本科 1 期 5 月度

解答

Z会東大進学教室

難関大物理／難関大物理 T

４章　円運動１

問題

■演習

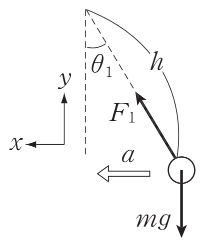
【１】

《解答》

(1) ● 地上から観測するときの，円運動の運動方程式を立てる．

加速度の大きさを a，円運動の半径を r とするとき，

$a = r{\omega_1}^2 = h\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2$ であるから

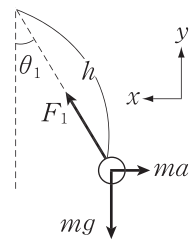


$$m\begin{pmatrix} h\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1\sin\theta_1 \\ F_1\cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} mh\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2 = F_1\sin\theta_1 & \cdots\cdots ① \\ 0 = -mg + F_1\cos\theta_1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

● おもり上で観測するときの，つり合いの式を立てる．

遠心力 (慣性力)$ma = mh\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2$ が働くから



$$m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1\sin\theta_1 \\ F_1\cos\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mh\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} mh\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2 = F_1\sin\theta_1 & \cdots\cdots ① \\ 0 = -mg + F_1\cos\theta_1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より

$$F_1 = \underline{\frac{mg}{\cos\theta_1}}$$

①に代入して

$$mh\sin\theta_1 \cdot {\omega_1}^2 = mg\tan\theta_1$$

$$\therefore \quad \omega_1 = \underline{\sqrt{\frac{g}{h\cos\theta_1}}}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{h\cos\theta_1}{g}}}$$

(2) (1) より $F_1 = \dfrac{mg}{\cos\theta_1}$，$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{h\cos\theta_1}}$ であり，

角速度が ω_2 になると, 角度が θ_2 となり, 張力の大きさ $F_2 = 2mg$ となって糸が切れるから

$$F_2 = \frac{mg}{\cos\theta_2} = 2mg$$

$$\therefore \quad \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \theta_2 = \underline{60^\circ}$$

$$\therefore \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{h\cos\theta_2}} = \underline{\sqrt{\frac{2g}{h}}}$$

(3) 円運動の速度に関する束縛条件より，糸が切れた瞬間の小球の速度は円の接線方向であることと，$\sin\theta_2 = \sqrt{1-\cos^2\theta_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であることから

$$V_N = \underline{0}, \qquad V_V = \underline{0}, \qquad V_T = h\sin\theta_2 \cdot \omega_2 = h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2g}{h}} = \underline{\sqrt{\frac{3gh}{2}}}$$

(4) 糸が切れたときの物体の高さは

$$2h - h\cos\theta_2 = \frac{3}{2}h$$

よって，求める時間 t は

$$\frac{3}{2}h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \therefore \quad t = \underline{\sqrt{\frac{3h}{g}}}$$

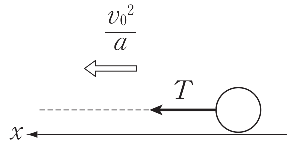
(5) (3)(4) より，糸の切断後は円の接線方向に等速運動するから

$$L_N = \underline{0}, \qquad L_T = V_T t = \sqrt{\frac{3gh}{2}} \times \sqrt{\frac{3h}{g}} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}h}$$

【2】

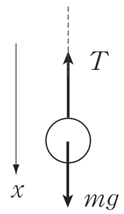
《解答》

(1) $\boxed{\text{ア}}$ 小球 A の運動方程式は



$$\underline{m\frac{v_0{}^2}{a} = T} \quad \cdots\cdots ①$$

$\boxed{\text{イ}}$ 小球 B のつり合いの式は

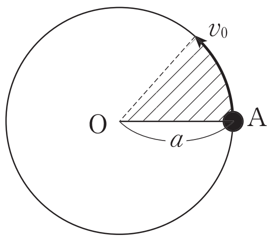


$$\underline{m \cdot 0 = mg + (-T)} \quad \cdots\cdots ②$$

$\boxed{\text{ウ}}$ ①を②に代入して

$$mg - m\frac{v_0{}^2}{a} = 0$$
$$\therefore \quad \underline{v_0{}^2 = ag}$$

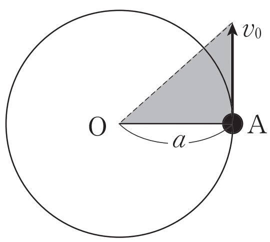
(2) $\boxed{\text{エ}}$ 図より面積速度は



$$\pi a^2 \times \frac{v_0}{2\pi a} = \frac{a}{\underline{2}} \times v_0$$

＜別解＞ 右下図のように，1 点を通る瞬間の面積速度として求めることもできます．

$$\frac{1}{2} \times a \times v_0 = \frac{a}{\underline{2}} \times v_0$$



$\boxed{\text{オ}}$ $\boxed{\text{エ}}$ における a を $a-b$ に，v_0 を v に換えて

$$\frac{1}{2} \times (a-b) \times v = \underline{\frac{a-b}{2}} \times v$$

$\boxed{\text{カ}}$ 面積速度一定の法則より

$$\frac{a}{2} \times v_0 = \frac{a-b}{2} \times v \qquad \therefore \quad v = \underline{\frac{a}{a-b}} \times v_0$$

＜研究＞ ケプラーの法則は太陽系の惑星の運動に関する法則ですが，中心力を受けて運動する (つねに一点に向かう力を受けて運動する) 物体すべてに成り立ちます．

$\boxed{\text{キ}}$　このときの糸の張力の大きさを T' とすると，①の a を $a-b$ に，v_0 を v に，T を T' に換えたときの小球 A の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{a-b} = T'$$

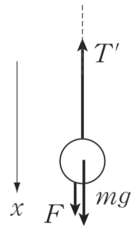
よって，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ より

$$T' = m\frac{v^2}{a-b} = m\frac{\left(\dfrac{a}{a-b}v_0\right)^2}{a-b} = m\frac{\left(\dfrac{a}{a-b}\right)^2}{a-b}{v_0}^2 = m\frac{a^2}{(a-b)^3}ag = \underline{\frac{a^3}{(a-b)^3}\times mg}$$

$\boxed{\text{ク}}$　手が小球 B を下方に引いている力の大きさを F とすると，
小球 B のつり合いの式は

$$m\cdot 0 = mg + F + (-T')$$

$$\therefore\quad F = T' - mg = \frac{a^3}{(a-b)^3}mg - mg$$
$$= \left(\underline{\frac{a^3}{(a-b)^3} - 1}\right)mg$$

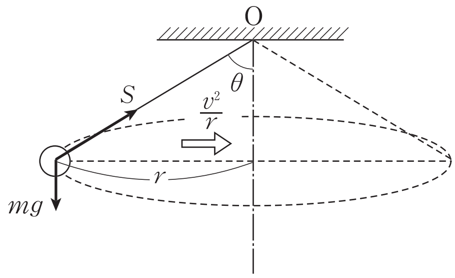


添削課題

《解答》

$h=0.40\mathrm{m}$，$r=0.60\mathrm{m}$，$g=9.8\mathrm{m/s^2}$，$\tan\theta=\dfrac{0.60}{0.45}=\dfrac{4.0}{3.0}$ とする。

(1) 糸の張力の大きさを S, 球の速さを v とすると，小球の円運動の運動方程式は



$$m\begin{pmatrix} v^2/r \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} S\sin\theta \\ -S\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r}=S\sin\theta & \cdots\cdots ① \\ m\cdot 0=mg-S\cos\theta & \cdots ② \end{cases}$$

②より　$S=\dfrac{mg}{\cos\theta}$

①に代入して　$m\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{mg}{\cos\theta}\sin\theta=mg\tan\theta$

$$\therefore\quad v=\sqrt{rg\tan\theta}=\sqrt{0.60\times 9.8\times\frac{4.0}{3.0}}=\sqrt{9.8\times 0.80}=\underline{2.8\,\mathrm{m/s}}$$

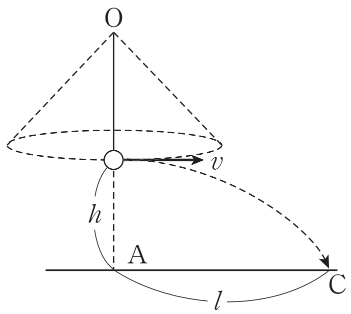
(2) 求める角速度を ω とすると

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{2.80}{0.60}\fallingdotseq\underline{4.7\,\mathrm{rad/s}}$$

(3) 求める周期を T とすると

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\times 3.1\times 0.60}{2.8}=\underline{1.3\,\mathrm{s}}$$

(4) 糸が切れてから床に落下するまでの時間を t [s]，糸が切れた点から点 C までの水平距離を l，求める距離を AC とすると

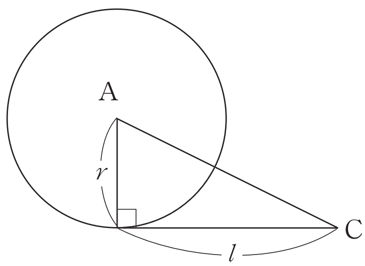


$$\begin{cases} h=\dfrac{1}{2}gt^2 & \cdots\cdots ③ \\ l=vt & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③より　$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

④に代入して

$$l=vt=2.8\times\sqrt{\frac{2\times 0.40}{9.8}}=0.80$$



$$\therefore\quad \mathrm{AC}=\sqrt{r^2+l^2}$$

$$=\sqrt{0.60^2+0.80^2}=\underline{1.0\mathrm{m}}$$

配点

(1) 40 点　(2) 15 点　(3) 15 点　(4) 30 点

5章　円運動２

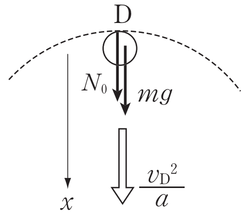
問題

■演習

【１】

《解答》

(1) ループの最高点 D における速さを v_{D}，位置エネルギーの基準を B とすると，力学的エネルギー保存より



$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{D}}{}^2+mg(2a)\qquad \therefore\quad v_{\mathrm{D}}{}^2=2g(h-2a)$$

D における運動方程式より

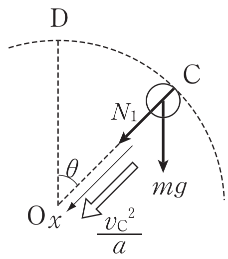
$$m\frac{v_{\mathrm{D}}{}^2}{a}=mg+N_0$$

$$\therefore\quad N_0=m\frac{v_{\mathrm{D}}{}^2}{a}-mg=m\frac{2g(h-2a)}{a}-mg=\underline{\frac{2h-5a}{a}mg}$$

(2) 出発点の高さが h_0 のとき，D における抗力の大きさが 0 となるから

$$\frac{2h_0-5a}{a}mg=0\qquad \therefore\quad h_0=\underline{\frac{5}{2}a}$$

(3) C における速さを v_{C}，位置エネルギーの基準を B とすると，力学的エネルギー保存より



$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}{}^2+mga(1+\cos\theta)$$

$$\therefore v_{\mathrm{C}}^2=2g\{h-(1+\cos\theta)a\}$$

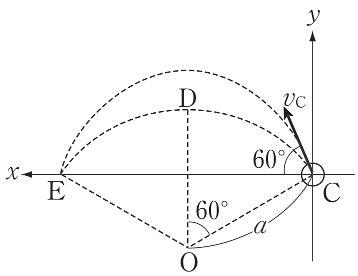
C における運動方程式より

$$m\frac{v_{\mathrm{C}}{}^2}{a}=mg\cos\theta+N_1$$

$$\therefore\quad N_1=m\frac{v_{\mathrm{C}}{}^2}{a}-mg\cos\theta=m\frac{2g\{h-(1+\cos\theta)a\}}{a}-mg\cos\theta$$

$$=\underline{\frac{2h-(2+3\cos\theta)a}{a}mg}$$

(4) 図のように座標軸を設定すると，C で飛び出した台車が E($\sqrt{3}a$, 0) を通ればよいので，CE 間を通過するのにかかる時間を t とすると



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_C \cos 60° \\ v_C \sin 60° \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = v_C \cos 60° \cdot t = \sqrt{3}a & \cdots ① \\ y = v_C \sin 60° \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①から得られる　$t = \dfrac{2\sqrt{3}a}{v_C}$ を②に代入すると　$3a - \dfrac{6ga^2}{{v_C}^2} = 0$　　$\therefore$　${v_C}^2 = 2ga$

(3) において $h = h_1$，$\theta = 60°$ となるとき E($\sqrt{3}a$, 0) を通るので

$${v_C}^2 = 2ga = 2g\{h_1 - (1 + \cos 60°)a\} \qquad \therefore \quad \underline{h_1 = \frac{5}{2}a}$$

【2】

《解答》

(1) 点 A を位置エネルギーの基準にとる．点 C での速さを v_0 とすると，力学的エネルギー保存より

$$0 - mgr\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgr$$

$$\therefore \quad v_0 = \underline{\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}} \quad \cdots ①$$

(2) 張力の大きさを T_0 とすると，運動方程式の向心成分は

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = T_0 - mg$$

上式に①を代入すると，

$$T_0 = \underline{mg(3-2\cos\theta)}$$

(3) 点 D での速さを v，張力の大きさを T とする．力学的エネルギー保存より

$$0 - mgr\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 - mg\frac{r}{2}$$

一方，運動方程式の向心成分は

$$m\frac{v^2}{\frac{r}{4}} = T + mg$$

2 式より

$$T = mg(3-8\cos\theta)$$

1 回転するためには，$T \geqq 0$ が必要であるから

$$\cos\theta \leqq \frac{3}{8}$$

したがって，最小角の余弦は

$$\cos\theta = \underline{\frac{3}{8}}$$

添削課題

《解答》

(1) 質点が A を通る直前は等速直線運動，直後は円運動なので，直前，直後の垂直抗力の大きさを N_1，N_2 とすると

$$-mg + N_1 = 0 \qquad \therefore \quad N_1 = mg$$

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = -mg + N_2 \qquad \therefore \quad N_2 = mg + m\frac{{v_0}^2}{r}$$

よって，$\underline{m\frac{{v_0}^2}{r}\text{増加する}}$.

(2) B における速さを v_{B} とすると，位置エネルギーの基準を A として，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2 + mgr(1-\cos\theta) \qquad \therefore \quad {v_{\mathrm{B}}}^2 = {v_0}^2 - 2gr(1-\cos\theta) \quad \cdots ①$$

B における垂直抗力の大きさを N_{B} とすると，運動方程式より

$$m\frac{{v_{\mathrm{B}}}^2}{r} = N_{\mathrm{B}} - mg\cos\theta \quad \cdots ②$$

①と②より　$N_{\mathrm{B}} = \underline{m\frac{{v_0}^2}{r} - (2 - 3\cos\theta)mg}$

(3) 質点が C まで上がるためには, 点 C における速さ v_{C} が 0 以上であればよいから, ①において $\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると, 点 C における速さ v_{C} は

$${v_{\mathrm{C}}}^2 = {v_0}^2 - 2gr\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = {v_0}^2 - 2gr \geqq 0 \qquad \therefore \quad v_0 \geqq \underline{\sqrt{2gr}}$$

(4) 質点が頂点 E を通過するためには，点 E における垂直抗力の大きさ N_{E} が 0 以上であればよいから, (2) の結果より，$\theta = \pi$ のとき

$$N_{\mathrm{E}} = m\frac{{v_0}^2}{r} - (2 - 3\cos\pi)mg \geqq 0 \qquad \therefore \quad v_0 \geqq \underline{\sqrt{5gr}}$$

(5) (2) の結果より，$N_{\mathrm{B}} = 0$ とすると

$$0 = m\frac{{v_0}^2}{r} - \{2 - 3\cos(\angle\mathrm{AOD})\}\, mg \qquad \therefore \quad \cos(\angle\mathrm{AOD}) = \underline{\frac{2gr - {v_0}^2}{3gr}}$$

配点

(1)〜(5) 各 20 点

6章　万有引力

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 質量 m [kg] の物体に働く重力の大きさ mg [N] とは，地表において質量 m [kg] の物体に地球が及ぼす万有引力の大きさのことであるから

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore \quad g = \underline{\frac{GM}{R^2}}$$

(2) 地球の重心からの距離が $R+h$ [m] の位置における重力の大きさが mg' [N] であるから

$$mg' = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad \therefore \quad g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

(1) の結果より $\quad \dfrac{g'}{g} = \dfrac{GM}{(R+h)^2}\Big/\dfrac{GM}{R^2} = \dfrac{R^2}{(R+h)^2} \qquad \therefore \quad g' = \underline{\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 g}$

(3) 半径 $R+h$ [m] の円軌道を描く人工衛星の周期が，地球の自転と同じ T [s] であるから

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} \quad \text{より} \quad v = \underline{\frac{2\pi(R+h)}{T}}$$

(4) 人工衛星の遠心力の大きさは $\quad m\dfrac{v^2}{R+h} = \dfrac{m}{R+h}\left\{\dfrac{2\pi(R+h)}{T}\right\}^2 = \underline{\dfrac{4\pi^2 m(R+h)}{T^2}}$

(5) 題意より $\quad \dfrac{4\pi^2 m(R+h)}{T^2} = mg'$ であるから

$$\frac{4\pi^2 m(R+h)}{T^2} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 mg$$

$$(R+h)^3 = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2} \qquad \therefore \quad h = \underline{\sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R}$$

＜参考＞　地球の自転と同じ周期で自転の向きに赤道上方をまわる人工衛星は，地上から観測すると，静止して見えるので，「静止衛星」と呼ばれます．

【2】

《解答》

(1) 地表における重力とは，地球の重心からの距離が地球の半径 R の位置における万有引力であるから

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad \cdots ①$$

軌道 I における重力は，地球の重心からの距離が r の位置における万有引力であるから

$$mg' = G\frac{Mm}{r^2} \qquad \therefore \quad g' = \frac{GM}{r^2} \quad \cdots ②$$

②÷①より $\qquad g'/g = \frac{GM}{r^2}\bigg/\frac{GM}{R^2} = \underline{\left(\frac{R}{r}\right)^2}$

(2) 円運動の運動方程式より

$$m\frac{{v_1}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

また，$GM = gR^2$ であるから $\quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \underline{R\sqrt{\frac{g}{r}}}$

よって，$T_1 = \frac{2\pi r}{v_1} = \underline{\frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g}}}$

(3) 楕円軌道の長半径は $\frac{r+3r}{2} = 2r$ であるから，ケプラーの第 3 法則より

$$\frac{r^3}{{T_1}^2} = \frac{(2r)^3}{{T_2}^2} \qquad \therefore \quad T_2/T_1 = \left(\frac{2r}{r}\right)^{\frac{3}{2}} = \underline{2\sqrt{2}}$$

(4) 軌道 II の P における人工衛星の速さを v_{P} とすると，面積速度一定の法則より

$$\frac{1}{2}rv_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}(3r)v_{\mathrm{Q}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{P}} = 3v_{\mathrm{Q}} \quad \cdots ③$$

力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2 + \left(-G\frac{Mm}{3r}\right) \qquad \therefore \quad {v_{\mathrm{P}}}^2 - {v_{\mathrm{Q}}}^2 = \frac{4GM}{3r} \quad \cdots ④$$

③と④より

$$(3v_{\mathrm{Q}})^2 - {v_{\mathrm{Q}}}^2 = \frac{4GM}{3r} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{Q}} = \underline{\sqrt{\frac{GM}{6r}}}$$

(5) 無限遠に達するための P 点での速さの最小値を v_2 とすると，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + 0$$

$$\therefore \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

よって，必要な増加量は $\qquad v_2 - v_1 = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}} - \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = \underline{(\sqrt{2}-1)\sqrt{\dfrac{GM}{r}}}$

添削課題

《解答》

(1) 万有引力定数を G, 地球の質量を M, 人工衛星の質量を m, 求める速さを v_1 とすると, 力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + \left(-G\frac{Mm}{2R}\right) = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \left(-G\frac{Mm}{3R}\right) \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

$mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$ より $GM = gR^2 \qquad \therefore \quad v_1 = \underline{\sqrt{\dfrac{gR}{3}}}$

(2) 半径 $3R$ の等速円運動をするので, 求める速さを v_2 とすると, 円運動の運動方程式より

$$m\frac{{v_2}^2}{3R} = G\frac{Mm}{(3R)^2} \qquad \therefore \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \underline{\sqrt{\frac{gR}{3}}}$$

(3) 求める周期を T_0 とすると

$$T_0 = \frac{2\pi(3R)}{v_2} = \underline{6\pi\sqrt{\frac{3R}{g}}}$$

(4)(ア) P, Q における速さを v_{P}, v_{Q} とおくと, 面積速度一定の法則(ケプラーの第 2 法則)より

$$\frac{1}{2}(3R)v_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}(6R)v_{\mathrm{Q}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{Q}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{P}} \quad \cdots ①$$

力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2 + \left(-G\frac{Mm}{3R}\right) = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2 + \left(-G\frac{Mm}{6R}\right)$$

$${v_{\mathrm{P}}}^2 - {v_{\mathrm{Q}}}^2 = 2GM\left(\frac{1}{3R} - \frac{1}{6R}\right) \quad \cdots ②$$

①と②より $\qquad v_{\mathrm{P}} = \underline{\dfrac{2}{3}\sqrt{gR}}$

(イ) 楕円軌道の長半径は $\dfrac{3R+6R}{2} = \dfrac{9}{2}R$ なので, 求める周期を T とすると, ケプラーの第 3 法則より

$$\frac{(3R)^3}{{T_0}^2} = \frac{\left(\dfrac{9}{2}R\right)^3}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{27}{8}}T_0 = \underline{27\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}}$$

配点

(1), (2) 各 20 点 　　(3) 10 点 　　(4)(ア) 30 点 　　(イ) 20 点

7章　力のモーメント

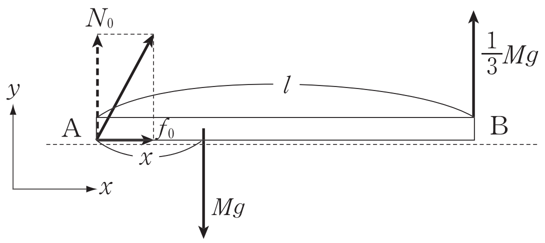
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 端 A が床から受ける垂直抗力の大きさを N_0，摩擦力の大きさを f_0 とおくと，棒に働く力のつり合いより



$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0 \\ N_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ -Mg + N_0 + \dfrac{1}{3}Mg = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad N_0 = \frac{2}{3}Mg$$

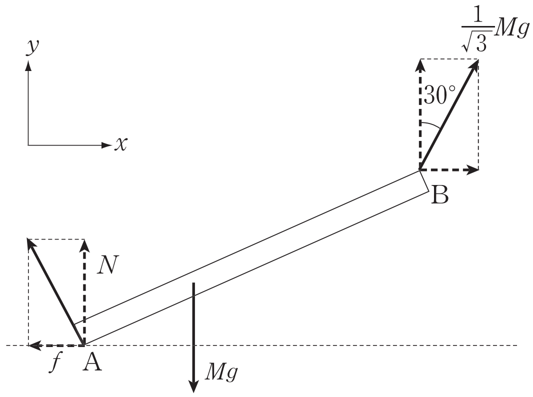
棒の端 A が床を押している力の大きさを F とおくと，この力は端 A が床から受ける垂直抗力の反作用の力であるから

$$F = N_0 = \underline{\frac{2}{3}Mg}$$

(2) 端 A から棒の重心までの距離を x とおくと，反時計回りを正として，A まわりのモーメントのつり合いより

$$\frac{1}{3}Mg \times l + (-Mg \times x) = 0 \qquad \therefore \quad x = \underline{\frac{1}{3}l}$$

(3) 端 A が床から受ける垂直抗力の大きさを N，摩擦力の大きさを f とおくと，棒に働く力のつり合いより



$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}}Mg\sin 30^\circ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}Mg\cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -f + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}Mg = 0 & \therefore \quad f = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}Mg \\ -Mg + N + \dfrac{1}{2}Mg = 0 & \therefore \quad N = \underline{\dfrac{1}{2}Mg} \end{cases}$$

(4) (3) における f が最大静止摩擦力となるから

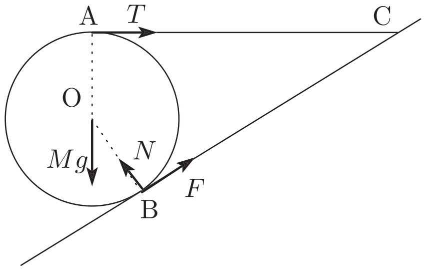
$$f = \mu N$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}Mg = \frac{1}{2}\mu Mg \qquad \therefore \quad \mu = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

【2】

《解答》

(1),(2) 右の図のように，球と斜面との接点を B，糸の右端を C，球の中心を O とする．また，糸の張力の大きさを T，球が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを F とする．



O まわりの力のモーメントの総和が 0 であること，すなわち

$$0 = aT - aF$$

および，力のつり合いの各成分

$$\text{斜面に垂直：} 0 = N - Mg\cos\theta - T\sin\theta$$
$$\text{斜面に平行：} 0 = F - Mg\sin\theta + T\cos\theta$$

より，

$$F = T = \underline{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}Mg}\left(= \tan\frac{\theta}{2}\cdot Mg\right)$$
$$N = \underline{Mg}$$

■**別解**　糸の長さを l とすると，C まわりの力のモーメントのつり合いは

$$0 = lN - lMg \qquad \therefore \quad N = \underline{Mg}$$

(3) 静止摩擦係数を μ とする．球が滑り出さない条件

$$\frac{F}{N} \leqq \mu$$

に (1) と (2) の結果を代入すると，

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \leqq \mu$$

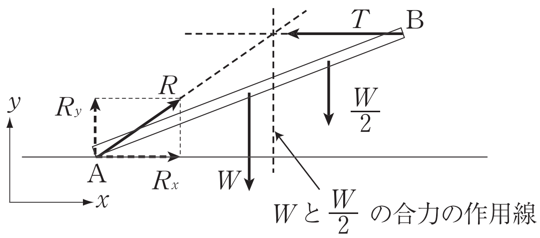
これより，μ の最小値は

$$\underline{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}\left(= \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

添削課題

《解答》

(1) 棒に働く力のつり合いの式は（R_x が水平右向き，R_y が鉛直上向きなので，座標軸は図のようにとる）



$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{W}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \underline{R_x + (-T) = 0} & \cdots ① \\ \underline{R_y + (-W) + \left(-\dfrac{W}{2}\right) = 0} & \cdots ② \end{cases}$$

(2) モーメントのつり合いの式は，反時計回りを正とすると

$$\underline{T \times L\sin 30^\circ + \left(-W \times \frac{L}{2}\cos 30^\circ\right) + \left(-\frac{W}{2} \times \frac{3}{4}L\cos 30^\circ\right) = 0} \quad \cdots ③$$

※ $\dfrac{1}{2}TL + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}WL\right) + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{16}WL\right) = 0$ とするのはよいが，両辺を L で割ってしまうと (力) × (距離) の形がなくなってしまい，力のモーメントの式ではなくなってしまいます.

(3) ③より $T = \underline{\dfrac{7\sqrt{3}}{8}W}$,　①より $R_x = T = \underline{\dfrac{7\sqrt{3}}{8}W}$,　②より $R_y = \underline{\dfrac{3}{2}W}$

(4) $R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2} = \underline{\dfrac{\sqrt{291}}{8}W}$,　　$\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x} = \underline{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}$

配点

(1) 各 10 点　(2) 20 点　(3) 各 10 点　(4) 各 15 点

Z-KAI

会員番号		氏　名	