問題

【1】(1) 与えられた関係式より $x = 1 - 2y$. 与式に代入して

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (1 - 2y)^2 + y^2 \\
&= 5y^2 - 4y + 1 \\
&= 5\left(y - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$f(y) = 5\left(y - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}$ とおくと，最小値は

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = 5 \times 0^2 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

このとき，$x = 1 - 2 \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$. ゆえに求める最小値は

$$\boldsymbol{\frac{1}{5} \quad \left(x = \frac{1}{5},\ y = \frac{2}{5}\ \text{のとき}\right)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた関係式より $x = 1 - 2y$. 与式に代入して

$$
\begin{aligned}
xy &= (1 - 2y)y \\
&= -2y^2 + y \\
&= -2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

これを $g(y)$ とおくと，最大値は $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

このとき，$x = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. ゆえに求める最大値は

$$\boldsymbol{\frac{1}{8} \quad \left(x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}\ \text{のとき}\right)} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 与えられた関係式より $y = 2x - 1$. 与式に代入して

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= x^2 + (2x - 1)^2 \\
&= 5x^2 - 4x + 1 \\
&= 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$f(x) = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}$ とおくと，最小値は

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = 5 \times 0^2 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

このとき，$y = 2 \times \dfrac{2}{5} - 1 = -\dfrac{1}{5}$．ゆえに求める最小値は

$$\mathbf{\frac{1}{5}} \quad \left(\boldsymbol{x = \frac{2}{5},\ y = -\frac{1}{5}} \text{ のとき} \right) \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた関係式より $y = 2x - 1$．与式に代入して

$$\begin{aligned} -xy &= -x(2x-1) \\ &= -2x^2 + x \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

これを $g(x)$ とおくと，最大値は $g\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{8}$

このとき，$y = 2 \times \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{1}{2}$．ゆえに求める最大値は

$$\mathbf{\frac{1}{8}} \quad \left(\boldsymbol{x = \frac{1}{4},\ y = -\frac{1}{2}} \text{ のとき} \right) \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $t = x^2 - 2x$ とおくと

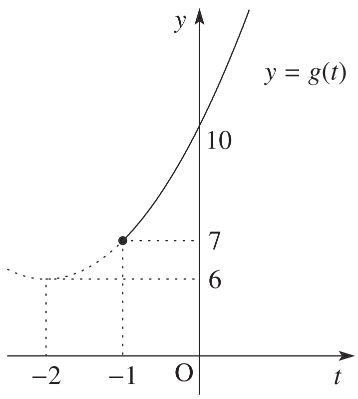
$$t = (x-1)^2 - 1$$

であるから，t のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{t \geqq -1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $t = x^2 - 2x$ より，与式は

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 10 \\ &= t^2 + 4t + 10 \end{aligned}$$



これを $g(t)$ とおくと，

$$g(t) = (t+2)^2 + 6 \quad (t \geqq -1)$$

ゆえに $y = g(t)$ のグラフは右図の実線部．
よって $g(t)$ の最小値は $t = -1$ のとき，

$$g(-1) = 7$$

また $t = -1$ のとき

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= -1 \\ (x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

であるから $x = 1$．

以上より，求める最小値は

7　($x = 1$ のとき)　　(答)

【4】与えられた関数

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 5\right)\left(x^2 + 4x + 2\right) + 2x^2 + 8x + 1$$

において，$t = x^2 + 4x$ とおくと

$$t = (x + 2)^2 - 4$$

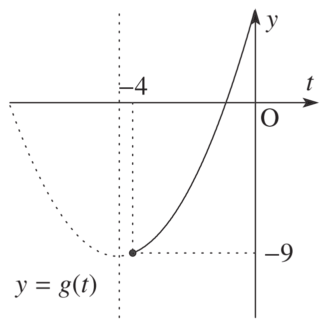
であるから，t のとり得る値の範囲は，$t \geqq -4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 + 4x + 5\right)\left(x^2 + 4x + 2\right) + 2\left(x^2 + 4x\right) + 1 \\ &= (t + 5)(t + 2) + 2t + 1 \\ &= t^2 + 9t + 11 \end{aligned}$$

これを $g(t)$ とおくと

$$g(t) = \left(t + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} \quad (t \geqq -4)$$

$y = g(t)$ のグラフは図のようになる.



最小値は $t = -4$ のとき -9.
このとき

$$x^2 + 4x = -4$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

より $x = -2$.
以上より，求める最小値は

−9　($x = -2$ のとき)　　(答)

【5】$x+y=1$ より，$y=1-x \geqq -2$ だから，$x \leqq 3$

これと $x \geqq 0$ より，$0 \leqq x \leqq 3$ ……①

$$
\begin{aligned}
x^2-2y^2 &= x^2-2(1-x)^2 \\
&= -x^2+4x-2 \\
&= -(x-2)^2+2
\end{aligned}
$$

$f(x)=-(x-2)^2+2$ とおくと，① における最大値は，$f(2)=-(2-2)^2+2=2$

このとき，$y=1-2=-1$

$f(x)$ の ① における最小値は，$f(0)=-2$

このとき，$y=1-0=1$

最大値　2　($x=2,\ y=-1$ のとき)
最小値　−2　($x=0,\ y=1$ のとき)　(答)

【6】与えられた関数

$$f(x,\ y)=3y^2-4xy+3x-2y+1 \quad (0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq 1)$$

において，$y=y_0$ $(0 \leqq y_0 \leqq 1)$ として固定すると，

$$f(x,\ y_0)=(3-4y_0)x+3{y_0}^2-2y_0+1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

は x の 1 次関数となる．傾きの正負で場合を分ける．

(i) $3-4y_0 \geqq 0 \iff 0 \leqq y_0 \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき．

$f(x,\ y_0)$ は単調増加または定数であるから，

最小値は $x=0$ のとき．すなわち

$$\min f(x,\ y_0)=f(0,\ y_0)=3{y_0}^2-2y_0+1$$

ここで y の固定を解く．すなわち

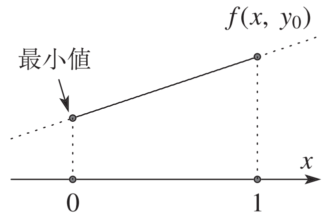
$$g(y)=3y^2-2y+1$$

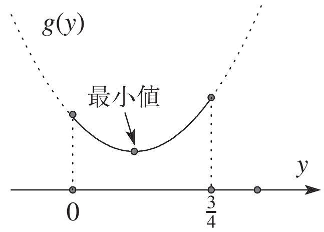
とおき，$0 \leqq y \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で y を動かすと，

$$g(y)=3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

であるから，$g(y)$ の最小値は $y=\dfrac{1}{3}$ のとき．すなわち

$$\min g(y)=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3} \quad \left(x=0,\ y=\frac{1}{3}\right)$$





(ii) $3-4y_0 \leqq 0 \iff \dfrac{3}{4} \leqq y_0 \leqq 1$ のとき.

$f(x,\ y_0)$ は単調減少または定数であるから，

最小値は $x=1$ のとき．すなわち

$$\min f(x,\ y_0) = f(1,\ y_0) = 3{y_0}^2 - 6y_0 + 4$$

ここで y_0 の固定を解く．すなわち，

$$h(y) = 3y^2 - 6y + 4$$

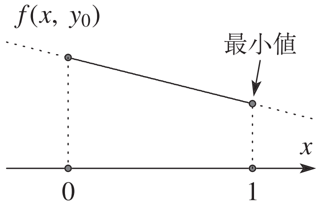
とおいて，$\dfrac{3}{4} \leqq y \leqq 1$ の範囲で y を動かすと，

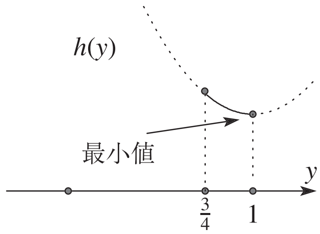
$$h(y) = 3(y-1)^2 + 1$$

であるから，$h(y)$ の最小値は $y=1$ のとき．

すなわち

$$\min h(y) = h(1) = 1 \quad (x=1,\ y=1)$$





以上より，求める最小値は

$$\mathbf{\frac{2}{3}} \quad \left(\boldsymbol{x=0,\ y=\frac{1}{3}}\right) \qquad \text{(答)}$$

【7】 与えられた関数

$$f(x) = a\left(x^2+2x+4\right)^2 + 3a\left(x^2+2x+4\right) + b$$

で，$a=0$ とすると

$$f(x) = b$$

より定数となり不適．ゆえに $a \neq 0$.

$t = x^2+2x+4$ とおくと

$$t = (x+1)^2 + 3 \geqq 3$$

である．

$$\begin{aligned} f(x) &= at^2 + 3at + b \\ &= a\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 + b - \frac{9}{4}a \end{aligned}$$

これを $g(t)$ とおく．これが最小値 37 をもつから，$a>0$ が必要.

$t \geqq 3$ であるから

$$\min g(t) = g(3) = 18a + b = 37 \quad \cdots ①$$

また

$$f(-2) = g(4) = 28a + b = 57 \quad \cdots ②$$

①, ② より，求める a, b の値は

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{(2,\ 1)} \qquad (\text{答})$$

【8】与えられた関係式を

$$4x^2(y-1) = x^2y^2 - xy + 3 \quad \cdots (*)$$

とする．

(1) $p = xy$ とおく．$(*)$ で $x = 0$ とすると

$$0 = 3$$

となり不適．ゆえに $x \fallingdotseq 0$．よって $y = \dfrac{p}{x}$．$(*)$ に代入して

$$4x^2\left(\frac{p}{x} - 1\right) = p^2 - p + 3$$

よって求める関係式は

$$\boldsymbol{4x^2 - 4px + p^2 - p + 3 = 0} \quad \cdots (\#) \qquad (\text{答})$$

(2) p は実数であるから，x が実数であれば y は実数となる．
ゆえに x が実数として存在するための $p\ (= xy)$ の条件を求める．
x の 2 次方程式 (#) の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D/4 &= (-2p)^2 - 4\left(p^2 - p + 3\right) \\ &= 4p - 12 \geqq 0 \\ \therefore \quad & p \geqq 3 \end{aligned}$$

ゆえに $p = xy$ の最小値は 3．
このとき (#) は

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ (2x-3)^2 &= 0 \\ \therefore \quad x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって $y = \dfrac{p}{x} = 2$．以上より，求める x, y の値は

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \mathbf{2}\right) \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】(1) $x-2y=1$ より，$x=1+2y$

これを x^2+y^2 に代入して

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (1+2y)^2+y^2 \\ &= 5y^2+4y+1 \\ &= 5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$f(y)=5\left(y+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$ とおくと，最小値は

$$f\left(-\frac{2}{5}\right)=5\times 0^2+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

このとき，$x=1+2\times\left(-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$

最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ $\left(x=\dfrac{1}{5},\ y=-\dfrac{2}{5}\ \text{のとき}\right)$ **(答)**

(2) $x-2y=1$ より，$x=1+2y$

これを xy に代入して

$$\begin{aligned} xy &= (1+2y)y \\ &= 2y^2+y \\ &= 2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \end{aligned}$$

これを $g(y)$ とおくと，最小値は $g\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}$

このとき，$x=1+2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$ $\left(x=\dfrac{1}{2},\ y=-\dfrac{1}{4}\ \text{のとき}\right)$ **(答)**

【2】$x^2+2x=t$ とおくと

$$t=(x+1)^2-1$$

であるから，t のとり得る値の範囲は，$t \geqq -1$ $\cdots$①

$x^2+2x=t$ より，

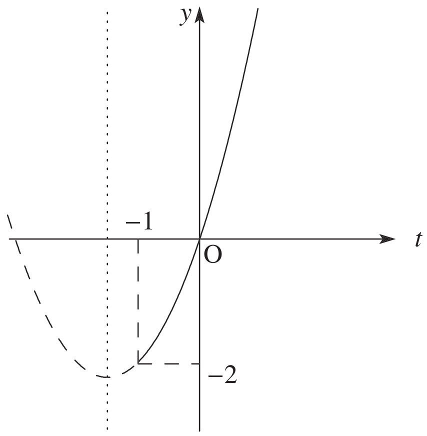
$$\begin{aligned} y &= (x^2+2x+3)(x^2+2x) \\ &= t^2+3t \\ &= \left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \end{aligned}$$

y を t の関数とみて，① の範囲でグラフをかくと右図の実線部分のようになる．

$t=-1$ のとき，$y=-2$ であり，

$$x^2+2x=-1$$

$$(x+1)^2=0 \qquad \therefore\ x=-1$$



以上より，

最小値は　**−2**　($x=-1$ のとき)　**(答)**

最大値は　なし　**(答)**

【3】$x+2y=4$ より，$x=4-2y \geqq 0$ だから，$y \leqq 2$

これと $y \geqq 0$ より，$0 \leqq y \leqq 2$

$$\begin{aligned} x^2+2y^2 &= (4-2y)^2+2y^2 \\ &= 6y^2-16y+16 \\ &= 6\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$g(y)=6\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}$ とおくと，最小値は

$$g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

このとき，$x=\dfrac{4}{3}$ である．

最大値は

$$g(0)=16$$

このとき，$x=4$ である．

よって，

最大値は　**16**　($x=4,\ y=0$ のとき)　**(答)**

最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{16}{3}}$　$\left(x=\dfrac{4}{3},\ y=\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right)$　**(答)**

【4】直角をはさむ 2 辺の長さを x，$(20-x)$ とおく．この直角三角形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(20-x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-20x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-10)^2+50 \quad \text{〔ただし，} 0<x<20\text{〕} \end{aligned}$$

$x=10$ のとき，$S=50$ で最大となる．このとき，**直角二等辺三角形**　**(答)**

問題

【1】(1) $x^2-5x+6=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1>0$$

であるから，$y=x^2-5x+6$ のグラフは，x 軸と 2 点で交わる．

ここで，$x^2-5x+6=0$ を解くと，$(x-2)(x-3)=0$ より，$x=2,\ 3$

よって，

共有点は 2 個．共有点の座標は (2, 0), (3, 0)　(答)

(2) $-x^2-x+3=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot3=13>0$$

であるから，$y=-x^2-x+3$ のグラフは，x 軸と 2 点で交わる．

ここで，$-x^2-x+3=0$，つまり $x^2+x-3=0$ を解くと，解の公式より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}\qquad\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

よって，

共有点は 2 個．共有点の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2},\ 0}\right),\ \left(\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2},\ 0}\right)$　**(答)**

(3) $-2x^2+8x-8=0$，つまり $x^2-4x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times4=0$$

であるから，$y=-2x^2+8x-8$ のグラフは，x 軸と接する．

ここで，$x^2-4x+4=0$ を解くと，$(x-2)^2=0$ より，$x=2$

よって，

共有点は 1 個．共有点の座標は (2, 0)　(答)

(4) $3x^2-2x-4=0$ の判別式 D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-3\times(-4)=13>0$$

であるから，$y=3x^2-2x-4$ のグラフは，x 軸と 2 点で交わる．

ここで，$3x^2-2x-4=0$ を解くと，解の公式より

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot(-4)}}{3}\qquad\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$$

よって，

共有点は 2 個．共有点の座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{13}}{3},\ 0}\right),\ \left(\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{13}}{3},\ 0}\right)$　**(答)**

【2】(1)

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 1 & \cdots ① \\ y = 3x + 6 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より

$$2x^2 + 1 = 3x + 6$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \cdots ③$$

ここで，③ の判別式を D とすると，

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49 > 0$$

であるから，① と ② は 2 点で交わる．また ③ より

$$(2x-5)(x+1) = 0 \qquad \therefore\ x = -1,\ \frac{5}{2}$$

$x = -1$ のとき，② より，$y = 3 \times (-1) + 6 = 3$
$x = \dfrac{5}{2}$ のとき，② より，$y = 3 \times \dfrac{5}{2} + 6 = \dfrac{27}{2}$
以上より，

共有点は 2 個．その座標は $\boldsymbol{(-1,\ 3),\ \left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{27}{2}\right)}$ (答)

(2)

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 5 & \cdots ① \\ y = 2x - 3 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より

$$x^2 - 3x + 5 = 2x - 3$$

$$x^2 - 5x + 8 = 0 \quad \cdots ③$$

ここで，③ の判別式を D とすると，

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -7 < 0$$

であるから，① と ② は共有点を持たない．したがって，**共有点は 0 個** **(答)**

(3)

$$\begin{cases} y = -4x^2 + 9x - 7 & \cdots ① \\ y = -3x + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より

$$-4x^2 + 9x - 7 = -3x + 2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \cdots ③$$

ここで，③ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 4 \times 9 = 0$$

であるから，① と ② は 1 点で交わる．また ③ より

$$(2x-3)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{3}{2}$$

② より，$y = -3 \times \dfrac{3}{2} + 2 = -\dfrac{5}{2}$
以上より，

共有点は 1 個．その座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$　(答)

【3】(1) x 軸と $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ で交わることから，求める放物線の式は

$$y = a(x-1)(x-3)$$

とおける．点 $(0,\ 6)$ を通ることから，

$$3a = 6 \qquad \therefore\ a = 2$$

よって

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 6} \quad \textbf{(答)}$$

(2) x 軸と $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ で交わるから，求める放物線の式は

$$y = a(x-1)(x-3)$$

とおける．さらにこれは，$y = 2x^2 + x - 1$ を平行移動したものであるから，$a = 2$
よって

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 6} \quad \textbf{(答)}$$

【4】(1) $x^2 + kx + 4 = 0\ \cdots(*)$ の判別式を D とする．題意を満たすには，$D = 0$ であればよいから，

$$D = k^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$$
$$k^2 = 16 \qquad \therefore\ k = 4,\ -4$$

$k = 4$ のとき，$(*)$ より，

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x+2)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = -2$$

$k = -4$ のとき，$(*)$ より，

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 2$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{k = 4}\ \textbf{のとき} & \textbf{接点}\ \boldsymbol{(-2,\ 0)} \\ \boldsymbol{k = -4}\ \textbf{のとき} & \textbf{接点}\ \boldsymbol{(2,\ 0)} \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

(2) $x^2-2x+k+1=0$ の判別式を D とする．題意を満たすには $D>0$ であればよい．

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(k+1)>0$$
$$1-k-1>0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{k<0}$ **(答)**

(3) ① $2x^2-5x+k+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\times2\times(k+3)=-8k+1$$

であるから，

$D>0$ すなわち $k<\dfrac{1}{8}$ のとき，共有点は 2 個
$D=0$ すなわち $k=\dfrac{1}{8}$ のとき，共有点は 1 個
$D<0$ すなわち $k>\dfrac{1}{8}$ のとき，共有点はなし

よって，

$$\begin{cases}\boldsymbol{k<\dfrac{1}{8}}\text{のとき，} & \text{共有点は }\boldsymbol{2}\text{ 個}\\ \boldsymbol{k=\dfrac{1}{8}}\text{のとき，} & \text{共有点は }\boldsymbol{1}\text{ 個}\quad\textbf{(答)}\\ \boldsymbol{k>\dfrac{1}{8}}\text{のとき，} & \text{共有点は }\boldsymbol{0}\text{ 個}\end{cases}$$

② $9x^2+6(k-1)x+k(k-3)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{3(k-1)\}^2-9k(k-3)\\&=9(k^2-2k+1)-9k^2+27k\\&=9k+9\end{aligned}$$

であるから，

$\dfrac{D}{4}>0$ すなわち $k>-1$ のとき，共有点は 2 個
$\dfrac{D}{4}=0$ すなわち $k=-1$ のとき，共有点は 1 個
$\dfrac{D}{4}<0$ すなわち $k<-1$ のとき，共有点はなし

よって，

$$\begin{cases}\boldsymbol{k>-1}\text{ のとき，} & \text{共有点は }\boldsymbol{2}\text{ 個}\\ \boldsymbol{k=-1}\text{ のとき，} & \text{共有点は }\boldsymbol{1}\text{ 個}\quad\textbf{(答)}\\ \boldsymbol{k<-1}\text{ のとき，} & \text{共有点は }\boldsymbol{0}\text{ 個}\end{cases}$$

【5】

$$\begin{cases} y = x^2 + (p+2)x + p & \cdots ① \\ y = -x^2 + px + 2p & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より,

$$x^2 + (p+2)x + p = -x^2 + px + 2p$$

$$2x^2 + 2x - p = 0 \quad \cdots ③$$

③ の判別式を D とする．① と ② が共有点をもたない条件は，$D < 0$ であるから，

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 2 \cdot (-p) < 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{p < -\frac{1}{2}} \quad \textbf{(答)}$$

【6】2 つの 2 次関数

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + a & \cdots ① \\ y = x^2 + x - a + 3 & \cdots ② \end{cases}$$

に対して，① が x 軸と共有点をもつとき，$x^2 + 3x + a = 0$ の判別式を D_1 とすると

$$D_1 = 3^2 - 4a \geqq 0 \qquad \therefore\ a \leqq \frac{9}{4} \cdots ①'$$

② が x 軸と共有点をもつとき，$x^2 + x - a + 3 = 0$ の判別式を D_2 とすると

$$D_2 = 1^2 - 4(-a+3) \geqq 0 \qquad \therefore\ a \geqq \frac{11}{4} \cdots ②'$$

よって，求める a の値の範囲は ①′ または ②′ であるから

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{9}{4},\ \frac{11}{4} \leqq a} \quad \textbf{(答)}$$

【7】(1) ①と②の共有点は 2 個あることより

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = x^2 + 3 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より

$$ax + b = x^2 + 3$$

$$x^2 - ax + 3 - b = 0$$

ここで，判別式 $D = a^2 - 4(3-b) = a^2 + 4b - 12$

$D > 0$ より

$$a^2 + 4b - 12 > 0$$

$$4b > -a^2 + 12 \quad \cdots \text{(i)}$$

また，①と③の共有点は 1 個あることより

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = x^2 + 6x + 7 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ③ より

$$ax + b = x^2 + 6x + 7$$

$$x^2 + (6 - a)x + 7 - b = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで，判別式 $D = (6 - a)^2 - 4(7 - b) = a^2 - 12a + 4b + 8$

$D = 0$ より

$$4b = -a^2 + 12a - 8 \quad \cdots \text{(ii)}$$

また，①と④の共有点は 0 個より

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = x^2 + 4x + 5 & \cdots ④ \end{cases}$$

①, ④ より

$$ax + b = x^2 + 4x + 5$$

$$x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$$

ここで，判別式 $D = (4 - a)^2 - 4(5 - b) = a^2 - 8a + 4b - 4$

$D < 0$ より

$$a^2 - 8a + 4b - 4 < 0$$

$$4b < -a^2 + 8a + 4 \quad \cdots \text{(iii)}$$

(i)，(ii) より，$4b$ に注目して

$$-a^2 + 12a - 8 > -a^2 + 12$$

$$12a > 20$$

$$a > \frac{5}{3} \quad \cdots \text{(iv)}$$

(ii)，(iii) より $4b$ に注目して

$$-a^2 + 12a - 8 < -a^2 + 8a + 4$$

$$4a - 12 < 0$$

$$a < 3 \quad \cdots \text{(v)}$$

a は整数であるから，(iv)，(v) より

$$\frac{5}{3} < a < 3 \qquad \therefore \quad a = 2$$

これを (ii) に代入して

$$4b = -4 + 24 - 8 = 12 \qquad \therefore \quad b = 3$$

$a = 2, b = 3$ (答)

(2) (∗) に $a = 2$, $b = 3$ を代入して

$$x^2 + (6-2)x + 7 - 3 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad (x+2)^2 = 0$$
$$x = -2$$

$x = -2$ のとき, $y = 2x + 3$ に代入して

$$y = 2 \times (-2) + 3 = -1$$

以上より

①, ③の共有点の座標は, **(−2, −1)**　**(答)**

【8】(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$ より,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \boldsymbol{y^2 - 2} \quad \textbf{(答)}$$

(2) 与えられた方程式

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

は, $x = 0$ を解にもたないから, 両辺 x^2 で割って

$$x^2 - 4x + 5 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

(1) の結果より

$$\boldsymbol{y^2 - 4y + 3 = 0} \quad \textbf{(答)}$$

これを解くと,

$$(y-1)(y-3) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = 1,\ 3} \quad \textbf{(答)}$$

(3)　(i) $y = 1$ のとき.

$$x + \frac{1}{x} = 1 \qquad x^2 - x + 1 = 0$$

判別式を D とすると

$$D = (-1)^2 - 4 < 0$$

ゆえにこれをみたす実数 x は存在しない.

(ii) $y = 3$ のとき.

$$x + \frac{1}{x} = 3$$
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

以上より，(*) をみたす実数 x は

$$\boldsymbol{x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \quad \textbf{(答)}$$

【9】与えられた方程式 2 つの方程式

$$x^2 + px + 2p + 2 = 0 \quad \cdots ①$$
$$x^2 - x - p^2 - p = 0 \quad \cdots ②$$

の共通解を α とおくと，

$$\alpha^2 + p\alpha + 2p + 2 = 0 \quad \cdots ①'$$
$$\alpha^2 - \alpha - p^2 - p = 0 \quad \cdots ②'$$

①′ − ②′ より

$$(p+1)\alpha + p^2 + 3p + 2 = 0$$
$$(p+1)(\alpha + p + 2) = 0$$
$$\therefore\ p = -1 \text{ または } \alpha = -p - 2$$

(i) $p = -1$ のとき

①′ と ②′ はともに，$\alpha^2 - \alpha = 0$ となり，$\alpha(\alpha - 1) = 0$ より，共通解は，

$$\alpha = 0,\ 1$$

(ii) $\alpha = -p - 2$ のとき

①′ より

$$(-p-2)^2 + p(-p-2) + 2p + 2 = 0$$
$$\therefore\ p = -\frac{3}{2}$$

であり，共通解は，$\alpha = -\left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -\frac{1}{2}$ となる.

このとき，もとの 2 つの方程式 ① と ② は，それぞれ

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$(x-2)(2x+1) = 0 \qquad \therefore\ x = 2,\ -\frac{1}{2}$$
$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$
$$(2x-3)(2x+1) = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}$$

となり，たしかに共通解は，$x = -\frac{1}{2}$ となる.

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{p = -1} \text{ のとき} \quad \text{共通解 } \boldsymbol{x = 0,\ 1} \\ \boldsymbol{p = -\frac{3}{2}} \text{ のとき} \quad \text{共通解 } \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$$

であるから，x 軸との共有点は **2 個**　(答)

ここで，$2x^2 - 3x + 1 = 0$ より，$(2x-1)(x-1) = 0$　$\therefore\ x = \dfrac{1}{2},\ 1$

したがって，共有点の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ (1,\ 0)}$　(答)

(2) $x^2 - 5x + 7 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -3 < 0$$

であるから，x 軸との共有点は，**0 個**　(答)

(3) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 0$$

であるから，x 軸との共有点は，**1 個**　(答)

ここで，$-2x^2 + 4x - 2 = 0$ より，

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 1$$

したがって，共有点の座標は，$\boldsymbol{(1,\ 0)}$　(答)

【2】(1)

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x + 1 & \cdots ① \\ y = -2x + 3 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より

$$2x^2 + x + 1 = -2x + 3$$
$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \cdots ③$$

ここで，③ の判別式を D とすると

$$D = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$$

であるから，共有点は **2 個**　(答)

③ より，$(2x-1)(x+2) = 0$　$\therefore\ x = \dfrac{1}{2},\ -2$

$x = \dfrac{1}{2}$ のとき，② より，$y = -2 \times \dfrac{1}{2} + 3 = 2$

$x = -2$ のとき，② より，$y = -2 \times (-2) + 3 = 7$

以上より，共有点の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right),\ (-2,\ 7)}$　(答)

(2) $\begin{cases} y = x^2 + x + 2 & \cdots ① \\ y = -x - 1 & \cdots ② \end{cases}$

①, ② より

$$x^2 + x + 2 = -x - 1$$
$$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \cdots ③$$

ここで，③ の判別式を D とすると，

$$D = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$$

であるから，共有点は なし　(答)

【3】x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わることから，求める 2 次関数は，
$y = a(x+3)(x-1)$ とおける．これが，点 $(0,\ 3)$ を通ればよく，

$$3 = a \cdot 3 \cdot (-1) \quad \therefore\ a = -1$$

よって，求める 2 次関数は，

$$y = -(x+3)(x-1)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = -x^2 - 2x + 3} \quad (答)$$

【4】(1) 2 次方程式 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k + 5 = 0$ の判別式を D とすると，$D = 0$ となるときの k の値を求めればよい．

$$D = (2k+1)^2 - 4(k^2 + 2k + 5) = 0$$
$$\Longleftrightarrow -4k - 19 = 0$$
$$\Longleftrightarrow -4k = 19$$
$$\therefore\ \boldsymbol{k = -\frac{19}{4}} \quad (答)$$

(2) (1) の判別式 D について，$D \geqq 0$ である k の条件を求めればよい．

$$D = -4k - 19 \geqq 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{k \leqq -\frac{19}{4}} \quad (答)$$

M1TK

高 1 難関大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	