M2JD

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ

Lecture 4　微分法 (2) 関数の極限 - 解答

演習問題 4 − 1

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-2x+3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x-3}{2x^2+x+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{(2x+5)(x+1)}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{2x^2+x+1}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$

解答・解説

(1) 分母・分子を x^2 で割ると

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{2}{3}\qquad(\text{答})$$

(2) 分母・分子を x^2 で割ると

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}\qquad(\text{答})$$

(3)

$$(\text{与式})=\frac{1+1}{1+1+2}=\frac{1}{2}\qquad(\text{答})$$

(4)

$$(\text{与式})=\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{2x+5}=\frac{(-1)-3}{2\cdot(-1)+5}=-\frac{4}{3}\qquad(\text{答})$$

(5)

$$(\text{与式})=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}\qquad(\text{答})$$

(6) 分母・分子を x で割る．$x>0$ なので

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad(\text{答})$$

(7) $x<0$ なので，$x=-t$ と置き換える．このとき，$t\to+\infty$ なので

$$(\text{与式})=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{(-t)^2+1}}=\frac{-1+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=-1 \qquad (\text{答})$$

(8) () 部分について，分子の有理化を行うと

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1}\\&=\frac{-1}{1+1}\\&=-\frac{1}{2} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

演習問題 4 − 2

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x^2-2x-3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2-x}{x+1}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi-0}\tan x$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{x-2}$

解答・解説

(1) $-\infty$　(答)

(2) $+\infty$　(答)

(3) $-\infty$　(答)

(4) $+\infty$　(答)

(5) $+\infty$　(答)

(6) 1　(答)

演習問題 4 − 3

次の関数の連続性を調べよ．

(1) $f(x) = x|x|$

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$

解答・解説

(1) 仮定より，

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geqq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

であるから，$x \neq 0$ のとき $f(x)$ は 2 次関数なので，連続である．

次に，$x = 0$ での連続性について調べる．

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-x^2) = 0$$

であるから，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

一方，$f(0) = 0$ であるから，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

これより，$f(x)$ は $x = 0$ でも連続であることがわかる．

以上より，$f(x)$ はすべての実数で連続である．

(2) まず，$x \neq 2$ のとき，

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$$

であるから，$x \neq 2$ のとき $f(x)$ は 1 次関数なので，連続である．

次に，$x = 2$ での連続性について調べる．

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

一方，$f(2) = 1$ であるから，

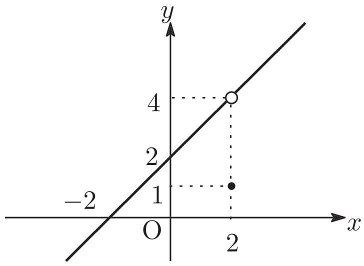
$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

これより，$f(x)$ は $x = 2$ では不連続であることがわかる．

以上より，$f(x)$ は $x \neq 2$ で連続，$x = 2$ で不連続である．

≪注≫

(2) のグラフは右のようになる．



また，上の解答からわかるように，関数

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \cdots\cdots ①$$

は $x \neq 2$ で連続，$x=2$ で不連続である ($x=2$ で関数は定義されない)．

しかし，(2) において $f(2)$ の値を 4 と定義すれば，すなわち

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x \neq 2) \\ 4 & (x=2) \end{cases}$$

とすれば，$f(x)$ はすべての実数で連続となる．

そこで，① に対する $x=2$ のような点を「除去可能な不連続点」と呼ぶことがある．

演習問題 4 − 4

関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 2 & (x \geqq 1) \\ x^3 + (1-a)x^2 & (x < 1) \end{cases}$$

$f(x)$ がすべての実数 x で微分可能であるとき a，b の値を求めよ．

解答・解説

$x = 1$ で微分可能であるならば $x = 1$ で連続でなくてはならないから

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x)$$

ここで

$$(\text{左辺}) = \lim_{x \to 1+0} \left(ax^2 + bx - 2\right) = a + b - 2$$

また

$$(\text{右辺}) = \lim_{x \to 1-0} \left(x^3 + (1-a)x^2\right) = 1 + (1-a) = 2 - a$$

これらが等しいから

$$a + b - 2 = 2 - a$$
$$\therefore \quad 2a + b = 4 \quad \cdots ①$$

また，$f(x)$ は $x \fallingdotseq 1$ で微分可能であるから，$f(x)$ がすべての実数で微分可能であるためには，$x = 1$ において微分可能であることが必要十分である．

$f(x)$ の $x = 1$ における右微分係数，および左微分係数が等しいから

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$h \to +0$ のとき $x \geqq 1$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{h \to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h \to +0} \frac{\left\{a(1+h)^2 + b(1+h) - 2\right\} - \left(a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 2\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to +0} \frac{(2a+b)h + ah^2}{h} \\
&= 2a + b
\end{aligned}$$

また $h \to -0$ のとき $x < 1$ であるから，① より

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\ &= \lim_{h\to -0}\frac{\left\{(1+h)^3+(1-a)(1+h)^2\right\}-\left(a\cdot 1^2+b\cdot 1-2\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to -0}\frac{4-2a-b+(5-2a)h+(4-a)h^2+h^3}{h}\\ &= \lim_{h\to -0}\left\{(5-2a)+(4-a)h+h^2\right\}\\ &= 5-2a\end{aligned}$$

これらが等しいから

$$2a+b=5-2a \qquad \therefore\quad 4a+b=5 \quad \cdots ②$$

①，② を連立して，求める値は

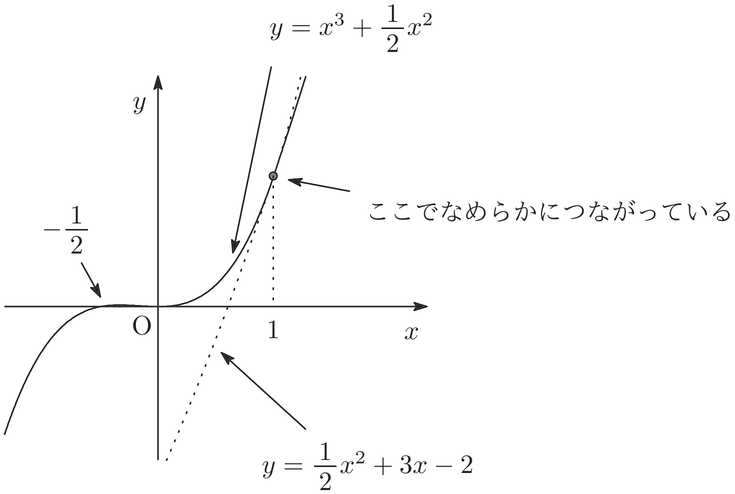
$$(a,\ b)=\left(\frac{1}{2},\ 3\right) \qquad (\text{答})$$

参考 4.1

このとき

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+3x-2 & (x \geqq 1)\\ x^3+\dfrac{1}{2}x^2 & (x<1)\end{cases}$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは下図.



演習問題 4 − 5

次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-12}{\sqrt{x-1}-1}$ が有限な値になるときの実数定数 a の値を求めよ．また，極限値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-(ax+b))=2$ が成り立つように，実数定数 a,b の値を求めよ．

解答・解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}(x^2+ax-12)&=0\\4+2a-12&=0\\a&=4\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x-12}{\sqrt{x-1}-1}&=\lim_{x\to2}\frac{(x+6)(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-1)-1^2}\\&=\lim_{x\to2}(x-6)(\sqrt{x-1}+1)\\&=16\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $a\leqq0$ のときは明らかに発散する．以下，$a>0$ で考える．

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-(ax+b))=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)$$

この極限が有限の値に収束するのは

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)&=0\\1-a&=0\\a&=1\end{aligned}$$

のときであり，$a > 0$ を満たす．また

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-(x+b)) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x-b) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}-b\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}-b\right) \\ &= -b\end{aligned}$$

従って，極限値が 2 であることから

$$-b = 2 \qquad \therefore \quad b = 2$$

以上より，$(a,\, b) = (1,\, -2)$　　(答)

添削課題 $\mathbf{4-1}$

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5x+1}{x^2+3x+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+5}{x-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-1}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{5}}{x-1}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$

解答・解説

(1) 分母・分子を x^2 で割ると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5x+1}{x^2+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=-2 \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+5}{x-3}=\frac{1^2+2\cdot1+5}{1-3}=\frac{8}{-2}=-4 \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$(\text{与式})=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+4)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+4}=\frac{4}{7} \qquad \text{(答)}$$

(4) 分母，分子を x で割ると

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1}=2 \qquad \text{(答)}$$

(5) $-x=t$ と置き換えると

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{(-t)^2+1}}{-t+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{-t+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}}=-1 \qquad \text{(答)}$$

(6) 分子の有理化を行い，不定形を解消する．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{2x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(7) まず分子を有理化すると

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{5}}{x-1} &= \frac{(4+x)-5}{(x-1)(\sqrt{4+x}+\sqrt{5})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4+x}+\sqrt{5}} \\
&\xrightarrow[x\to1]{} \quad \frac{1}{\sqrt{4+1}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(8) 分母を有理化すると

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{4+x}-2} &= \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{(\sqrt{4+x})^2-2^2} \\
&= \frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{x} \\
&= \sqrt{4+x}+2 \\
&\xrightarrow[x\to0]{} \quad \sqrt{4+0}+2 = 4. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

添削課題 $\mathbf{4-2}$

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x+1}{x-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{x^3-8}$

解答・解説

(1) $x\to 1+0$ のとき，$x+1\to 2$，$x-1>0$ なので

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x+1}{x-1}=+\infty \qquad \text{(答)}$$

(2) $y=\tan x$ の変化（グラフ）から判断できる．

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=+\infty \qquad \text{(答)}$$

(3) $x\to 2-0$ のとき，$x\to 2$，$x^3-8<0$ なので

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{x^3-8}=-\infty \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{\text{添削課題 } \mathbf{4-3}}$

$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} = 1$ が成り立つように，実数定数 a, b の値を求めよ．

$\boxed{\text{解答・解説}}$

$\displaystyle\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$ より

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1}\left\{a\sqrt{x+3}-b\right\} &= 0 \\ \sqrt{4}a-b &= 0 \\ b &= 2a \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} a \cdot \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} a \cdot \frac{(x+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \to 1} a \cdot \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{a}{4} \end{aligned}$$

この値が，1 と一致するのは

$$\frac{a}{4} = 1 \qquad a = 4$$

ゆえに，求める値は $(a,\, b) = (4,\, 8)$ 　　(答)

Lecture 5 微分法(3) 指数・対数・3角関数の極限 - 解答

演習問題 5 − 1

次の極限を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x}{1-\cos x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x\sin 3x}{1-\cos x}$

解答・解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2 \qquad \text{(答)}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4} \qquad \text{(答)}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{4}{1+\cos 2x}=\frac{4}{2}=2 \qquad \text{(答)}$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x}{1-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(1+\cos x)}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 2(1+\cos x)\\&=2\cdot 2=4 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x} = 3 \qquad \text{(答)}$$

(7) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3\cos 2x} = \frac{2}{3} \qquad \text{(答)}$$

(8) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ を用いる.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x\sin 3x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{2\cdot 3}{\cos 2x} = 2\cdot 6 = 12 \qquad \text{(答)}$$

演習問題 5 − 2

x は実数，n は自然数とする．次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\{\log(n+1)-\log n\}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-x}}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^x-1}$

解答・解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ を用いる．

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2=e^2 \qquad \text{(答)}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$ を用いる．

$$\lim_{x\to 0}\log(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(-1)\cdot\log\{1+(-x)\}^{\frac{1}{-x}}=-1 \qquad \text{(答)}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$ を用いる．

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2\cdot\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}2\log\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=2\log e=2 \qquad \text{(答)}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$ を用いる．

$$\text{（与式）}=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1 \qquad \text{(答)}$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を用いる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2 \qquad \text{(答)}$$

(6) 同様に，収束する部分を作る．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)-(e^{-x}-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\\ &= 1\cdot 3+1\\ &= 4 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ を用いる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{x}{e^{x}-1}\cdot 3=1\cdot 1\cdot 3=3 \qquad \text{(答)}$$

演習問題 5 − 3

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$

解答・解説

(1) $x-\pi=t$ とおくと，$t\to 0$ なので

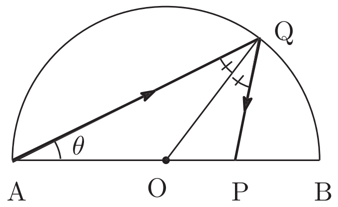
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot(-1)=-1 \qquad \text{(答)}$$

(2) $\pi-2x=t$ とおくと，$t\to 0$ なので

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=\lim_{t\to 0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}\cdot 2=2$$

演習問題 5 − 4

図のような半球形の凹面鏡がある．直径を AB，中心を O，半径を r とする．AB と θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の角をなす光線が鏡の点 Q で反射し，AB と交わる点を P とする．$\theta\to 0$ とするとき，P はどのような点に近づくか．ただし，Q において光線は $\angle\mathrm{AQO}=\angle\mathrm{OQP}$ となるように反射するものとする．

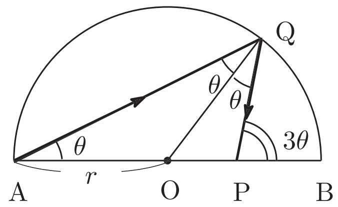


解答・解説

題意から

$$\angle\mathrm{OQP}=\theta,\qquad \angle\mathrm{OPQ}=\pi-3\theta$$

であるから，△OPQ に正弦定理を用いると



$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{OQ}}{\sin(\pi-3\theta)}$$

$\mathrm{OQ}=r$ から

$$\mathrm{OP}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}r$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\mathrm{OP}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}r=\lim_{\theta\to 0}\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{3}r=\frac{r}{3}$$

よって，点 P は

半径 OB を 1 : 2 に内分する点に近づく　　(答)

添削課題 **5 − 1**

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(-x)}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{\sin 7x+\sin 3x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 3x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 3x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}$

(8) $\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\theta}{(2\theta-\pi)^2}$

解答・解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\frac{\sin 5x}{x}=\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5 \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad 1\cdot 5=5 \qquad \text{(答)}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\frac{x}{\sin(-x)}=\frac{-x}{\sin(-x)}\cdot(-1) \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad 1\cdot(-1)=-1 \qquad \text{(答)}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いる.

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3} \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \qquad \text{(答)}$$

(4) 和を積に直す公式を用いる.

$$\begin{aligned}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{\sin 7x+\sin 3x}&=\frac{2\cos\dfrac{7x+3x}{2}\sin\dfrac{7x-3x}{2}}{2\sin\dfrac{7x+3x}{2}\cos\dfrac{7x-3x}{2}}\\&=\frac{\cos 5x\sin 2x}{\sin 5x\cos 2x}\\&=\frac{\cos 5x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}\\&\xrightarrow[x\to 0]{}\ \frac{1}{1}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ を用いる.

$$\frac{2x}{\tan 3x}=\frac{3x}{\tan 3x}\cdot\frac{2}{3} \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \qquad \text{(答)}$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ を用いる．[*1]

$$\frac{x^2}{1-\cos 3x}=\frac{(3x)^2}{1-\cos 3x}\cdot\frac{1}{9}\quad\xrightarrow[x\to 0]{}\quad\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}\qquad\text{(答)}$$

(7) $\dfrac{1}{x^2}=t$ とおくと，$t\to 0$.

$$\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\qquad\text{(答)}$$

(8) $x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおくと，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $x\to 0$．このとき

$$\theta=\frac{\pi}{2}-x,\quad 2\theta-\pi=-2x$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{1-\sin\theta}{(2\theta-\pi)^2}&=\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{(-2x)^2}\\&=\frac{1-\cos x}{4x^2}\\&=\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{4}\\&\xrightarrow[x\to 0]{}\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

[*1] 実際の答案では，この結果は可能な限り証明した方が無難だと思います．

添削課題 **5 − 2**

次の極限を求めよ．n は自然数，x は実数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1+n^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{x}{2}\right)$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{\log(n+1)-\log n\}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$

解答・解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を用いる．

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2 = \left\{\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}^{-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2} = \frac{1}{e^2} \qquad (答)$$

(2) $n\to\infty$ のとき $n^2\to\infty$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1+n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e\cdot(1+0) = e \qquad (答)$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ を用いる．

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3 \xrightarrow[x\to\infty]{} e^3 \qquad (答)$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を用いる．

$$(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \left\{(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}\right\}^{-2} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-2} = \frac{1}{e^2} \qquad (答)$$

(5) 同様に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を用いる．

$$\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \log\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \log e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \qquad (答)$$

(6) 対数法則を用いる．

$$\begin{aligned} n\{\log(n+1)-\log n\} &= n\left\{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} \\ &= n\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= \log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \log e = 1. \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(7) 基本的な公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を用いる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3 \qquad \text{(答)}$$

(8) 同様に，収束する部分を 1 つずつ作っていく．

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x} &= \frac{e^{2x}-1-(e^{-2x}-1)}{x} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{x} - \frac{(e^{-2x}-1)}{x} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2 + \frac{(e^{-2x}-1)}{-2x}\cdot 2 \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \quad 1\cdot 2 + 1\cdot 2 = 4. \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

添削課題 5 − 3

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+x)}{1-\cos 2x}$

解答・解説

(1) 収束する部分を 1 つずつ作っていく.

$$\begin{aligned}\frac{e^x+x-1}{\sin x}&=\frac{e^x-1}{\sin x}+\frac{x}{\sin x}\\&=\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}+\frac{x}{\sin x}\\&\xrightarrow[x\to 0]{}\quad 1\cdot 1+1=2.\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 同様に,

$$\begin{aligned}\frac{x\log(1+x)}{1-\cos 2x}&=\frac{x^2}{1-\cos 2x}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}\\&=\frac{(2x)^2}{1-\cos 2x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}\\&\xrightarrow[x\to 0]{}\quad 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2}.\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

Lecture 6　微分法 (4)　導関数の基本 - 解答

演習問題 6 − 1

次の関数を微分せよ.

(1) $y = (x+1)(2x-1)$

(2) $y = (2x+1)(3x-2)$

(3) $y = x^3(2x+1)$

(4) $y = (x^2+1)(x^3+x+1)$

(5) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

(6) $y = \dfrac{2x+1}{x+4}$

(7) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+3}$

(8) $y = \dfrac{x^2}{x+2}$

解答・解説

(1) 積の微分法を用いる.

$$y' = 1\cdot(2x-1)+(x+1)\cdot 2 = 4x+1 \qquad \text{(答)}$$

(2) 積の微分法を用いる.

$$y' = 2\cdot(3x-2)+(2x+1)\cdot 3 = 12x-1 \qquad \text{(答)}$$

(3) 積の微分法を用いる.

$$y' = 3x^2\cdot(2x+1)+x^3\cdot 2 = 8x^3+3x^2 \qquad \text{(答)}$$

(4) 積の微分法を用いる.

$$y' = 2x\cdot(x^3+x+1)+(x^2+1)\cdot(3x^2+1) = 5x^4+6x^2+2x+1 \qquad \text{(答)}$$

(5) 商の微分法を用いる.

$$y' = \frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \qquad \text{(答)}$$

(6) 商の微分法を用いる.

$$y' = \frac{2\cdot(x+4)-(2x+1)\cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{7}{(x+4)^2} \qquad \text{(答)}$$

(7) 商の微分法を用いる.

$$y' = \frac{(2x+1)\cdot(x+3)-(x^2+x-1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2} \qquad \text{(答)}$$

(8) 商の微分法を用いる．

$$y' = \frac{2x \cdot (x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 6 − 2

次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt[5]{x^6}$　(2) $y = \sqrt[3]{x^2}$　(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $y = \dfrac{1}{x}$　(5) $y = (x-3)^4$　(6) $y = (x+1)^5$

(7) $y = (2x-1)^5$　(8) $y = (3x+4)^6$　(9) $y = \sqrt{5x^3+1}$

(10) $y = \dfrac{1}{2x+3}$

解答・解説

(1) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$ を用いる．

$$y' = \left(x^{\frac{6}{5}}\right)' = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x} \qquad \text{(答)}$$

(2) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$ を用いる．

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$ を用いる．

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \qquad \text{(答)}$$

(4) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$ を用いる．

$$y' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{(答)}$$

(5) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．

$$y' = \left\{(x-3)^4\right\}' = 4(x-3)^3 \qquad \text{(答)}$$

(6) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．

$$y' = \left\{(x+1)^5\right\}' = 5(x+1)^4 \qquad \text{(答)}$$

(7) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．

$$y' = \left\{(2x-1)^5\right\}' = 5(2x-1)^4 \cdot 2 = 10(2x-1)^4 \qquad \text{(答)}$$

(8) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．

$$y' = \left\{(3x+4)^6\right\}' = 6(3x+4)^5 \cdot 3 = 18(3x+4)^5 \qquad \text{(答)}$$

(9) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．

$$y' = \left\{(5x^3+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2}\cdot(5x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3+1}} \qquad \text{(答)}$$

(10) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．

$$y' = \left\{(2x+3)^{-1}\right\}' = -(2x+3)^{-2}\cdot 2 = -\frac{2}{(2x+3)^2} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 6 − 3

次の問いに答えよ．

(1) $x = y^2 - 2y - 1\ (y > 1)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) n を自然数とする．$y = \sqrt[4]{x}$ の導関数 $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ を，$y = x^n$ の微分法と逆関数の微分法により導いてみよ．

解答・解説

(1) $x + 2 = (y-1)^2$．ゆえに

$$\frac{dx}{dy} = 2(y-1)\cdot 1 = 2(y-1)$$

従って，逆関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{2(y-1)} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \qquad \text{(答)}$$

> 別解 **6.1**
>
> $y = \sqrt{x+2} + 1$ より
>
> $$\frac{dy}{dx} = \left\{(x+2)^{\frac{1}{2}} + 1\right\}' = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x = y^4$ より $\dfrac{dx}{dy} = 4y^3$．ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4\cdot(\sqrt[4]{x})^3} = \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}} \quad \text{〔証明終〕}$$

演習問題 6 − 4

実数 x, y は次の等式を満たす．$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．x のみの式で表さなくてもよい．

(1) x, y が $2x^2 + 3y^2 = 6$ をみたすとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) x, y が $y^2 - 3xy + x^2 = 5$ をみたすとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解答・解説

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$ の両辺を x で微分して

$$2 \cdot 2x + 3 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y} \qquad \text{(答)}$$

(2) $y^2 - 3xy + x^2 = 5$ の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 3\left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2x = 0 \\ (2y - 3x)\frac{dy}{dx} = 3y - 2x \\ \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 6 − 5

次の問いに答えよ．

(1) $f(a) = f'(a) = 0$ を満たす x の整式 $f(x)$ は，$(x-a)^2$ で割り切れることを示せ．

(2) x^n を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを n を用いて表せ．ただし，n は正の整数とする．

解答・解説

(1) 整式 $f(x)$ を，実数 p, q と整式 $g(x)$ により

$$f(x) = (x-a)^2 g(x) + px + q$$

とおく．このとき，積の微分法から

$$f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x) + p$$

ここで，$f(a) = f'(a) = 0$ より

$$q = 0, \quad p = 0$$

ゆえに

$$f(x) = (x-a)^2 g(x)$$

であり，$f(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れる．〔証明終〕

(2)

$$x^n = (x-1)^2 g(x) + px + q \qquad \cdots ①$$

とおく．① に $x = 1$ を代入して

$$p + q = 1 \qquad \cdots ②$$

また，① の辺々を x で微分して

$$nx^{n-1} = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2 g'(x) + p \qquad \cdots ③$$

③ に $x = 1$ を代入すると

$$p = n \qquad \cdots ④$$

③, ④ から

$$p = n, \quad q = 1 - n$$

ゆえに，求める余りは $nx + (1-n)$ 　　(答)

添削課題 **6 − 1**

次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x+1)(2x+3)$

(2) $y=(2x+1)(3x-2)$

(3) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

(4) $y=\dfrac{2x+1}{x+4}$

(5) $y=\sqrt[3]{x^4}$

(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

(7) $y=(3x+4)^7$

(8) $y=(x^2+1)^5$

(9) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$

(10) $y=(x+1)(2x-7)^4$

(11) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$

(12) $y=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-1}$

(13) $y=\sqrt{2-x^3}$

解答・解説

(1) 積の微分法による．

$$\frac{dy}{dx}=1\cdot(2x+3)+(x+1)\cdot 2=4x+5 \qquad \text{(答)}$$

(2) 積の微分法による．

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot(3x-2)+(2x+1)\cdot 3=12x-1 \qquad \text{(答)}$$

(3) 商の微分法による．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\cdot(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \qquad \text{(答)}$$

(4) 商の微分法による．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot(x+4)-(2x+1)\cdot 1}{(x+4)^2}=\frac{7}{(x+4)^2} \qquad \text{(答)}$$

(5) $y=x^{\frac{4}{3}}$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \qquad \text{(答)}$$

(6) $y=x^{-\frac{3}{5}}$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}-1}=-\frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}}=-\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}} \qquad \text{(答)}$$

(7) 合成関数の微分法による．$t = 3x + 4$，$y = t^7$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 7 \cdot t^{7-1} \cdot (3x+4)' = 21(3x+4)^6 \qquad \text{(答)}$$

(8) 合成関数の微分法による．$t = x^2 + 1$，$y = t^5$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 5t^4 \cdot 2x = 10x(x^2+1)^4 \qquad \text{(答)}$$

(9) 合成関数の微分法による．$t = x^2 - 2x$，$y = \dfrac{1}{t} = t^{-1}$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -t^{-2} \cdot (2x-2) = -\frac{2x-2}{(x^2-2x)^2} \qquad \text{(答)}$$

(10) 積の微分法と，合成関数の微分法を用いる．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1 \cdot (2x-7)^4 + (x+1) \cdot 4(2x-7)^3 \cdot 2 \\ &= \{(2x-7) + 8(x+1)\}(2x-7)^3 \\ &= (10x+1)(2x-7)^3 \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(11) 積の微分法を用いる．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x+1)'(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)'(x+3) + (x+1)(x+2)(x+3)' \\ &= (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) \\ &= 3x^2 + 12x + 11. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(12) まず分子を分母で割り，その後商の微分法を用いる．

$$y = \frac{x^2-5x+6}{x-1} = x - 4 + \frac{2}{x-1}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \qquad \text{(答)}$$

(13) 合成関数の微分法を用いる．$y = (2-x^3)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2-x^3)^{\frac{1}{2}-1}(2-x^3)' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{2-x^3}} \qquad \text{(答)}$$

添削課題 6 − 2

x，y は次の関係を満たす．このとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．x のみの式で表さなくてもよい．

(1) $4x^2 + 9y^2 = 36$　　(2) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$

解答・解説

(1) $4x^2 + 9y^2 = 36$ の両辺を x で微分して

$$4 \cdot 2x + 9 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$ の両辺を x で微分して

$$2x + 3\left(y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x + 4y)\frac{dy}{dx} = -(2x + 3y)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 4y} \qquad \text{(答)}$$

Lecture 7　微分法 (5)　指数・対数関数の導関数 - 解答

演習問題 7 − 1

次の関数を微分せよ．

(1) $y = e^x + x^2 + 1$　(2) $y = e^{2x+1}$　(3) $y = e^{x^2+x+3}$

(4) $y = (e^x + x)^3$　(5) $y = \sqrt{e^x + 1}$　(6) $y = \dfrac{1}{e^x + x^2}$

(7) $y = \dfrac{1}{2}xe^x$　(8) $y = (x+1)^3 e^x$　(9) $y = \sqrt{x}e^{2x}$

(10) $y = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$　(11) $y = 2^x$　(12) $y = x \cdot 3^x$

解答・解説

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^x + 2x$　(答)

(2) 合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+1} \cdot (2x+1)' = 2e^{2x+1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x+3} \cdot (x^2+x+3)' = (2x+1)e^{x^2+x+3} \qquad \text{(答)}$$

(4) 合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 3(e^x+x)^2 \cdot (e^x+x)' = 3(e^x+x)^2(e^x+1) \qquad \text{(答)}$$

(5) 合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (e^x+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (e^x+1)' = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}} \qquad \text{(答)}$$

(6) $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$，および合成関数の微分法を用いる．$y = (e^x + x^2)^{-1}$ より

$$\frac{dy}{dx} = (-1) \cdot (e^x+x^2)^{-2} \cdot (e^x+x^2)' = -\frac{e^x+2x}{(e^x+x^2)^2} \qquad \text{(答)}$$

(7) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{(x)'e^x + x(e^x)'\right\} = \frac{1}{2}\left(e^x + xe^x\right) = \frac{1}{2}(1+x)e^x \qquad \text{(答)}$$

(8) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 3(x+1)^2 \cdot e^x + (x+1)^3 \cdot e^x = (x+4)(x+1)^2 e^x \qquad \text{(答)}$$

(9) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^{\frac{1}{2}} e^{2x}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} + \sqrt{x} \cdot 2e^{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x} + 2\sqrt{x} e^{2x} = \frac{4x+1}{2\sqrt{x}} e^{2x} \qquad \text{(答)}$$

(10) 商の微分法と合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(e^{2x}\right)'(x+1) - e^{2x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}}{(x+1)^2} = \frac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2} \qquad \text{(答)}$$

(11) $\dfrac{dy}{dx} = 2^x \log 2 \qquad$ (答)

(12) 積の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot 3^x + x \cdot 3^x \log 3 = 3^x (1 + x \log 3) \qquad \text{(答)}$$

演習問題 7 − 2

次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^4 + \log x$　(2) $y = (x + \log x)^3$　(3) $y = \dfrac{1}{x + \log x}$

(4) $y = x \log x$　(5) $y = \dfrac{\log x}{x+1}$　(6) $y = \log(3x+1)$

(7) $y = \log(x^2 + 2x + 5)$　(8) $y = \log_3 x$　(9) $y = \log_{x+1} 5$

解答・解説

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + \dfrac{1}{x}$　(答)

(2) 合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 3(x + \log x)^2 \cdot (x + \log x)' = 3(x + \log x)^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \text{(答)}$$

(3) 合成関数の微分法を用いる．$y = (x + \log x)^{-1}$ より

$$\frac{dy}{dx} = (-1) \cdot (x + \log x)^{-2} \cdot (x + \log x)' = -\frac{x+1}{x(x + \log x)^2} \qquad \text{(答)}$$

(4) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \log x \qquad \text{(答)}$$

(5) 商の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot (x+1) - \log x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x - x\log x + 1}{x(x+1)^2} \qquad \text{(答)}$$

(6) 合成関数の微分法を用いる．$t = 3x + 1$，$y = \log t$ として

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot 3 = \frac{3}{3x+1} \qquad \text{(答)}$$

(7) 合成関数の微分法を用いる．$t = x^2 + 2x + 5$，$y = \log t$ として

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot (2x+2) \\ &= \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 5} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(8) 底の変換公式より，

$$\log_3 x = \frac{\log x}{\log 3}$$

である．ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log 3} \qquad \text{(答)}$$

(9) 底の変換公式より，

$$\log_{x+1} 5 = \frac{\log 5}{\log(x+1)} = (\log 5) \{\log(x+1)\}^{-1}$$

である．ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = (\log 5) \cdot (-1) \cdot \{\log(x+1)\}^{-2} \cdot \frac{1}{x+1} = -\frac{\log 5}{(x+1) \{\log(x+1)\}^{2}} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 7 − 3

対数微分法を用いて，次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$　　(2) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \quad (0 < x < 1)$

解答・解説

(1) $y = x^{\sqrt{x}}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)$$

よって

$$y' = y\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \frac{1}{2}\log(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{x})$$

両辺を x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{4\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

よって

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^3}} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 7 − 4

$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)$ に対して $g(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$ とし，$g(x)$ の逆関数を $h(x)$ とする．

(1) $g(x)$ を求めよ．

(2) $h(x)$ を求めよ．

(3) $\dfrac{d}{dx}h(x)$ を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ であるから

$$g(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) $y=g(x)$ とおくと

$$y=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

より

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

よって，$e^x>0$ より

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

すなわち

$$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$$

したがって

$$h(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の結果より

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}h(x) &= \frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

添削課題 $\mathbf{7-1}$

次の関数を微分せよ．

(1) $y = e^x + x^3$　(2) $y = e^{2x+1}$　(3) $y = e^{x^2+x+1}$

(4) $y = x^2 e^{3x}$　(5) $y = \dfrac{e^x + 1}{x}$　(6) $y = (e^x + x^2 - 1)^3$

(7) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$　(8) $y = \sqrt[3]{e^x + 1}$　(9) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(10) $y = 5^x$　(11) $y = 3^{2x+1}$　(12) $y = x \cdot 2^x$

解答・解説

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^x + 3x^2$　(答)

(2) 合成関数の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+1} \cdot (2x+1)' = 2e^{2x+1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 合成関数の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+x+1} \cdot (x^2+x+1)' = (2x+1)e^{x^2+x+1} \qquad \text{(答)}$$

(4) 積の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = x(3x+2)e^{3x} \qquad \text{(答)}$$

(5) 商の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x - (e^x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2} \qquad \text{(答)}$$

(6) 合成関数の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = 3(e^x + x^2 - 1)^2 \cdot (e^x + x^2 - 1)' = 3(e^x + 2x)(e^x + x^2 - 1)^2 \qquad \text{(答)}$$

(7) $y = (e^x - 1)^{-1}$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = (-1) \cdot (e^x - 1)^{-2} \cdot (e^x - 1)' = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \qquad \text{(答)}$$

(8) $y = (e^x + 1)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(e^x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (e^x + 1)' = \frac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x + 1)^2}} \qquad \text{(答)}$$

(9) 商の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \qquad \text{(答)}$$

(10) $\dfrac{dy}{dx} = 5^x \log 5 \qquad$ (答)

(11) 合成関数の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 3^{2x+1} \cdot \log 3 \cdot (2x+1)' = 2 \log 3 \cdot 3^{2x+1} \qquad \text{(答)}$$

(12) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \log 2 = (x \log 2 + 1)2^x \qquad \text{(答)}$$

添削課題 **7 − 2**

次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log x + \sqrt{x}$　(2) $y = (x+1)\log x$　(3) $y = \log(3x+1)$

(4) $y = e^x \log(x^2+1)$　(5) $y = \dfrac{\log x}{x}$　(6) $y = \log_2(x+1)$

解答・解説

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　(答)

(2) 積の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \log x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{(答)}$$

(3) 合成関数の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x+1} \cdot (3x+1)' = \frac{3}{3x+1} \qquad \text{(答)}$$

(4) 積の微分法および合成関数の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \log(x^2+1) + e^x \cdot \frac{2x}{x^2+1} = e^x \log(x^2+1) + \frac{2xe^x}{x^2+1} \qquad \text{(答)}$$

(5) 商の微分法による．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \qquad \text{(答)}$$

(6) 底の変換公式より $\log_2(x+1) = \dfrac{\log(x+1)}{\log 2}$．ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' = \frac{1}{(x+1)\log 2} \qquad \text{(答)}$$

添削課題 $\mathbf{7-3}$

$y = x^{x+2}$（ただし，$x > 0$）とする．$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解答・解説

辺々，自然対数をとり

$$\begin{aligned}\log y &= \log x^{x+2}\\ \log y &= (x+2)\log x\end{aligned}$$

辺々，x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= 1\cdot\log x + (x+2)\cdot\frac{1}{x}\\ \frac{dy}{dx} &= y\cdot\left(\log x + 1 + \frac{2}{x}\right) = x^{x+2}\left(\log x + 1 + \frac{2}{x}\right) \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

M2JD

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号	

氏　名	