M1TK

本科 1 期 5 月度

解答

Z会東大進学教室

高 1 難関大数学 K

問題

【1】(1) 頂点の座標が (1, 3) であるから，求める方程式は

$$y = a(x-1)^2 + 3 \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが (−3, 5) を通ることから

$$5 = a(-3-1)^2 + 3$$

よって，$a = \dfrac{1}{8}$ より，求める方程式は

$$y = \frac{1}{8}(x-1)^2 + 3 = \boldsymbol{\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{25}{8}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 軸の方程式が $x = -1$ だから，求める方程式は

$$y = a(x+1)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが，2 点 (0, 3), (1, 9) を通ることから

$$\begin{cases} 3 = a(0+1)^2 + q & \cdots ① \\ 9 = a(1+1)^2 + q & \cdots ② \end{cases}$$

これより，$a = 2,\ q = 1$ だから，求める方程式は

$$y = 2(x+1)^2 + 1 = \boldsymbol{2x^2 + 4x + 3} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) (1, 4), (−3, 4) の y 座標は等しいから，軸はこの 2 点の中点を通る．すなわち，軸の方程式は

$$x = -1$$

である．そして，頂点は x 軸上にあるから，その座標は

$$(-1,\ 0)$$

よって，求める放物線は

$$y = a(x+1)^2 \quad (a \neq 0)$$

と表せる．これが (1, 4) を通るから

$$4 = a(1+1)^2 \qquad \therefore \quad a = 1$$

よって

$$y = (x+1)^2 = \boldsymbol{x^2 + 2x + 1} \qquad \textbf{(答)}$$

【2】(1) (1, 1), (3, 1) の y 座標は等しいから，軸はこの 2 点の中点を通る．すなわち，軸の方程式は

$$x = 2$$

である．よって，求める放物線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= a(x-2)^2 + b \\ &= ax^2 - 4ax + 4a + b \quad \cdots ① \quad (a \fallingdotseq 0) \end{aligned}$$

と表せる．そして，y 切片が -3 だから

$$4a + b = -3 \quad \cdots ②$$

①が (1, 1) を通るから

$$1 = a - 4a + 4a + b \qquad \therefore \quad a + b = 1 \cdots ③$$

②, ③ より

$$3a = -4 \qquad \therefore \quad a = -\frac{4}{3}$$

よって

$$b = \frac{7}{3}$$

より

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{3}(x-2)^2 + \frac{7}{3} \\ &= \boldsymbol{-\frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - 3} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) 求める方程式を $y = ax^2 + bx + c$ $(a \fallingdotseq 0)$ とおくと

(−1, 7) を通るから，　$7 = a - b + c \quad \cdots ①$
(1, 1) を通るから，　$1 = a + b + c \quad \cdots ②$
(2, 4) を通るから，　$4 = 4a + 2b + c \quad \cdots ③$

② − ① より

$$\begin{aligned} -6 &= 2b \\ b &= -3 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

④を ①, ③ に代入して

$$\begin{aligned} 7 &= a + 3 + c \quad \cdots ①' \\ 4 &= 4a - 6 + c \quad \cdots ③' \end{aligned}$$

①′, ③′ を解いて $a = 2,\ c = 2$

以上より，$\boldsymbol{y = 2x^2 - 3x + 2}$　**(答)**

(3) 求める方程式を $y = ax^2 + bx + c$ $(a \fallingdotseq 0)$ とおく．

(−1, 18) を通るから，　$18 = a - b + c \quad \cdots ①$
(3, 2) を通るから，　$2 = 9a + 3b + c \quad \cdots ②$
(4, 8) を通るから，　$8 = 16a + 4b + c \quad \cdots ③$

③ − ② より

$$\begin{aligned}&6 = 7a + b\\&b = 6 - 7a \quad \cdots ④\end{aligned}$$

④を①に代入して

$$18 = a - (6 - 7a) + c \qquad c = -8a + 24 \quad \cdots ①'$$

④を②に代入して

$$2 = 9a + 3(6 - 7a) + c \qquad c = 12a - 16 \quad \cdots ②'$$

①′, ②′ を解いて $a = 2,\ c = 8$

これを④に代入して，$b = -8$

以上より，$\boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 8}$ **(答)**

【3】(1) x 軸に接することより，求める方程式は

$$y = a(x - p)^2 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．これが (2, −1), (5, −4) を通ることから

$$\begin{aligned}&-1 = a(2 - p)^2 \quad \cdots ①\\&-4 = a(5 - p)^2 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① × 4 − ② より

$$3ap^2 - 6ap - 9a = 0$$

ここで，$a \fallingdotseq 0$ より

$$\begin{aligned}&3p^2 - 6p - 9 = 0\\&p^2 - 2p - 3 = 0\\&(p - 3)(p + 1) = 0\\&p = 3,\ -1\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}&p = 3 \text{ のとき，} \quad a = -1\\&p = -1 \text{ のとき，} \quad a = -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{y = -(x - 3)^2, \quad y = -\frac{1}{9}(x + 1)^2} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 軸の方程式が $x = 1$ だから，求める方程式は

$$y = a(x - 1)^2 + q \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．

これが，(1, 8) を通ることから

$$q = 8$$

また，x 軸の 2 つの交点の距離が 4 であることから，このグラフは軸から 2 ずつ離れた 2 点 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ を通る．
よって，$(-1,\ 0)$ を $y = a(x-1)^2 + 8$ に代入して

$$0 = a \times (-2)^2 + 8$$

これより，$a = -2$ だから，求める方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2 + 8 \\ &= \boldsymbol{-2x^2 + 4x + 6} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【4】$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 3$ とおく．

① $y = f(x)$ を y 軸に関して対称移動したグラフの方程式は

$$x \longrightarrow -x$$

として

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + (-x) - 3$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3} \qquad \textbf{(答)}$$

② $y = f(x)$ を x 軸に関して対称移動したグラフの方程式は

$$y \longrightarrow -y$$

として

$$-y = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3} \qquad \textbf{(答)}$$

③ $y = f(x)$ を原点に関して対称移動したグラフの方程式は

$$x \longrightarrow -x, \quad y \longrightarrow -y$$

として

$$-y = \frac{1}{2} \cdot (-x)^2 + (-x) - 3$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】3 点 $(0,\ 3)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 10)$ を通る放物線を C とするとき，求める放物線は C を原点に関して対称移動したものである．
C の方程式を

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

とおく．(0, 3) を通るから，

$$3 = c \quad \cdots①$$

(1, −2) を通るから

$$-2 = a + b + c \quad \cdots②$$

さらに (−1, 10) を通るから

$$10 = a - b + c \quad \cdots③$$

① を ②，③ に代入して

$$\begin{cases} a + b = -5 & \cdots④ \\ a - b = 7 & \cdots⑤ \end{cases}$$

④ + ⑤ より

$$2a = 2 \qquad \therefore \quad a = 1$$

④ − ⑤ より

$$2b = -12 \qquad \therefore \quad b = -6$$

ゆえに

$$C : y = x^2 - 6x + 3$$

これを原点に関して対称移動する．

$$x \longrightarrow -x, \quad y \longrightarrow -y$$

として，求める方程式は

$$-y = (-x)^2 - 6(-x) + 3$$

ゆえに

$$\boldsymbol{y = -x^2 - 6x - 3} \qquad \text{(答)}$$

【6】放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ が点 (1, 1) を通るから

$$1 = 1 + 2a + b$$

よって $b = -2a \quad \cdots①$．
与式に代入して

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + b &= x^2 + 2ax - 2a \\ &= (x + a)^2 - a^2 - 2a \end{aligned}$$

したがって，頂点の座標は

$$\left(-a,\ -a^2 - 2a\right)$$

である．これが直線 $x+y-2=0$ 上にあるから

$$-a-a^2-2a-2=0$$

整理して

$$a^2+3a+2=0$$
$$\therefore\quad (a+1)(a+2)=0$$

ゆえに

$$a=-1,\ -2$$

①とから，$b=2,\ 4$．ゆえに求める値は

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(-1,\ 2),\ (-2,\ 4)}\qquad (答)$$

【7】$y=-\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ を平行移動したグラフの方程式は

$$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$$

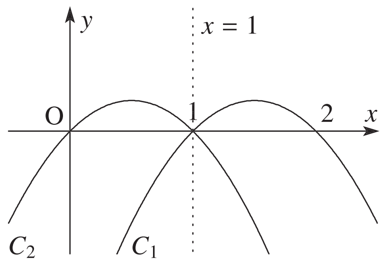
とおくことができる．これに $(0,\ -5),\ (4,\ -9)$ を代入して

$$-5=c$$
$$-9=-8+4b+c$$

連立して解くと，$b=1,\ c=-5.$
よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x^2+x-5}\qquad (答)$$

【8】(1) 条件をみたす C_1，C_2 を図示すると，右図のようになる．



C_1 は，C_2 を x 軸正方向に 1 だけ平行移動した放物線である．C_2 の方程式で

$$x \longrightarrow x-1$$

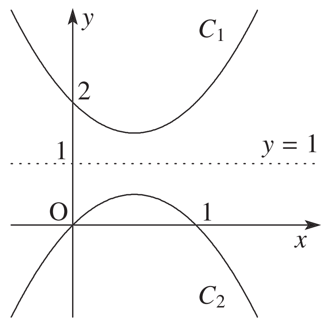
として

$$C_1\ :\ y=(x-1)\{1-(x-1)\}$$
$$=-x^2+3x-2$$

係数を比較して

$$\boldsymbol{a=-1,\quad b=3,\quad c=-2}\qquad (答)$$

(2) 条件をみたす C_1，C_2 を図示すると，右図のようになる．



C_1 は，C_2 を x 軸に関して対称移動したあと，y 軸正方向に 2 だけ平行移動したものである．

C_2 を x 軸に関して対称移動すると，C_2 の方程式で

$$y \longrightarrow -y$$

として

$$-y = x(1-x)$$
$$\therefore \quad y = x^2 - x$$

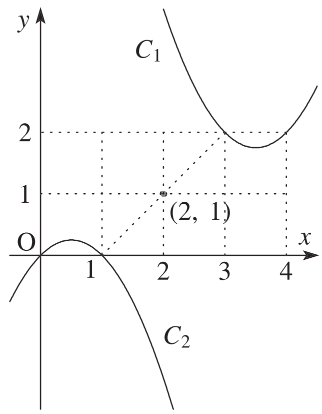
これを y 軸正方向に 2 だけ平行移動して

$$y - 2 = x^2 - x$$
$$\therefore \quad y = x^2 - x + 2$$

係数を比較して

$$\boldsymbol{a = 1, \quad b = -1, \quad c = 2} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件をみたす C_1，C_2 を図示すると，右図のようになる．C_1 は，C_2 を x 軸に関して対称移動したあと，x 軸正方向に 3，y 軸正方向に 2 だけ平行移動したグラフである．



まず C_2 を x 軸に関して対称移動する．$y \longrightarrow -y$ として

$$-y = x(1-x)$$
$$\therefore \quad y = x(x-1)$$

ここで

$$x \longrightarrow x-3, \quad y \longrightarrow y-2$$

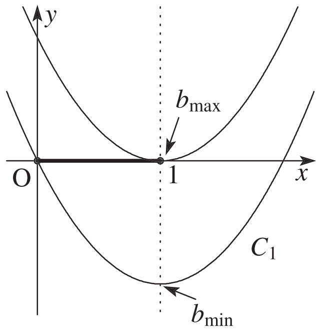
として

$$y - 2 = (x-3)(x-4)$$
$$\therefore \quad y = x^2 - 7x + 14$$

ゆえに

$$\boldsymbol{a = 1, \quad b = -7, \quad c = 14} \qquad \text{(答)}$$

【9】(1) 問題の放物線を C_1 ： $y=(x-1)^2+b$ とする．C_1 の頂点は $(1,\ b)$ であるから，b の値が変化すると C_1 は右図のように y 軸に平行に動く．



(i) b が最大値をとるのは，C_1 が点 $(1,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0=(1-1)^2+b$$
$$\therefore\quad b=0$$

(ii) b が最小値をとるのは，C_1 が点 $(0,\ 0)$ を通るとき．代入して

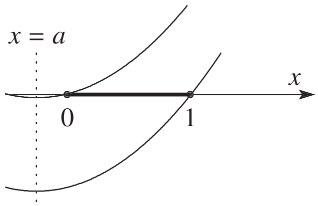
$$0=(0-1)^2+b$$
$$\therefore\quad b=-1$$

以上より，求める b の値の範囲は

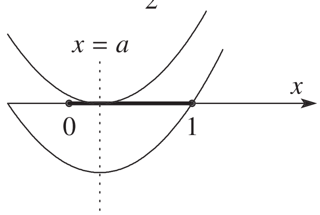
$\boldsymbol{-1 \leqq b \leqq 0}$　　(答)

(2) 問題の放物線を C_2 ： $y=(x-a)^2+b$ とする．軸 $x=a$ の位置で場合を分ける．

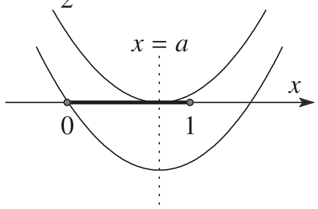
(i) $a \leqq 0$ のとき.



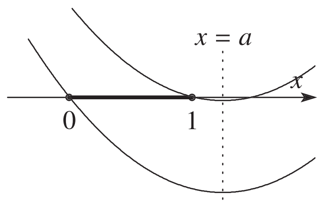
(ii) $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき.



(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき.



(iv) $1 \leqq a$ のとき.



(i) $a \leqq 0$ のとき.

b が最大値をとるのは，C_2 が点 $(0,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0=(0-a)^2+b \iff b=-a^2$$

また b が最小値をとるのは，C_2 が点 $(1,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0=(1-a)^2+b \iff b=-(a-1)^2$$

ゆえに

$$-(a-1)^2 \leqq b \leqq -a^2$$

(ii) $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき．

b が最大値をとるのは，C_2 が $(a,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0 = (a-a)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0$$

また b が最小値をとるのは，C_2 が点 $(1,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0 = (1-a)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -(a-1)^2$$

ゆえに

$$-(a-1)^2 \leqq b \leqq 0$$

(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき．

b が最大値をとるのは，C_2 が $(a,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0 = (a-a)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0$$

また b が最小値をとるのは，C_2 が点 $(0,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0 = (-a)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -a^2$$

ゆえに

$$-a^2 \leqq b \leqq 0$$

(iv) $1 \leqq a$ のとき．

b が最大値をとるのは，C_2 が $(1,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0 = (1-a)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -(a-1)^2$$

また b が最小値をとるのは，C_2 が点 $(0,\ 0)$ を通るとき．代入して

$$0 = (0-a)^2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -a^2$$

ゆえに

$$-a^2 \leqq b \leqq -(a-1)^2$$

以上より，求める条件は

$$\boldsymbol{\begin{cases} -(a-1)^2 \leqq b \leqq -a^2 & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ -(a-1)^2 \leqq b \leqq 0 & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ -a^2 \leqq b \leqq 0 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}\right) \\ -a^2 \leqq b \leqq -(a-1)^2 & (1 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}} \qquad \text{(答)}$$

【10】$y=f(x)$ のグラフを直線 $x=a$ に関して対称移動するとは，

① x 軸正方向に $-a$ だけ平行移動し，

② y 軸に関して対称移動し，

③ x 軸正方向に a だけ平行移動する

ことと同じである．

① $y=f(x)$ のグラフを x 軸正方向に $-a$ だけ平行移動する．すなわち

$$x \longrightarrow x+a$$

として

$$y=f(x+a)$$

② 次にこのグラフを y 軸に関して対称移動する．すなわち

$$x \longrightarrow -x$$

として

$$y=f(-x+a)$$

③ 最後にこのグラフを x 軸正方向に a だけ平行移動する．すなわち

$$x \longrightarrow x-a$$

として

$$y=f(-(x-a)+a)=f(2a-x)$$

以上により示された．　〔証明終〕

<別解>

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を，直線 $x=a$ に関して対称移動した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とする．
P は $y=f(x)$ 上の点であるから，

$$Y=f(X) \quad \cdots(*)$$

また PQ の中点が $x=a$ 上にあり，PQ と直線 $x=a$ は垂直であるから

$$\frac{X+x}{2}=a, \quad Y=y$$

ゆえに

$$X=2a-x, \quad Y=y$$

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ は $(*)$ 上の点であるから，代入して

$$y=f(2a-x)$$

これが Q のみたす方程式，すなわち $y=f(x)$ を $x=a$ に関して対称移動したグラフの方程式である．　〔証明終〕

添削課題

【1】(1) 求める放物線の方程式は，$y=2(x-a)^2+b$ とおける．$(-1,\ 3),\ (2,\ -3)$ を通るので

$$\begin{cases} 3=2(1+a)^2+b & \cdots ① \\ -3=2(2-a)^2+b & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$6=2\{(1+a)^2-(2-a)^2\}$$

$$\therefore\ 3=-3+6a$$

$$\therefore\ a=1$$

また，①より $b=-5$．よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{y=2(x-1)^2-5=2x^2-4x-3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式は，$y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-2$ と変形できる．ここで求める放物線は，x 軸と接するから

$$y=\frac{1}{2}(x-a)^2$$

と表せる．そしてグラフが $(1,\ 2)$ を通るから

$$2=\frac{1}{2}(1-a)^2 \qquad \therefore\ a^2-2a-3=0$$

これより

$$(a-3)(a+1)=0 \qquad \therefore\ a=-1,\ 3$$

よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}(x+1)^2,\quad y=\frac{1}{2}(x-3)^2} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $y=a(x+2)^2+5$ とおける．$(0,\ 1)$ を通るので，$1=4a+5$ より，$a=-1$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-(x+2)^2+5=-x^2-4x+1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 頂点が，$(-1,\ 1)$ であるから，この 2 次関数は $y=a(x+1)^2+1$ と表される．グラフが点 $(1,\ -7)$ を通るから

$$-7=4a+1 \qquad \therefore\ a=-2$$

よって，$y=-2(x+1)^2+1$ すなわち

$$\boldsymbol{y=-2x^2-4x-1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める 2 次関数は $y=a(x-1)(x-2)$ とおける．点 $(0,\ -8)$ を通るので代入すると，$a=-4$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-4x^2+12x-8} \qquad \text{(答)}$$

(4) x 軸に接するので，求める 2 次関数を $y = a(x-b)^2$ とおく．2 点 $(1,\ 8)$, $(4,\ 2)$ を通るから

$$\begin{cases} a(1-b)^2 = 8 & \cdots ① \\ a(4-b)^2 = 2 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より a を消去すると

$$4(4-b)^2 = (1-b)^2 \qquad \therefore b^2 - 10b + 21 = 0$$

これより

$$(b-3)(b-7) = 0 \qquad \therefore b = 3,\ 7$$

ここで，$b = 3$ のとき $a = 2$, $b = 7$ のとき $a = \dfrac{2}{9}$ だから求める方程式は

$$\boldsymbol{y = 2(x-3)^2,\quad y = \frac{2}{9}(x-7)^2} \qquad \text{(答)}$$

(5) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ とおくと

$(0,\ 6)$ を通るから，　$6 = c$　$\cdots ①$
$(1,\ 0)$ を通るから，　$0 = a + b + c$　$\cdots ②$
$(2,\ -2)$ を通るから，　$-2 = 4a + 2b + c$　$\cdots ③$

③ − ② × 2 より

$$2a - 6 = -2 \qquad \therefore a = 2$$

②に代入して，$b = -8$

$$\therefore \boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 6} \qquad \text{(答)}$$

(6) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ とおくと

$(-1,\ 2)$ を通るから，　$2 = a - b + c$　$\cdots ①$
$(0,\ 7)$ を通るから，　$7 = c$　$\cdots ②$
$(1,\ -10)$ を通るから，　$-10 = a + b + c$　$\cdots ③$

③ − ① より

$$-12 = 2b \qquad \therefore b = -6$$

これと，①, ② より

$$a = b - c + 2 = -11$$

よって，求める放物線の方程式は

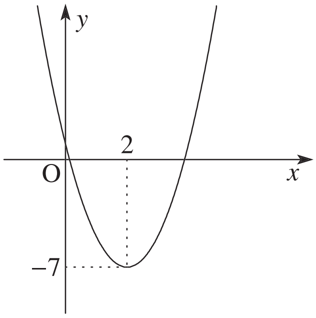
$$\boldsymbol{y = -11x^2 - 6x + 7} \qquad \text{(答)}$$

５章　２次関数（３）－最大・最小（１）－

問題

【1】(1) 与式を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 1 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 1 \\ &= 2(x-2)^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 \\ &= 2(x-2)^2 - 7 \end{aligned}$$

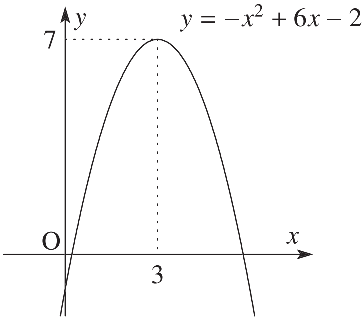


ゆえに

$\begin{cases} \textbf{最大値　なし} \\ \textbf{最小値}\quad \boldsymbol{-7}\quad \boldsymbol{(x = 2}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$ (答)

(2) 与式を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x - 2 \\ &= -(x^2 - 6x) - 2 \\ &= -(x-3)^2 + 7 \end{aligned}$$

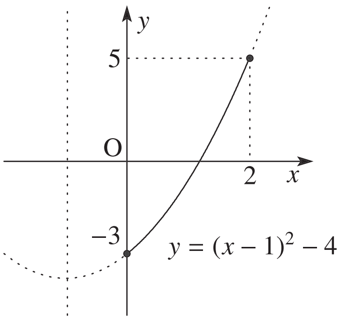


ゆえに

$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad \boldsymbol{7}\quad \boldsymbol{(x = 3}\ \textbf{のとき)} \\ \textbf{最小値　なし} \end{cases}$ (答)

(3) $f(x) = (x+1)^2 - 4$ とおくと

最大値　$f(2) = 3^2 - 4 = 5$
最小値　$f(0) = 1^2 - 4 = -3$

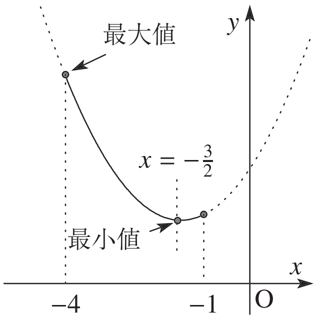


よって

$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad \boldsymbol{5}\quad \boldsymbol{(x = 2}\ \textbf{のとき)} \\ \textbf{最小値}\quad \boldsymbol{-3}\quad \boldsymbol{(x = 0}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$ (答)

(4) 与式を $f(x)$ とおくと，

$$f(x) = \left\{x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 5$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$



ゆえに

最大値は $f(-4) = (-4)^2 + 3 \cdot (-4) + 5 = 9$

最小値は $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0^2 + \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$

よって

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \mathbf{9} & (\boldsymbol{x = -4} \textbf{ のとき}) \\ \textbf{最小値} \quad \boldsymbol{\frac{11}{4}} & \left(\boldsymbol{x = -\frac{3}{2}} \textbf{ のとき}\right) \end{cases}$$ (答)

【2】与えられた関数を $f(x)$ とおく．すなわち

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

(1) ① $0 \leqq a \leqq 1$ のとき.

図より，$f(x)$ の最小値は $x = a$ のとき

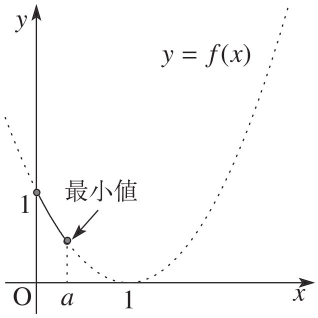
$f(a) = \boldsymbol{a^2 - 2a + 1}$ (答)

② $1 \leqq a$ のとき.

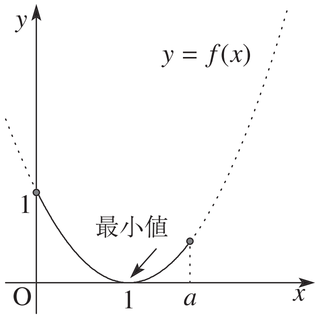
図より，$f(x)$ の最小値は $x = 1$ のとき

$f(1) = \mathbf{0}$ (答)

① $0 \leqq a \leqq 1$ のとき.



② $1 \leqq a$ のとき.



(2) ① $0 \leqq a \leqq 2$ のとき.

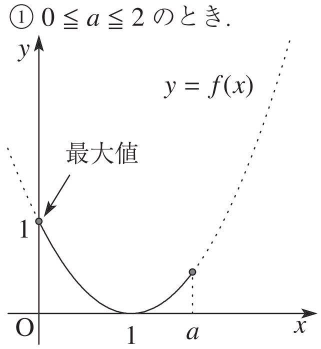
図より，$f(x)$ の最大値は $x = 0$ のとき

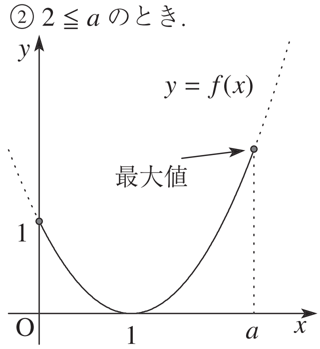
$f(0) = \mathbf{1}$ (答)

② $2 \leqq a$ のとき.

図より，$f(x)$ の最大値は $x = a$ のとき

$$f(a) = \boldsymbol{a^2 - 2a + 1} \qquad (答)$$





【3】与式を平方完成すると

$$f(x) = (x - a)^2 - 2a \quad (0 \leqq x \leqq 4)$$

(1) ① $a \leqq 0$ のとき.

グラフより，$f(x)$ の最小値は $x = 0$ のとき

$$f(0) = \boldsymbol{a^2 - 2a} \qquad (答)$$

② $0 \leqq a \leqq 4$ のとき.

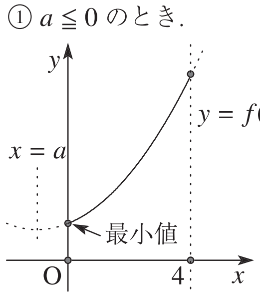
グラフより，$f(x)$ の最小値は $x = a$ のとき

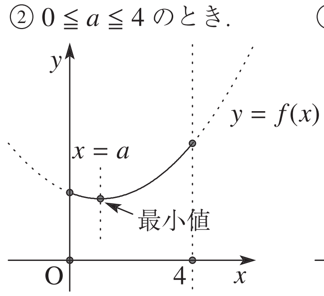
$$f(a) = \boldsymbol{-2a} \qquad (答)$$

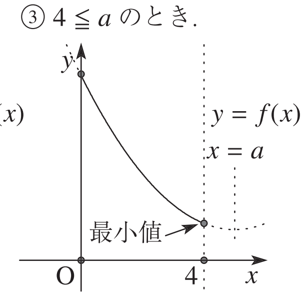
③ $4 \leqq a$ のとき.

グラフより，$f(x)$ の最小値は $x = 4$ のとき

$$f(4) = \boldsymbol{a^2 - 10a + 16} \qquad (答)$$







(2) ① $a \leqq 2$ のとき.

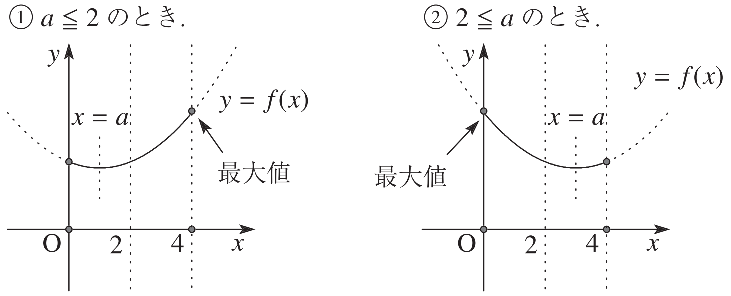
グラフより，$f(x)$ の最大値は $x = 4$ のとき

$$f(4) = \boldsymbol{a^2 - 10a + 16} \qquad (答)$$

② $2 \leqq a$ のとき.

グラフより，$f(x)$ の最大値は $x = 0$ のとき

$$f(0) = \boldsymbol{a^2 - 2a} \qquad (答)$$



【4】与式を $f(x)$ とおいて平方完成すると

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$= (x-2)^2 - 1 \quad (a \leqq x \leqq a+1)$$

(1) 定義域 $a \leqq x \leqq a+1$ に対する，軸の位置で場合を分ける.

(i) $a + 1 \leqq 2 \iff a \leqq 1$ のとき.

最小値は $x = a+1$ のとき,

$$m(a) = f(a+1) = (a+1)^2 - 4(a+1) + 3 = a^2 - 2a$$

(ii) $a \leqq 2 \leqq a+1 \iff 1 \leqq a \leqq 2$ のとき.

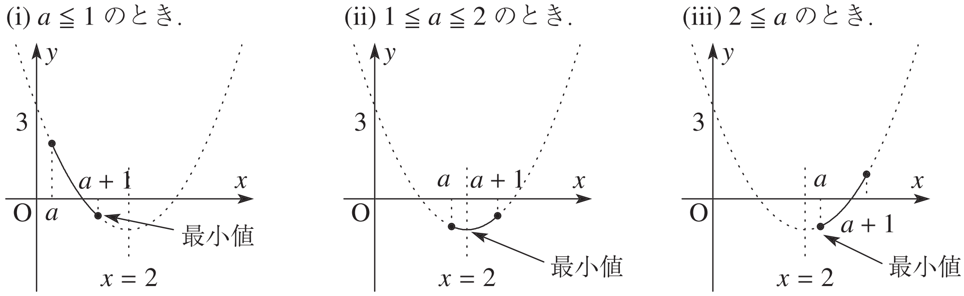
最小値は $x = 2$ のとき

$$m(a) = f(2) = -1$$

(iii) $2 \leqq a$ のとき.

最小値は $x = a$ のとき

$$m(a) = f(a) = a^2 - 4a + 3$$

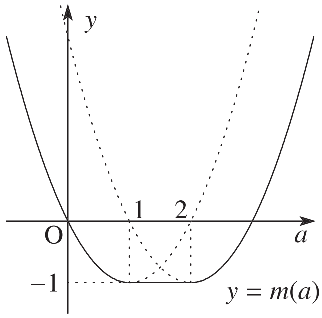


以上より，求める最小値 $m(a)$ は

$$m(a)=\begin{cases}\boldsymbol{a^2-2a} & \textbf{(}\boldsymbol{a \leqq 1}\ \textbf{のとき)}\\ \boldsymbol{-1} & \textbf{(}\boldsymbol{1 \leqq a \leqq 2}\ \textbf{のとき)}\\ \boldsymbol{a^2-4a+3} & \textbf{(}\boldsymbol{2 \leqq a}\ \textbf{のとき)}\end{cases}$$

(答)

また $y=m(a)$ のグラフは右図.



(2) 定義域の中央

$$x=\frac{a+(a+1)}{2}=a+\frac{1}{2}$$

に対する，軸の位置で場合を分ける.

(i) $a+\dfrac{1}{2} \leqq 2 \iff a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき.

最大値は $x=a$ のとき

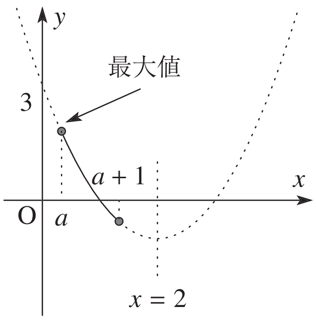
$$M(a)=f(a)=a^2-4a+3$$

(ii) $2 \leqq a+\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{3}{2} \leqq a$ のとき.

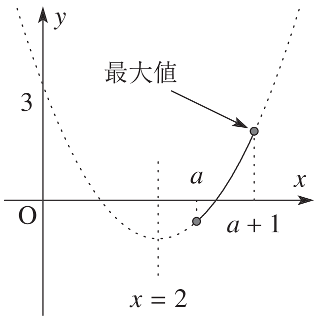
最大値は $x=a+1$ のとき

$$M(a)=f(a+1)=a^2-2a$$

(i) $a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき.



(ii) $\dfrac{3}{2} \leqq a$ のとき.

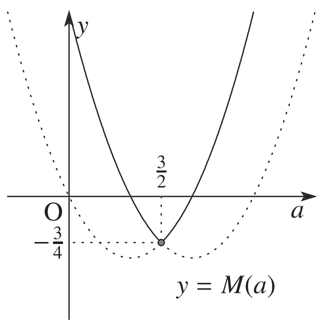


以上より，求める最大値は

$$M(a)=\begin{cases}\boldsymbol{a^2-4a+3} & \left(\boldsymbol{a \leqq \dfrac{3}{2}}\ \textbf{のとき}\right)\\ \boldsymbol{a^2-2a} & \left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2} \leqq a}\ \textbf{のとき}\right)\end{cases}$$

(答)

また $y=M(a)$ のグラフは右図.



【5】与式を平方完成すると

$$f(x) = (x - 2a)^2 - 4a^2 + 4a + 5 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$$

(1) 定義域に対する，軸の位置で場合を分ける.

(i) $2a \leqq 0 \iff a \leqq 0$ のとき.

最小値は $x = 0$ のとき

$$f(0) = 4a + 5$$

(ii) $0 \leqq 2a \leqq 4 \iff 0 \leqq a \leqq 2$ のとき.

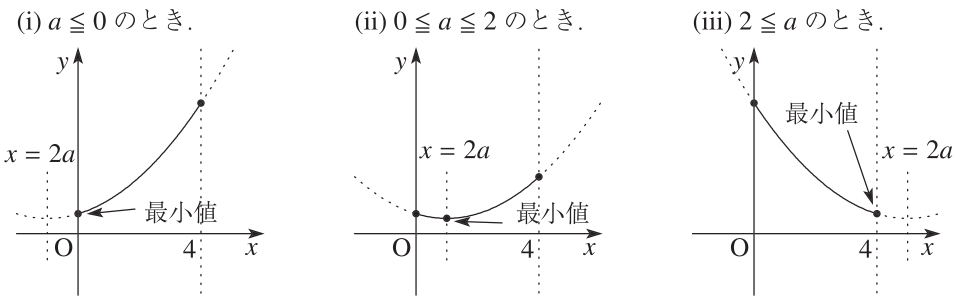
最小値は $x = 2a$ のとき

$$f(2a) = -4a^2 + 4a + 5$$

(iii) $4 \leqq 2a \iff 2 \leqq a$ のとき.

最小値は $x = 4$ のとき

$$f(4) = -12a + 21$$



以上より，求める最小値は

$$\begin{cases} \mathbf{4a + 5} & (\boldsymbol{a \leqq 0} \text{ のとき}) \\ \mathbf{-4a^2 + 4a + 5} & (\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 2} \text{ のとき}) \\ \mathbf{-12a + 21} & (\boldsymbol{2 \leqq a} \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 定義域の中央

$$x = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

に対する軸の位置関係で場合を分ける.

(i) $2a \leqq 2 \iff a \leqq 1$ のとき.

最大値は $x = 4$ のとき

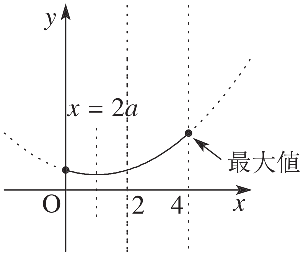
$$f(4) = -12a + 21$$

(ii) $2 \leqq 2a \iff 1 \leqq a$ のとき.

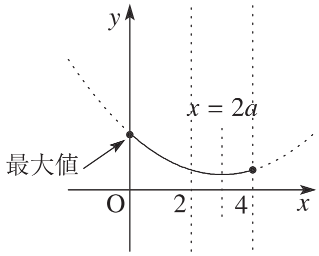
最大値は $x = 0$ のとき

$$f(0) = 4a + 5$$

(i) $a \leqq 1$ のとき.



(ii) $1 \leqq a$ のとき.



以上より，求める最大値は

$$\begin{cases} \mathbf{-12a + 21} & \mathbf{(a \leqq 1\ \text{のとき})} \\ \mathbf{4a + 5} & \mathbf{(1 \leqq a\ \text{のとき})} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

【6】(1) $y = (x-1)^2 - 1 + a$ より，最小値は $x = 1$ のとき．ゆえに

$$-1 + a = 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = 4} \qquad \text{(答)}$$

(2) $y = (x-1)^2 - 1 + a$ であり，$0 \leqq x \leqq 3$ より，最大値は $x = 3$ のとき．ゆえに

$$y = 3 + a = 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = -2} \qquad \text{(答)}$$

(3) $y = a(x-3)^2 - 9a + b$ と変形できるから，$f(x) = a(x-3)^2 - 9a + b$ とおくと最大値は

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot (-2)^2 - 9a + b \\ &= -5a + b \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また最小値は

$$f(3) = -9a + b \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$\begin{cases} -5a + b = 5 \\ -9a + b = -3 \end{cases}$$

連立して解いて，求める値は

$$\boldsymbol{a = 2,\ b = 15} \qquad \text{(答)}$$

【7】最大値 7 を与える x の値を $x=p$ とすると

$$f(x)=a(x-p)^2+7 \quad (ただし, \ a<0) \quad \cdots ①$$

とおける．このとき，さらに $f(1)=3$, $f(6)=-2$ であることから

$$\begin{cases} a(1-p)^2+7=3 \\ a(6-p)^2+7=-2 \end{cases} \qquad \therefore \ \begin{cases} a(1-p)^2=-4 \\ a(6-p)^2=-9 \end{cases}$$

明らかに $p \fallingdotseq 1$, $p \fallingdotseq 6$ より，これらを a について解くと

$$\begin{cases} a=-\dfrac{4}{(p-1)^2} & \cdots ② \\ a=-\dfrac{9}{(p-6)^2} & \cdots ③ \end{cases}$$

となるから，②, ③ より a を消去して

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{(p-1)^2}=-\frac{9}{(p-6)^2} \\ \iff \quad & 4(p-6)^2=9(p-1)^2 \\ \iff \quad & (2p-12)^2-(3p-3)^2=0 \\ \iff \quad & (5p-15)(-p-9)=0 \\ \iff \quad & p=3, \ -9 \end{aligned}$$

(i) $p=3$ のとき，②より

$$a=-1 \quad (これは, \ a<0 \ を満たすので条件に適する)$$

(ii) $p=-9$ のとき，②より

$$a=-\frac{1}{25} \quad (これも, \ a<0 \ を満たすので条件に適する)$$

したがって，①とから

$$\boldsymbol{f(x)=-(x-3)^2+7} \quad または \quad \boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{25}(x+9)^2+7} \qquad (答)$$

【8】与式を平方完成すると

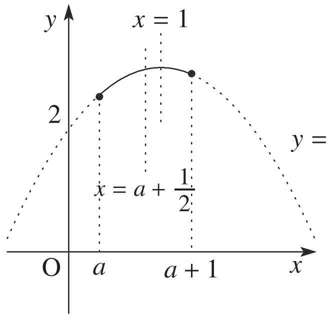
$$f(x)=-(x-1)^2+3 \quad (a \leqq x \leqq a+1)$$

(1) 軸 $x=1$ と，定義域の中央

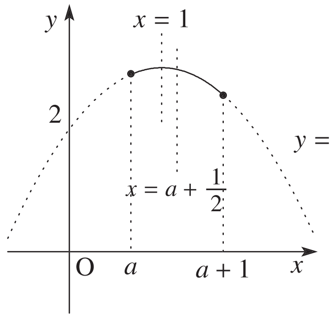
$$x=\frac{a+(a+1)}{2}=a+\frac{1}{2}$$

の位置関係で場合を分ける．

(i) $a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき.



(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq a$ のとき.



(i) $a + \dfrac{1}{2} \leqq 1 \iff a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき.

$$m(a) = f(a) = -a^2 + 2a + 2$$

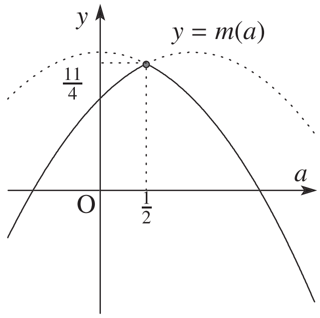
(ii) $1 \leqq a + \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} \leqq a$ のとき.

$$m(a) = f(a+1) = -a^2 + 3$$

以上より，求める最小値は

$$\boldsymbol{\begin{cases} -a^2 + 2a + 2 & \left(a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ -a^2 + 3 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a\right) \end{cases}} \qquad \text{(答)}$$

であり，グラフは右図



(2) (1) の図より，求める最大値は $a = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{11}{4}} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

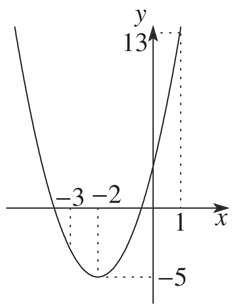
【1】(1) $y=(x-3)^2-12$ と変形できるから，

$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \text{なし} \\ \text{最小値} \quad \mathbf{-12} \quad (x=3\text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $y=-(x-1)^2+2$ と変形できるから，

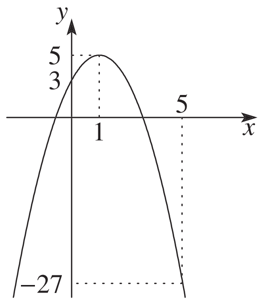
$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \mathbf{2} \quad (x=1\text{ のとき}) \\ \text{最小値} \quad \text{なし} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(3) $y=2(x+2)^2-5$ と変形できるから，グラフより



$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \mathbf{13} \quad (x=1\text{ のとき}) \\ \text{最小値} \quad \mathbf{-5} \quad (x=-2\text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(4) $y=-2(x-1)^2+5$ と変形できるから，グラフより



$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \mathbf{5} \quad (x=1\text{ のとき}) \\ \text{最小値} \quad \mathbf{-27} \quad (x=5\text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 条件より，頂点が $(3,\ 2)$ だから，$y=(x-3)^2+2$

右辺を展開して整理すると，$y=x^2-6x+11$

よって，$\boldsymbol{a=-6,\ b=11}$ **(答)**

(2) $y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}+a$ と変形できるから，最小値は，$x=-1$ のとき，$-2+a=-5$.

よって，$\boldsymbol{a=-3}$ **(答)**

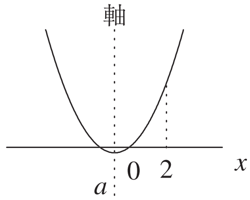
また，最大値は，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{4}-3=\boldsymbol{-\dfrac{11}{4}}$ **(答)**

【3】(1) $y = (x - a)^2 - a^2$ と変形できるから，軸の方程式は $x = a$，また，$f(x) = x^2 - 2ax$ として

(i) $a < 0$ のとき

グラフより，$x = 0$ のとき最小値をとり

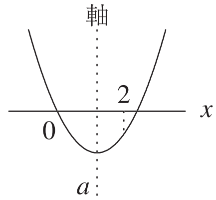
$$f(0) = 0$$



(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき

グラフより，$x = a$ のとき最小値をとり

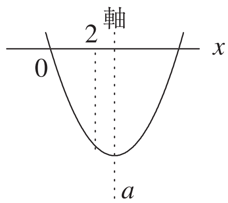
$$f(a) = -a^2$$



(iii) $a > 2$ のとき

グラフより，$x = 2$ のとき最小値をとり

$$f(2) = 4 - 4a$$



以上より，最小値は

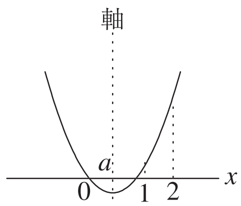
$$\begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{a < 0} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-a^2} & (\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 2} \text{ のとき}) \\ \mathbf{4 - 4}\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a > 2} \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) (1) と同様にして

(i) $a < 1$ のとき

グラフより，$x = 2$ のとき最大値をとり

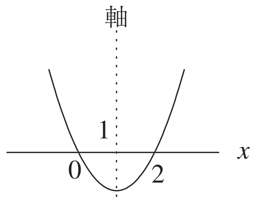
$$f(2) = 4 - 4a$$



(ii) $a = 1$ のとき

グラフより，$x = 0,\ 2$ のとき最大値をとり

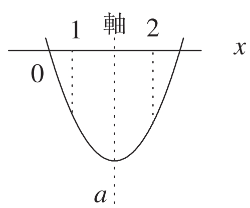
$$f(0) = f(2) = 0$$



(iii) $a > 1$ のとき

グラフより，$x = 0$ のとき最大値をとり

$$f(0) = 0$$



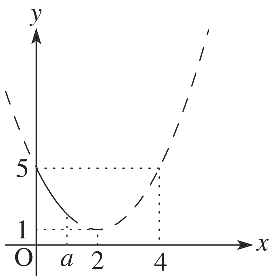
以上より，最大値は

$$\begin{cases} \mathbf{4 - 4}\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a < 1} \text{ のとき}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{a \geqq 1} \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

【4】

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \qquad (0 \leqq x \leqq a)$$

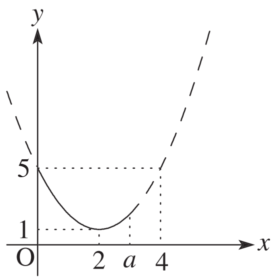
(i) $0 < a \leqq 2$ のとき



$$M(a) = f(0) = 5$$

$$m(a) = f(a) = (a-2)^2 + 1$$

(ii) $2 < a < 4$ のとき



$$M(a) = f(0) = 5$$

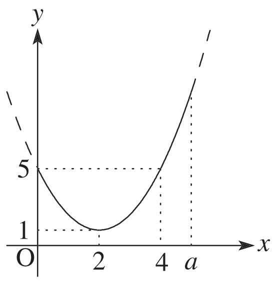
$$m(a) = f(2) = 1$$

(iii) $a = 4$ のとき

$$M(a) = f(0) = f(4) = 5$$

$$m(a) = f(2) = 1$$

(iv) $4 < a$ のとき



$$M(a) = f(a) = (a-2)^2 + 1$$

$$m(a) = f(2) = 1$$

(i)～(iv) より

$$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} 5 & (0 < a \leqq 4 \text{ のとき}) \\ (a-2)^2 + 1 & (4 < a \text{ のとき}) \end{cases}} \quad \text{(答)}$$

$$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} (a-2)^2 + 1 & (0 < a \leqq 2 \text{ のとき}) \\ 1 & (2 < a \text{ のとき}) \end{cases}} \quad \text{(答)}$$