqq \mu\left(\frac{mv^2}{r}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right) \qquad \therefore \quad v \geqq \sqrt{\frac{\tan\alpha - \mu}{1 + \mu\tan\alpha} \cdot gr}$$

【3】

《解答》

I (ア) 右

(イ) ma

(ウ) ばねの長さが x のとき，台車から見た運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= ma - k(x - l_0) \\ &= ma + kl_0 - kx \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

振動の中心を $x = x_0$ とすると，

$$0 = ma + kl_0 - kx_0 \qquad \therefore \quad x_0 = l_0 + \frac{ma}{k}$$

(エ) x_0 を用いて $(*)$ を書き換えると，

$$m\ddot{x} = kx_0 - kx \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - x_0)$$

運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動で，台車が運動を始めた時刻を $t = 0$ とすると，このとき $x = l_0$，$\dot{x} = 0$ なので，

$$x(t) = \left(l_0 + \frac{ma}{k}\right) - \frac{ma}{k}\cos(\omega t) \qquad \therefore \quad x_{\min} = l_0$$

(オ) $x_{\max} = l_0 + \dfrac{2ma}{k}$

(カ) 周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(キ) 台車の速度が一定になった後でばねの長さが x のとき，台車から見た運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - l_0)$$

運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動で，台車の速度を一定にした時刻を $t' = 0$ とすると，このとき $x = l_0 + \dfrac{2ma}{k}$，$\dot{x} = 0$ なので，

$$x(t') = l_0 + \frac{2ma}{k}\cos(\omega t') \qquad \therefore \quad x_{\min} = l_0 - \frac{2ma}{k}$$

(ク) $x_{\max} = l_0 + \dfrac{2ma}{k}$

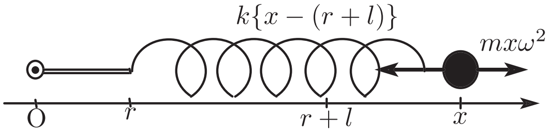
(ケ) 周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

II (1) 次ページの図に示すように，回転軸を原点とし，棒と同じ角速度 ω で回転する x 軸を設定する．この座標系での運動方程式は，

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= mx\omega^2 - k\{x - (r + l)\} \\ &= -(k - m\omega^2)\left\{x - \frac{k}{k - m\omega^2}(r + l)\right\} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

振動中心からの変位に比例した復元力が働くためには,

$$k - m\omega^2 > 0 \qquad \therefore \quad \omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$$



(2) 振動の中心では $\ddot{x} = 0$ なので,

$$x_0 = \frac{k}{k - m\omega^2}(r + l)$$

(3) $(*)$ より,

$$\ddot{x} = -\frac{k - m\omega^2}{m}(x - x_0) \qquad \therefore \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}$$

棒に沿った単振動の周期は,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$$

【4】

《解答》

I S がばねを持ち，A をつりさげたとき，T からみた A の運動方程式の向心成分は,

$$m \cdot R\omega^2 = kL \qquad \therefore \quad k = \frac{mR\omega^2}{L}$$

以下では，この k を用いて立式を行う.

(1) ばねの伸びを L_1 とすると，T からみた運動方程式の向心成分は,

$$m \cdot R\left(\omega + \frac{v}{R}\right)^2 = \frac{mR\omega^2}{L} \cdot L_1 \qquad \therefore \quad L_1 = L\left(1 + \frac{v}{R\omega}\right)^2$$

(2) ばねの伸びを L_2 とすると，T からみた運動方程式の向心成分は,

$$m \cdot \frac{R}{2}\omega^2 = \frac{mR\omega^2}{L} \cdot L_2 \qquad \therefore \quad L_2 = \frac{1}{2}L$$

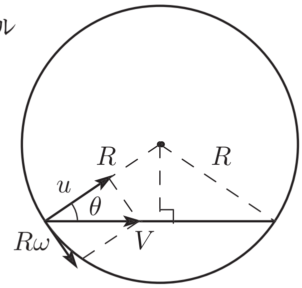
(3) 地球上でばねが L だけ伸びてつりあうとき，運動方程式の鉛直成分は,

$$0 = \frac{mR\omega^2}{L} \cdot L - mg \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

II (1) ボールに作用する力が 0 なので加速度が 0 となり，初速度を保って直進する．打ち上げ装置の速度 $R\omega$ とそれに垂直な打ち上げの速度 u を合成することにより，T からみた初速度の大きさは,

$$V = \sqrt{u^2 + (R\omega)^2}$$

(2) 右図で $\cos\theta = \dfrac{u}{V}$ なので，T からみて時間 t_1 の間にボールが進む距離 l_1 は,



$$l_1 = 2R\cos\theta = 2R\frac{u}{V}$$

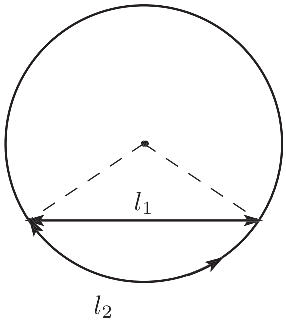
速度は V で一定なので,

$$t_1 = \frac{l_1}{V} = \frac{2Ru}{u^2 + (R\omega)^2}$$

(3) T からみて時間 t_1 の間に打ち上げ装置が円軌道に沿って進む距離 l_2 は,

$$l_2 = R\omega \cdot t_1 = R\omega \cdot \frac{l_1}{V}$$

ここで $V > R\omega$ なので，$l_1 > l_2$ と分かる．l_1，l_2 を図に記入すると右図のようになるので，ボールの落下する位置は「$+x$ 方向に離れた場所」と判断できる.



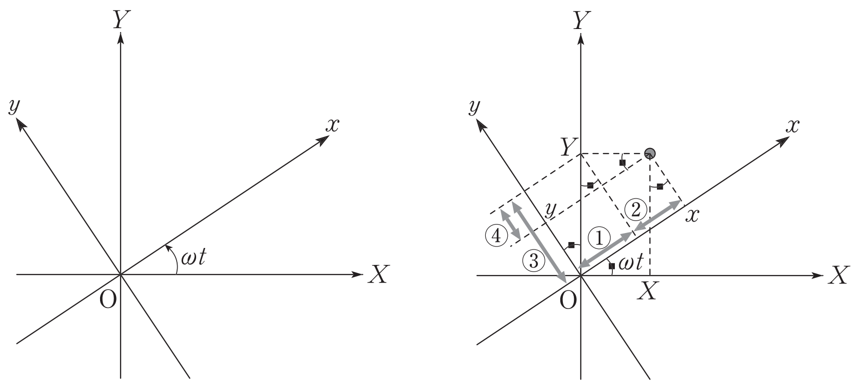
《解説》

●回転座標系

左下図のように，xy 軸が固定 XY 軸に対し一定角速度 ω で回転 しているとき，各座標成分どうしの関係は，

$$\begin{cases} x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t \\ y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} X = x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ Y = x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{cases}$$



※証明：右上図で，

$$\begin{cases} x = ① + ② \\ y = ③ - ④ \end{cases} \qquad \text{ただし，} \quad \begin{cases} ① = Y\sin\omega t \\ ② = X\cos\omega t \end{cases} \quad \begin{cases} ③ = Y\cos\omega t \\ ④ = X\sin\omega t \end{cases}$$

ここで，固定座標系で成立する運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{X} = F_X & \cdots Ⓐ \\ m\ddot{Y} = F_Y & \cdots Ⓑ \end{cases}$$

を x，y 座標を用いて表す．そのために速度成分，加速度成分を計算すると，

$$\begin{cases} \dot{X} = (\dot{x} - \omega y)\cos\omega t - (\dot{y} + \omega x)\sin\omega t \\ \dot{Y} = (\dot{x} - \omega y)\sin\omega t + (\dot{y} + \omega x)\cos\omega t \end{cases}$$

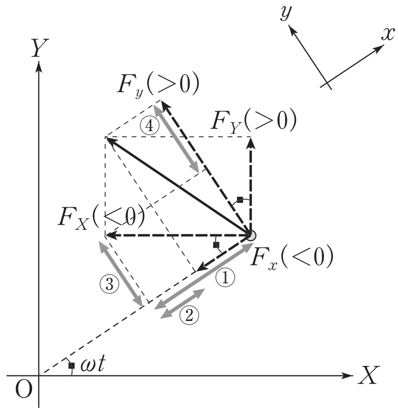
$$\therefore \quad \begin{cases} \ddot{X} = (\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y})\cos\omega t - (\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x})\sin\omega t \\ \ddot{Y} = (\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y})\sin\omega t + (\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x})\cos\omega t \end{cases}$$

これをⒶ，Ⓑに代入し，さらに Ⓐ $\times \cos\omega t +$ Ⓑ $\times \sin\omega t$，Ⓐ $\times (-\sin\omega t) +$ Ⓑ $\times \cos\omega t$ を行い変形すると，

$$\begin{cases} m(\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y}) = +F_X\cos\omega t + F_Y\sin\omega t = F_x & \cdots Ⓒ \\ m(\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x}) = -F_X\sin\omega t + F_Y\cos\omega t = F_y & \cdots Ⓓ \end{cases}$$

が成立する．

※証明：右下図で，各力の成分どうしの関係は，$F_X < 0$，$F_x < 0$ に注意して，



$$\begin{cases} -F_x = ① - ② \\ F_y = ③ + ④ \end{cases}$$

ただし，

$$\begin{cases} ① = (-F_X)\cos\omega t \\ ② = F_Y \sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} ③ = (-F_X)\sin\omega t \\ ④ = F_Y \cos\omega t \end{cases}$$

したがって，

$$\begin{cases} F_x = -\{(-F_X)\cos\omega t - F_Y \sin\omega t\} \\ F_y = (-F_X)\sin\omega t + F_Y \cos\omega t \end{cases}$$

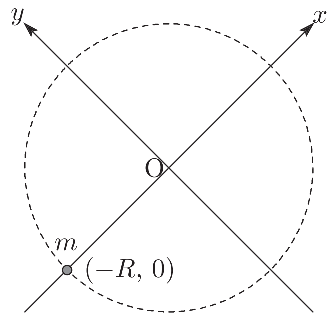
ここで，運動方程式Ⓒ，Ⓓの左辺の一部を移項して，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y} \\ m\ddot{y} = F_y + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} \end{cases}$$

とするとき，架空の力である右辺第 2 項を 遠心力，第 3 項を コリオリ力 と呼ぶ.

● S 系での運動の記述

観測者 S(回転 xy 軸) からの考察.



I 右図のように xy 軸を設定する場合，初期条件は

$$x = -R, \qquad y = 0$$

運動方程式は

$$\begin{cases} 0 = kL + m\omega^2(-R) + 0 \\ 0 = 0 + m\omega^2 \cdot 0 + 0 \end{cases}$$

(1) $$\begin{cases} 0 = kL_1 + m\left(\omega + \dfrac{v}{R}\right)^2 (-R) + 0 \\ 0 = 0 + m\left(\omega + \dfrac{v}{R}\right)^2 \cdot 0 + 0 \end{cases}$$

※ S(xy 軸) の角速度が $\omega + \dfrac{v}{R}$.

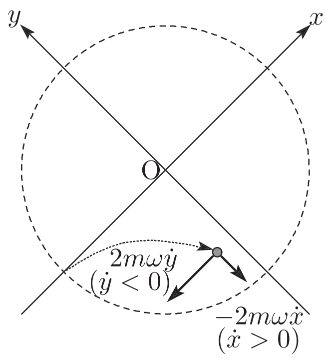
(2) $$\begin{cases} 0 = kL_2 + m\omega^2\left(-\dfrac{R}{2}\right) + 0 \\ 0 = 0 + \omega^2 \cdot 0 + 0 \end{cases}$$

※ S(xy 軸) の角速度が ω.

II $(-R,0)$ から $+x$ 向きに $\dot{x}=u$ で打ち上げる．$t=0$ での運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0+m\omega^2(-R)+2m\omega\cdot 0 \\ m\ddot{y}=0+0-2m\omega u \end{cases}$$

ここで，上式右辺第 3 項，コリオリ力 $\begin{pmatrix} 2m\omega\cdot 0 \\ -2m\omega u \end{pmatrix}$ の作用により，ボールの加速度は y 成分 ($-y$ 向き) を持つ．さらに $t>0$ では，$\dot{y}$ は負なので，ボールの加速度の x 成分は $-x$ 向きである．結果，ボールは $-y$ 向きに曲がり，落下点は x 軸上の打ち上げられた点と異なる．



《発展》

● I(1) 角速度 ω で回転する座標系での記述

角速度 ω で回転する座標系で記述したとき，各座標成分は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -R\cos\dfrac{v}{R}t \\ -R\sin\dfrac{v}{R}t \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +v\sin\dfrac{v}{R}t \\ -v\cos\dfrac{v}{R}t \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{v^2}{R}\cos\dfrac{v}{R}t \\ \dfrac{v^2}{R}\sin\dfrac{v}{R}t \end{pmatrix}$$

これらを運動方程式に代入して，

$$\begin{cases} m\cdot\dfrac{v^2}{R}\cos\dfrac{v}{R}t=kL_1\cos\dfrac{v}{R}t+m\omega^2\left(-R\cos\dfrac{v}{R}t\right)+2m\omega\left(-v\cos\dfrac{v}{R}t\right) \\ m\cdot\dfrac{v^2}{R}\sin\dfrac{v}{R}t=kL_1\sin\dfrac{v}{R}t+m\omega^2\left(-R\sin\dfrac{v}{R}t\right)-2m\omega v\sin\dfrac{v}{R}t \end{cases}$$

それぞれ右辺第 2 項，第 3 項を左辺に移項して整理すると，

$$mR\left(\omega+\frac{v}{R}\right)^2=kL_1$$

同様の式が導ける．

添削課題

《解答》

(1) 糸の張力を f とすると，地上から見た運動方程式は，

$$\begin{cases} ma = f\sin\phi_1 \\ m\cdot 0 = f\cos\phi_1 - mg \end{cases}$$

車内でみると慣性力が作用しているので，運動方程式は，

$$\begin{cases} m\cdot 0 = f\sin\phi_1 - ma \\ m\cdot 0 = f\cos\phi_1 - mg \end{cases}$$

いずれの式からも，

$$\begin{cases} f\sin\phi_1 = ma \\ f\cos\phi_1 = mg \end{cases}$$

$$\therefore\quad \tan\phi_1 = \frac{a}{g}$$

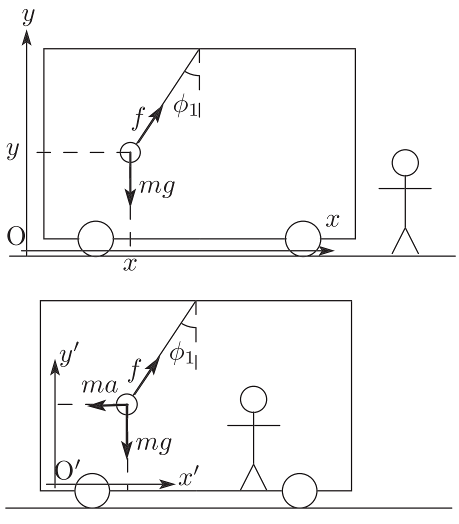


図 1

(2) 車内の観測者から見ると，重力 mg と慣性力 ma の合力が「見かけの重力」として作用する（図 2）．見かけの重力の大きさは，

$$mg' = m\sqrt{g^2 + a^2}$$

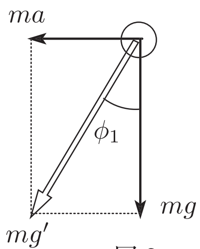


図 2

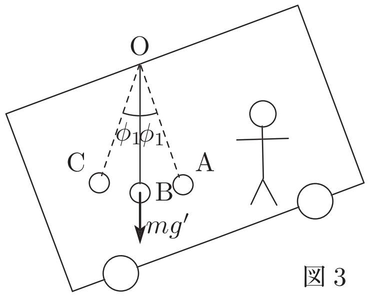


図 3

図 3 のように，見かけの重力が働く方向がみかけの下方となり，この最下点 B で速さは最大になる．
点 B での速さを v として，車内で見たエネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg'l(1-\cos\phi_1) \qquad \therefore\quad v = \sqrt{2g'l(1-\cos\phi_1)}$$

$\cos\phi_1 = \dfrac{g}{g'}$ なので，

$$v = \sqrt{2g'l\left(1 - \frac{g}{g'}\right)} = \sqrt{2l(\sqrt{g^2+a^2} - g)}$$

(3) 重力 mg のもとで，長さ l の単振り子の微小振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ と表せる．
ここでは g を g' で置き換えて，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

配点

100 点

(1)40 点，(2)40 点，(3)20 点

７章　分子運動論と温度：理想気体

問題

■演習

【1】

《解答》

I (1) 半径方向中心向きに，大きさ $2mv\cos\theta$

(2) 分子が壁に衝突する時間間隔を τ，単位時間あたりの衝突回数を ν とすると，

$$\tau = \frac{2a\cos\theta}{v} \qquad \therefore \quad \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{2a\cos\theta}$$

(3) 分子が受ける力積は運動量の変化と等しく，壁は分子が受ける力積の反作用の力積を受ける．気体全体が壁に外向きに及ぼす力を F とすると，

$$F = \left(2mv\cos\theta \times \frac{v}{2a\cos\theta}\right) \times N = \frac{Nmv^2}{a}$$

圧力の定義より，

$$P = \frac{F}{4\pi a^2} = \frac{Nmv^2}{4\pi a^3} = \frac{Nmv^2}{3V}$$

(4) 温度 T の定義式 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$ より，$mv^2 = 3kT$ と表せる．これを (3) に代入すると，

$$P = \frac{N \cdot 3kT}{3V} \qquad \therefore \quad PV = NkT$$

(5) He ガス 1 mol の質量を M とすると，He 分子 1 個の質量は $m = \frac{M}{N_\mathrm{A}}$ と表すことができる．He ガスの密度を ρ とすると，$\frac{Nm}{V} = \rho$ なので，

$$\frac{NM}{VN_\mathrm{A}} = \rho \qquad \therefore \quad N = \frac{\rho V N_\mathrm{A}}{M}$$

これと (4) より，

$$PV = \frac{\rho V N_\mathrm{A}}{M} \cdot kT \qquad \therefore \quad T = \frac{P}{k} \cdot \frac{M}{\rho N_\mathrm{A}}$$

与えられた数値を代入すると，

$$T = \frac{1.1 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23}} \cdot \frac{4 \times 10^{-3}}{0.18 \times (6.02 \times 10^{23})} = 2.9 \times 10^2\,\mathrm{K}$$

II (a) 分子が受ける力積は運動量の変化と等しく，ピストンは分子が受ける力積の反作用の力積を受けるので，

$$-\{m \cdot (-v_x) - mv_x\} = 2mv_x$$

(b) 分子が x 方向で往復する時間を τ とすると，

$$\tau = \frac{2L}{v_x} \qquad \therefore \quad f_x = \frac{1}{\tau} = \frac{v_x}{2L}$$

(c) 気体全体がピストンに及ぼす力を F とすると，

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(2mv_{xi} \times \frac{v_{xi}}{2L} \right) = \frac{m}{L} \left\langle {v_x}^2 \right\rangle \cdot N$$

圧力の定義より，

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{Nm \left\langle {v_x}^2 \right\rangle}{L^3}$$

気体の圧力はどの方向でも等しいので，分子の運動方向が特定の方向に集中していることは無く，$\left\langle {v_x}^2 \right\rangle = \left\langle {v_y}^2 \right\rangle = \left\langle {v_z}^2 \right\rangle$ とおける．また，$\left\langle {v_x}^2 \right\rangle + \left\langle {v_y}^2 \right\rangle + \left\langle {v_z}^2 \right\rangle = \left\langle v^2 \right\rangle$ もふまえると，$\left\langle {v_x}^2 \right\rangle = \frac{1}{3} \left\langle v^2 \right\rangle$ と表せるので，

$$p = \frac{Nm}{L^3} \cdot \frac{\left\langle v^2 \right\rangle}{3} = \frac{Nm \left\langle v^2 \right\rangle}{3V}$$

(d) (c) と状態方程式より，

$$\frac{Nm \left\langle v^2 \right\rangle}{3V} \cdot V = NkT \qquad \therefore \quad \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3kT}{m}$$

分子の運動エネルギーの総和がこの系の内部エネルギーなので，

$$U = \frac{1}{2} m \left\langle v^2 \right\rangle \cdot N = \frac{3}{2} NkT$$

(e) ピストンに衝突した後の分子の速度成分を ${v_x}'$ とすると，

$$1 = -\frac{{v_x}' - v_0}{v_x - v_0} \qquad \therefore \quad {v_x}' = -v_x + 2v_0$$

よって，衝突による運動エネルギーの変化は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (-v_x + 2v_0)^2 - \frac{1}{2} m{v_x}^2 &= -2mv_0 v_x + 2m{v_0}^2 \\ &\fallingdotseq -2mv_0 v_x \end{aligned}$$

(f) 時間 Δt の間の気体分子の運動エネルギーの変化量を Δu とすると，

$$\Delta u = (-2mv_0 v_x) \times f_x \Delta t = -\frac{mv_0 {v_x}^2}{L} \Delta t \qquad \therefore \quad \langle \Delta u \rangle = -\frac{mv_0 \left\langle {v_x}^2 \right\rangle}{L} \Delta t$$

この間の内部エネルギーの変化は，

$$\Delta U = \langle \Delta u \rangle \times N = -\frac{Nmv_0 \left\langle v^2 \right\rangle}{3L} \Delta t$$

ここで (c) と状態方程式をふまえると，

$$\varDelta U = -pL^2 \cdot v_0 \varDelta t = -\frac{NkT}{V} \cdot \varDelta V$$

また，(d) より，$\varDelta U = \dfrac{3}{2} Nk \varDelta T$ と表せるので，

$$\frac{3}{2} Nk \varDelta T = -\frac{NkT}{V} \varDelta V \qquad \therefore \quad \varDelta T = -\frac{2}{3} \cdot \frac{T}{V} \varDelta V$$

【2】

《解答》

(1) $\Delta p = mv_{\mathrm{d}} - m\cdot(-v_{\mathrm{d}}) = 2mv_{\mathrm{d}}$

(2) $v_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{d0}}$ のとき，エネルギーの保存より，

$$0 + mgh = \frac{m}{2}{v_{\mathrm{d0}}}^2 + 0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{d0}} = \sqrt{2gh}$$

下面に衝突してから速度の z 成分が 0 となるまでの時間が $\dfrac{1}{2}t_1$ なので，

$$0 = v_{\mathrm{d}} - g\cdot\frac{1}{2}t_1 \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{2v_{\mathrm{d}}}{g}$$

下面は分子から (1) の Δp と等しい大きさの力積を受け，時間 Δt の間の衝突回数は $\dfrac{\Delta t}{t_1}$ なので，

$$w = \Delta p\cdot\frac{\Delta t}{t_1} = mg\Delta t$$

(3) 下面と上面の間の往復時間を t とすると，下面から上面に到達するのに $\dfrac{1}{2}t$ かかるので，

$$h = v_{\mathrm{d}}\cdot\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}t\right)^2 \qquad \therefore \quad gt^2 - 4v_{\mathrm{d}}t + 8h = 0$$

これの小さい方の解が，ここで注目する時間なので，

$$t = \frac{2(v_{\mathrm{d}} - \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh})}{g}$$

これと (1) を用いて，

$$w_{\mathrm{d}} = \Delta p\cdot\frac{\Delta t}{t} = \frac{v_{\mathrm{d}}}{v_{\mathrm{d}} - \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}}\cdot mg\Delta t$$

また，上面との衝突における分子の運動量の変化の大きさを $\Delta p'$ とすると，

$$\Delta p' = |m(-v_{\mathrm{u}}) - mv_{\mathrm{u}}| = 2mv_{\mathrm{u}} \quad \text{ただし} \quad v_{\mathrm{u}} = \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}$$

$$\therefore \quad w_{\mathrm{u}} = \Delta p'\cdot\frac{\Delta t}{t} = \frac{\sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}}{v_{\mathrm{d}} - \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}}\cdot mg\Delta t$$

(4) (2) の場合，上面に加わる力積は 0 なので，

$$w' = w - 0 = mg\Delta t$$

(3) の場合は，

$$w' = w_{\mathrm{d}} - w_{\mathrm{u}} = mg\Delta t$$

よって，上面に届くか否かによらずに，各分子が下面と上面に及ぼす力の差は mg となる．N 個の分子全体が下面と上面に及ぼす力の差は，

$$P'S = mg\cdot N \qquad \therefore \quad P' = \frac{Nmg}{S}$$

【3】

《解答》

(1) $\rho = \dfrac{m}{V}$

(2) (1) をふまえると $n = \dfrac{\rho V}{M}$ と表せるので，状態方程式は，

$$PV = \frac{\rho V}{M} \cdot RT \qquad \therefore \quad \frac{P}{\rho T} = \frac{R}{M} \quad \cdots (*)$$

(3) $(*)$ より，

$$\frac{P_0}{\rho_1 T_1} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \qquad \therefore \quad \rho_1 = \frac{T_0}{T_1}\rho_0$$

(4) $F = \rho_0 V_0 g$

(5) 力のつりあいより，

$$0 = F - (W + \rho_1 V_0)g$$

これと (3)，(4) より，

$$0 = \rho_0 V_0 g - Wg - \frac{T_0}{T_1}\rho_0 V_0 g \qquad \therefore \quad T_1 = \frac{\rho_0 V_0}{\rho_0 V_0 - W} T_0$$

(6) 気球内の空気の密度を ρ_2 として，$(*)$ より，

$$\frac{P_0}{\rho_2 T_2} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \qquad \therefore \quad \rho_2 = \frac{T_0}{T_2}\rho_0$$

上昇していき静止したときの力のつりあいより，

$$0 = {\rho_0}' V_0 g - (W + \rho_2 V_0)g$$

これらより，

$$0 = {\rho_0}' V_0 g - \left(W + \frac{T_0}{T_2}\rho_0 V_0\right) g \qquad \therefore \quad {\rho_0}' = \frac{T_0}{T_2}\rho_0 + \frac{W}{V_0}$$

【4】

《解答》

I (1) x 軸方向の運動を考えて，

$$\frac{|u_j|\Delta t}{2L}$$

(2) 弾性衝突より，

$$1=-\frac{{u_j}'-\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}{|u_j|-\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

衝突により，速度の y 成分，z 成分は変化しない．よって，

$$\begin{aligned}\Delta e_j&=\frac{1}{2}m({u_j'}^2+{v_j}^2+{w_j}^2)-\frac{1}{2}m({u_j}^2+{v_j}^2+{w_j}^2)\\&=-\frac{2m|u_j|}{\Delta t}\Delta x+2m\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\end{aligned}$$

(3) 前問までの結果と与えられた近似より，

$$\begin{aligned}\Delta U&\fallingdotseq\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{|u_j|\Delta t}{2L}\right)\left(-\frac{2m|u_j|}{\Delta t}\Delta x\right)\\&=-\frac{m\Delta x}{L}\sum_{j=1}^{N}{u_j}^2\end{aligned}$$

(4) (3) より，

$$\overline{u^2}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}{u_j}^2=\frac{1}{N}\left(-\frac{L}{m\Delta x}\Delta U\right)$$

はじめの気体の圧力を p とすると，熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U=-pL^2\Delta x$$

また，状態方程式は，ボルツマン定数 k を用いて，

$$pL^3=NkT$$

以上より，

$$\overline{u^2}=\frac{kT}{m}$$

(5) 平均衝突回数を考えて，

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{|u_j|\Delta t}{2L}\right)\cdot N=\frac{\Delta t}{2L}\sum_{j=1}^{N}|u_j|\quad\left(=\frac{\Delta t}{2L}\cdot N\sqrt{\frac{2\overline{u^2}}{\pi}}=\frac{N\Delta t}{L}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\right)$$

(6) (5) より，

$$\frac{S}{L^2}\cdot\frac{\Delta t}{2L}\sum_{j=1}^{N}|u_j| = \frac{S\Delta t}{2L^3}\sum_{j=1}^{N}|u_j| \quad \left(= \frac{S\Delta t}{2L^3}\cdot N\sqrt{\frac{2\overline{u^2}}{\pi}} = \frac{SN\Delta t}{L^3}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\right)$$

(7) 状態方程式 $pL^3 = NkT$ より，

$$\frac{S\Delta t}{2L^3}\cdot N\sqrt{\frac{2\overline{u^2}}{\pi}}\cdot\frac{1}{\Delta t} = \frac{SN}{L^3}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{pS}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

(8) (7) より，分子数が同数になるのだから，数値を代入して $T_{\mathrm{R}} = 432\,\mathrm{K}$.

(9)

$$\lambda_j = \frac{c - w_j}{c/\lambda} = \left(1 - \frac{w_j}{c}\right)\lambda$$

II　ア 円柱の体積は Svt ゆえ，

$$p_+ = \frac{1}{2}nSvt$$

イ 運動量変化の大きさより，

$$|(-mv) - mv| = 2mv$$

ウ 期待値を計算して，

$$\overline{I_x} = \frac{1}{2}nSvt\times(-2mv) + \frac{1}{2}nSvt\times(2mv) = 0$$

エ 同様に，

$$\overline{{I_x}^2} = \frac{1}{2}nSvt\times(-2mv)^2 + \frac{1}{2}nSvt\times(2mv)^2 = 4nSm^2v^3t$$

オ 相対速度の大きさが $v+u$ ゆえ，円柱の高さは $(v+u)t$.

カ 相対速度の大きさが $v-u$ ゆえ，求める確率は，

$$p'_- = \frac{1}{2}nS(v-u)t$$

キ $2m(v-u)$

ク カの結果より，

$$\overline{I_x{}'} = \frac{1}{2}nS(v+u)t\cdot\{-2m(v+u)\} + \frac{1}{2}nS(v-u)t\cdot 2m(v-u) = -4nSmvut$$

ケ 問題文の表式とエ，クの結論を比較して，

$$A = 4nSm^2v^3, \qquad B = 4nSmv$$

これより，

$$\frac{A}{B} = \frac{4nSm^2v^3}{4nSmv} = mv^2$$

コ 温度 T における気体分子の運動エネルギーは，kT に比例する．なお，ケの結果より，

$$\frac{A}{B} = mv^2 \propto kT$$

添削課題

《解答》

(あ) 壁の面積を S とおくと，壁から $v_x t$ の距離の範囲に存在する粒子の数は $A \times S v_x t$ と表せる．この粒子の半分が壁に衝突するので，単位面積あたりでは，

$$\frac{1}{2} \cdot A S v_x t \times \frac{1}{S} = \frac{A v_x t}{2}$$

(い) $|m \cdot (-v_x) - m v_x| = 2 m v_x$

(う) (あ)，(い) より，時間 t の間に，壁の単位面積あたりが受ける力積は，

$$2 m v_x \times \frac{A v_x t}{2} = A m {v_x}^2 \times t \qquad \therefore \quad P = A m {v_x}^2$$

(え) (う) の ${v_x}^2$ を $\dfrac{\overline{v^2}}{3}$ で置き換え，$P = AkT$ に代入すると，

$$A m \cdot \frac{\overline{v^2}}{3} = AkT \qquad \therefore \quad T = \frac{m \overline{v^2}}{3k}$$

(お) 図 2 の円筒の内部に粒子が 1 個存在するとき，粒子の数密度は，

$$A = \frac{1}{\pi d^2 \cdot v t} \qquad \therefore \quad \pi d^2 v t \cdot A = 1$$

v を $\sqrt{\overline{v^2}}$，t を t_{c} で置き換えると，

$$\pi d^2 \sqrt{\overline{v^2}} t_{\mathrm{c}} \cdot A = 1 \qquad \therefore \quad t_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\pi d^2 A \sqrt{\overline{v^2}}}$$

(か) $l = \sqrt{\overline{v^2}} \times t_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{A \pi d^2}$

(き) 密度を ρ，アボガドロ定数を N_{A}，気体 $1\,\mathrm{mol}$ の質量を M とすると，

$$\frac{M}{N_{\mathrm{A}}} \cdot A = \rho \qquad \therefore \quad A = \frac{\rho N_{\mathrm{A}}}{M}$$

与えられた数値を代入すると，

$$A = \frac{1.2\,\mathrm{kg/m^3} \times 6.0 \times 10^{23}\,\text{個}/\mathrm{mol}}{40 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}} = 1.8 \times 10^{25}\,\text{個}/\mathrm{m^3}$$

(く) (か) に数値を代入すると，

$$l = \frac{1}{1.8 \times 10^{25} \times 3.14 \times (4.0 \times 10^{-10})^2} = 1.1 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

配点

100 点

(か)，(く) 各 5 点，その他は各 15 点

Z-KAI

会員番号		氏　名	