M2JS/M2J

本科 1 期 5 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 選抜東大数学

高 2 東大数学

４章　整式

問題

【1】(1) 方程式の左辺を $f(x)$ とおくと，$f(-1)=0$ だから組み立て除法により

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & 7 & 7 & 2 \\
 & & -2 & -5 & -2 \\
\hline
 & 2 & 5 & 2 & 0
\end{array}
$$

よって

$$(x+1)\left(2x^2+5x+2\right)=0$$
$$(x+1)(x+2)(2x+1)=0$$

ゆえに

$$x=-1\ \ -2,\ -\frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 方程式の左辺を $f(x)$ とおくと，$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$ だから組み立て除法により

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{3}{2} & 4 & 4 & -7 & -6 \\
 & & -6 & 3 & 6 \\
\hline
 & 4 & -2 & -4 & 0
\end{array}
$$

よって

$$(2x+3)\left(2x^2-x-2\right)=0$$

ゆえに

$$x=-\frac{3}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与式より

$$
\begin{aligned}
f(x)&=2x^4-11x^2+5+3x^3-15x\\
&=\left(2x^2-1\right)\left(x^2-5\right)+3x\left(x^2-5\right)\\
&=\left(x^2-5\right)\left(2x^2+3x-1\right)
\end{aligned}
$$

よって，与えられた方程式は

$$\left(x^2-5\right)\left(2x^2+3x-1\right)=0$$

ゆえに

$$x=\pm\sqrt{5},\ \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 題意より，$f(x) = (x^2 - 4x - 221)g(x) + 5x - 3$ とおける．
求める余りは $f(-13)$ なので

$$\begin{aligned} f(-13) &= (13^2 + 4 \times 13 - 221)g(-13) - 5 \times 13 - 3 \\ &= (169 + 52 - 221)g(-13) - 65 - 3 \\ &= -68 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ を $x + 13$ で割ったときの余りは

$$-68 \qquad (答)$$

(2) $f(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りは 1 次以下であるから，
余りを $ax + b$，商を $g(x)$ とおくと

$$f(x) = (x^2 - x - 2)g(x) + ax + b = (x + 1)(x - 2)g(x) + ax + b \ \cdots ①$$

$f(x)$ を $x + 1$ で割っても $x - 2$ で割っても余りは -3 であるから

$$f(-1) = -3,\ f(2) = -3 \ \cdots ②$$

また，① より

$$f(-1) = -a + b,\ f(2) = 2a + b \ \cdots ③$$

② と ③ を連立して解くと

$$a = 0,\ b = -3$$

以上から，$f(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りは

$$-3 \qquad (答)$$

【3】与条件より

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$2\alpha + 1 = \sqrt{5}$$

辺々正より 2 乗して

$$4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 5$$
$$\therefore \quad \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \ \cdots ①$$

(1) ① を用いて与式を変形すると

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha - 1 + 2 = 2 \qquad (答)$$

(2) (1) を用いて与式を変形すると

$$\begin{aligned} \alpha^4 + 3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 3\alpha + 1 &= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 2\alpha + 1) \\ &= 2(2 + \alpha) \\ &= 2\left(2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ &= 3 + \sqrt{5} \qquad (答) \end{aligned}$$

【4】$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は 3 次方程式 $x^3+3x^2+2x+1=0$ の解だから

$$\alpha\beta\gamma=-1$$

$f(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは $\alpha+\beta\gamma$ だから

$$f(\alpha)=\alpha+\beta\gamma=\alpha-\frac{1}{\alpha}$$

$$\therefore\quad \alpha f(\alpha)-\alpha^2+1=0$$

同様に，$f(x)$ を $x-\beta,\ x-\gamma$ で割った余りがそれぞれ $\beta+\gamma\alpha,\ \gamma+\alpha\beta$ であることより

$$\beta f(\beta)-\beta^2+1=0,\quad \gamma f(\gamma)-\gamma^2+1=0$$

$xf(x)-x^2+1$ は 3 次の整式より

$$\begin{aligned}xf(x)-x^2+1&=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&=a\left(x^3+3x^2+2x+1\right)\end{aligned}$$

とおける．ただし，a は 0 でない定数である．これより

$$f(x)=ax^2+(3a+1)x+2a+\frac{a-1}{x}$$

となるが，$f(x)$ は 2 次の整式だから

$$a-1=0\qquad\therefore\quad a=1$$

ゆえに

$$f(x)=x^2+4x+2\qquad(答)$$

【5】題意より

$$(x-1)p(x)+(x+1)^3q(x)=1\ \cdots①$$

である．明らかに $p(x)\neq0$ かつ $q(x)\neq0$ であり

$$\{p(x)\ の次数\}=\{q(x)\ の次数\}+2$$

である．よって，$p(x)$ は少なくとも 2 次の整式である．
ここで，$p(x)$ を 2 次式であると仮定すると，$q(x)$ は定数であるから，実数 a を用いて

$$q(x)=a$$

とおける．
このとき，① に $x=1$ を代入して

$$8a=1\qquad\therefore\quad a=\frac{1}{8}$$

すなわち

$$\begin{aligned}(x-1)p(x)+\frac{1}{8}(x+1)^3&=1\\(x-1)p(x)&=1-\frac{1}{8}(x+1)^3\\(x-1)p(x)&=\left(1-\frac{x+1}{2}\right)\left\{1+\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)^2}{4}\right\}\\(x-1)p(x)&=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{4+2(x+1)+(x+1)^2}{4}\end{aligned}$$

これが x についての恒等式であるから，辺々 $(x-1)$ で割って

$$p(x) = -\frac{1}{8}(x^2+4x+7)$$

よって，① をみたす $p(x)$, $q(x)$ の組のなかで，$p(x)$ の次数が最小である組は

$$p(x) = -\frac{1}{8}(x^2+4x+7),\quad q(x) = \frac{1}{8} \qquad \text{(答)}$$

つぎに，$p(x)$ の最高次の係数が 1 であるなかで，次数が最小の組を求める．
前半の結果から，$p(x)$ が 2 次式のとき，$p(x)$ の最高次の係数は 1 ではないので，$p(x)$ は少なくとも 3 次式である．
ここで，$p(x)$ を最高次の係数が 1 の 3 次式であると仮定すると，$q(x)$ は最高次の係数が -1 の 1 次式であるから，実数 b を用いて

$$q(x) = -x+b$$

とおける．
このとき，① に $x=1$ を代入して

$$8(b-1) = 1 \qquad \therefore\quad b = \frac{9}{8}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
(x-1)p(x) + \left(-x+\frac{9}{8}\right)(x+1)^3 &= 1\\
(x-1)p(x) &= 1 + \left(x-\frac{9}{8}\right)(x+1)^3\\
(x-1)p(x) &= 1 + \left\{(x-1)-\frac{1}{8}\right\}(x+1)^3\\
(x-1)p(x) &= (x-1)(x+1)^3 + 1 - \frac{1}{8}(x+1)^3
\end{aligned}$$

これが x についての恒等式であるから，辺々 $(x-1)$ で割って

$$p(x) = (x+1)^3 - \frac{1}{8}(x^2+4x+7) \quad (\because\ \text{前半の結果})$$

$$\therefore\quad p(x) = x^3 + \frac{23}{8}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{8}$$

よって，$p(x)$ の最高次の係数が 1 であるなかで次数が最小の組は

$$p(x) = x^3 + \frac{23}{8}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{8},\quad q(x) = -x + \frac{9}{8} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】$P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを $R(x)$ とすると，題意より

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

とかける．ここで，$Q(x)$ は 2 次式であるから，$R(x)$ は 1 次以下の整式である．
このとき

$$\begin{aligned}\{P(x)\}^2 &= \{S(x)\}^2\{Q(x)\}^2 + 2S(x)Q(x)R(x) + \{R(x)\}^2 \\ &= Q(x)\left[\{S(x)\}^2Q(x) + 2S(x)R(x)\right] + \{R(x)\}^2\end{aligned}$$

となり，$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れることから，$\{R(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れる．
さらに，$\{R(x)\}^2$ は高々 2 次の整式であるから，定数 c を用いて

$$\{R(x)\}^2 = cQ(x)$$

とかける．
ここで，$c = 0$ のとき，$R(x) = 0$ となり $P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れないことに反するので，不適．
よって，$c \neq 0$ かつ $R(x)$ は 1 次式であり

$$Q(x) = \frac{1}{c}\{R(x)\}^2$$

とかける．すなわち，$Q(x) = 0$ は重解をもつ．　（証明終）

問題

【1】(1) 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=2$$

だから

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{2} \qquad (答)$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot 2=-3 \qquad (答)$$

(2) 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-4$$

だから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=2^2-2(-3)=10 \qquad (答)\end{aligned}$$

次に

$$x^4=(x^3-2x^2-3x+4)(x+2)+7x^2+2x-8$$

であるから，$x=\alpha$ を代入すると，$\alpha^3-2\alpha^2-3\alpha+4=0$ より

$$\alpha^4=7\alpha^2+2\alpha-8$$

同様にして

$$\beta^4=7\beta^2+2\beta-8,\ \gamma^4=7\gamma^2+2\gamma-8$$

であるから

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=7(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2(\alpha+\beta+\gamma)-24\\&=7\cdot 10+2\cdot 2-24=50 \qquad (答)\end{aligned}$$

【2】(1) 実数係数の 3 次方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ の解の 1 つが $x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ なので，

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ も解である．もう 1 つの解を r とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases} r+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=2 \\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}r+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}r=a \\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}r=-b \end{cases}$$

よって，$r=1$ であり，

$$a=2,\ b=-1 \qquad (答)$$

(2) 条件より，与えられた方程式の 3 解を $\alpha,\ \alpha,\ \beta$ とする．解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-1 \\ \alpha^2+2\alpha\beta=-a-2 \\ \alpha^2\beta=-a \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \beta=-1-2\alpha \\ \alpha^2+2\alpha\beta=\alpha^2\beta-2 \end{cases}$$

β を消去すると

$$\alpha^2-2\alpha(1+2\alpha)=-\alpha^2(1+2\alpha)-2$$
$$\therefore\quad \alpha^3-\alpha^2-\alpha+1=(\alpha-1)^2(\alpha+1)=0$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha=1\ のとき \quad \beta=-3,\ a=3 \\ \alpha=-1\ のとき \quad \beta=1,\ a=-1 \end{cases}$$

であり，求める a の値は

$$a=-1,\ 3 \qquad (答)$$

【3】(1) $x=0$ は与えられた方程式の解ではないから，両辺を $x^2\ (\neq 0)$ で割ると

$$x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$$

すなわち

$$\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+4\right)=0$$

$$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=-3,\ -4$$

$x+\dfrac{1}{x}=-4$ のとき，$x\neq 0$ より

$$x^2+4x+1=0 \qquad \therefore\quad x=-2\pm\sqrt{3}$$

$x+\dfrac{1}{x}=-3$ のとき，$x\neq 0$ より

$$x^2+3x+1=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって

$$x=-2\pm\sqrt{3},\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式より

$$x^5+2x^4-5x^3+5x^2-2x-1=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad (x-1)(x^4+3x^3-2x^2+3x+1)=0$$

ゆえに

$$x=1,\ x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$$

$x=0$ は 4 次方程式 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$ の解ではないので，両辺を $x^2\ (\neq 0)$ で割ると

$$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

すなわち

$$\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)=0 \qquad \therefore\quad x+\frac{1}{x}=-4,\ 1$$

$x+\dfrac{1}{x}=1$ のとき，$x\neq 0$ より

$$x^2-x+1=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$x+\dfrac{1}{x}=-4$ のとき，$x \neq 0$ より

$$x^2+4x+1=0 \qquad \therefore \quad x=-2\pm\sqrt{3}$$

よって

$$x=-2\pm\sqrt{3},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ 1 \qquad (答)$$

【4】(1) $\dfrac{y+z}{y-z}=a$ より

$$y+z=a(y-z)$$

ゆえに

$$(1-a)y=-(1+a)z$$

$x,\ y,\ z$ は 0 でないから

$$a \neq \pm 1$$

よって

$$y=\frac{a+1}{a-1}z \ \cdots ①$$

また，$\dfrac{a+1}{a-1} \neq 1$ より，つねに $y \neq z$ である．
同様にして，$b \neq \pm 1,\ c \neq \pm 1$ だから

$$z=\frac{b+1}{b-1}x \ \cdots ②, \quad x=\frac{c+1}{c-1}y \ \cdots ③$$

①, ②, ③の辺々をかけて

$$xyz=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}xyz$$

分母を払って，$xyz\ (\neq 0)$ で割ると

$$(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$$

これを整理して

$$ab+bc+ca=-1 \quad (ただし，a \neq \pm 1,\ b \neq \pm 1,\ c \neq \pm 1) \qquad (答)$$

(2) $a,\ b,\ c$ を解とする 3 次方程式は

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=0$$

であるから，(1) の結果と与えられた条件を代入すると

$$t^3-6t^2-t+30=0$$
$$(t+2)(t^2-8t+15)=0$$
$$(t+2)(t-3)(t-5)=0$$
$$\therefore \quad t=-2,\ 3,\ 5$$

$c < b < a$ より

$$a = 5,\quad b = 3,\quad c = -2$$

であり，これは $a \neq \pm 1,\ b \neq \pm 1,\ c \neq \pm 1$ をみたす．
①, ②, ③に代入して

$$y = \frac{3}{2}z,\quad z = 2x,\quad x = \frac{1}{3}y$$

よって

$$x : y = 1 : 3,\quad y : z = 3 : 2$$

以上より

$$x : y : z = 1 : 3 : 2 \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 与えられた 4 次式の定数項が 2 であることから，次の 2 つの場合を考えれば十分．
(i) $x^4 + 2x^3 + 5x + 2 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$
(ii) $x^4 + 2x^3 + 5x + 2 = (x^2 + cx - 1)(x^2 + dx - 2)$
ただし，$a,\ b,\ c,\ d$ は整数である．
(i) の場合，右辺を展開すると

$$x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 3)x^2 + (2a + b)x + 2$$

となるから，両辺の係数を比較すると

$$\begin{cases} a + b = 2 & \cdots ① \\ ab + 3 = 0 & \cdots ② \\ 2a + b = 5 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ③ より

$$a = 3,\ b = -1$$

このとき，② も成立する．
(ii) の場合，右辺を展開すると

$$x^4 + (c + d)x^3 + (cd - 3)x^2 - (2c + d)x + 2$$

となるから，両辺の係数を比較すると

$$\begin{cases} c + d = 2 & \cdots ④ \\ cd - 3 = 0 & \cdots ⑤ \\ 2c + d = -5 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

④, ⑥ より

$$c = -7,\ d = 9$$

このとき，⑤ は成立しないから，(ii) の場合はない．
以上より

$$x^4 + 2x^3 + 5x + 2 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 2) \qquad \text{(答)}$$

(2) $x^4+2x^3+5x+2=0$ の解は，(1) より

$$\begin{cases} x^2+3x+1=0 & \cdots ⑦ \\ \text{または} \\ x^2-x+2=0 & \cdots ⑧ \end{cases}$$

をみたす．また，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$ は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の対称式であるから，⑦ の 2 つの解を α, β とし，⑧ の 2 つの解を γ, δ としても一般性は失われない．このとき，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1$$
$$\gamma+\delta=1,\ \gamma\delta=2$$

が成立するから

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= (-3)^3-3\cdot 1\cdot(-3)=-18 \\ \gamma^3+\delta^3 &= (\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta) \\ &= 1^3-3\cdot 2\cdot 1=-5 \end{aligned}$$

よって

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=-18-5=-23 \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】与方程式

$$x^4 - x^3 + x^2 - (a+2)x - a - 3 = 0 \quad \cdots ①$$

が実数部分が 0 である複素数解をもつので，その解を bi とおく．ただし b は実数とし，i は虚数単位とする．

$x = bi$ は方程式 ① の解の 1 つであるため，代入して

$$b^4 + b^3 i - b^2 - (a+2)bi - a - 3 = 0$$

i についてまとめると

$$b^4 - b^2 - a - 3 + \{b^3 - (a+2)b\}i = 0$$

すなわち

$$\begin{cases} b^4 - b^2 - a - 3 = 0 \quad \cdots ② \\ b\{b^2 - (a+2)\} = 0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

である．

(i) $b = 0$ のとき，② より $a = -3$

(ii) $b \neq 0$ のとき ③ より

$$b^2 = a + 2 \quad \cdots ③'$$

③′ を ② に代入して

$$\begin{aligned} &(a+2)^2 - (a+2) - a - 3 = 0 \\ &a^2 + 2a - 1 = 0 \\ \therefore\quad &a = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

さらに ③ より

$$b^2 = 1 \pm \sqrt{2} \ \text{(複号同順)}$$

であるが，b は実数より $b^2 \geqq 0$ なので

$$b^2 = 1 + \sqrt{2},\ a = -1 + \sqrt{2}$$

以上より，求める a の値は

$$a = -3,\ -1 + \sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 右辺を展開すると

$$x^4+(a+c)x^3+(ac+b+2)x^2+(2a+bc)x+2b$$

x についての恒等式なので両辺の係数比較すると

$$\begin{cases} a+c=-1 \ \cdots ① \\ ac+b+2=3 \ \cdots ② \\ 2a+bc=-1 \ \cdots ③ \\ 2b=6 \ \cdots ④ \end{cases}$$

④ より

$$b=3$$

これを ②, ③ に代入して

$$ac=-2 \ \cdots ②'$$
$$2a+3c=-1 \ \cdots ③'$$

①, ③′ より

$$a=-2,\ c=1$$

これは ②′ をみたす.

よって

$$a=-2,\ b=3,\ c=1 \qquad \text{(答)}$$

(2) 両辺の分母を払うと

$$\begin{aligned} 5x^2+4x+3 &= a(x-1)(x^2+2x+3)+b(x^2+2x+3)+(cx+d)(x-1)^2 \\ &= a(x^3+x^2+x-3)+b(x^2+2x+3)+\{cx^3-(2c-d)x^2+(c-2d)x+d\} \\ &= (a+c)x^3+(a+b-2c+d)x^2+(a+2b+c-2d)x-3a+3b+d \end{aligned}$$

これは, x についての恒等式なので両辺の係数比較すると

$$\begin{cases} a+c=0 \ \cdots ⑤ \\ a+b-2c+d=5 \ \cdots ⑥ \\ a+2b+c-2d=4 \ \cdots ⑦ \\ -3a+3b+d=3 \ \cdots ⑧ \end{cases}$$

⑤ より

$$c=-a \ \cdots ⑤'$$

これを ⑥, ⑦ に代入して

$$\begin{cases} 3a+b+d=5 \ \cdots ⑥' \\ b-d=2 \ \cdots ⑦' \end{cases}$$

⑥′, ⑧ より

$$2b + d = 4 \quad \cdots ⑨$$

⑦′, ⑨ より

$$b = 2,\ d = 0$$

⑥′, ⑤′ より

$$a = 1,\ c = -1$$

以上より

$$a = 1,\ b = 2,\ c = -1,\ d = 0 \qquad (答)$$

【2】(1) 条件より

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = 1 \quad \cdots ①$$
$$(ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = 1 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 = 0 \qquad \therefore \quad (ac + bd)^2 = 0$$

ゆえに，$ac + bd = 0$. 〔証明終〕

(2) 条件より

$$ad - bc = 1 \quad \cdots ③$$
$$ac + bd = 0 \quad \cdots ④$$

③, ④ から b を消去する.

③ $\times d +$ ④ $\times c$ より

$$a(c^2 + d^2) = d$$

$c^2 + d^2 = 1$ より

$$a = d$$

次に，③, ④ から d を消去する.

③ $\times b -$ ④ $\times a$ より

$$b = -c(a^2 + b^2)$$

$a^2 + b^2 = 1$ より

$$b = -c$$

以上より $a = d,\ b = -c$ となる. 〔証明終〕

【3】(1) まず，$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ を証明する．

両辺とも正であるから，両辺の平方の差を調べると

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 &= a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)\\ &= 2\sqrt{ab} > 0\end{aligned}$$

よって

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$
$$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

次に，$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$ を証明する．

同様に，両辺とも正なので平方の差をとると

$$\begin{aligned}(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 &= 2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})\\ &= a+b-2\sqrt{ab}\\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0 \quad (\text{等号は，} a=b \text{ のとき成立．})\end{aligned}$$

よって

$$(\sqrt{2(a+b)})^2 \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$
$$\therefore\quad \sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

以上より

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$$

が成立．ただし，等号は，$a=b$ のとき成立．〔証明終〕

(2) 与式の左辺を展開すると

$$\left(\frac{1}{a}+2b\right)\left(a+\frac{2}{b}\right) = 5+\frac{2}{ab}+2ab$$

ここで，$a>0,\ b>0$ より

$$ab>0$$

ゆえに，相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{2}{ab}+2ab \geqq 2\sqrt{\frac{2}{ab}\cdot 2ab} = 4$$

等号が成り立つのは

$$\frac{1}{ab} = ab \qquad \therefore\quad ab=1$$

よって

$$\left(\frac{1}{a}+2b\right)\left(a+\frac{2}{b}\right) \geqq 9$$

が成立．ただし，等号は，$ab=1$ のとき成立．〔証明終〕

【4】(1) 与えられた関数は

$$y = \frac{(x+1)(x-1)+2}{x+1}$$
$$= x - 1 + \frac{2}{x+1}$$
$$= x + 1 + \frac{2}{x+1} - 2$$

と変形できて，$x > 0$ のとき $x + 1 > 0$ だから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$y \geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}} - 2$$
$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

が成立する．等号は

$$x + 1 = \frac{2}{x+1} \text{ かつ } x + 1 > 0$$

より，$x = \sqrt{2} - 1\ (> 0)$ のとき成立するから，求める y の最小値は $2(\sqrt{2} - 1)$. (答)

(2) $x \neq 0$ である．与えられた関数の分子，分母を x^2 で割ると

$$z = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \frac{y}{x}}$$

と変形できる．そこで $\frac{y}{x} = t$ とおくと

$$z = \frac{1+t^2}{1+t} = \frac{t^2+1}{t+1} \ \cdots ①$$

と表せる．また $x > 0$, $y > 0$ より，t の変域は

$$t > 0 \ \cdots ②$$

である．

①, ② は (1) の x, y をそれぞれ t, z で置き換えたものだから，(1) より，求める z の最小値は $2(\sqrt{2} - 1)$. (答)

【5】(1) $x + y = a + b$ より

$$y = a + b - x$$

であるから

$$\begin{aligned} xy \geqq ab \quad &\Longleftrightarrow \quad x(a+b-x) \geqq ab \\ &\Longleftrightarrow \quad -x^2 + (a+b)x \geqq ab \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - (a+b)x + ab \leqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-a)(x-b) \leqq 0 \end{aligned}$$

$a \leqq x \leqq b$ であるから，$(x-a)(x-b) \leqq 0$ が成り立つ．

よって

$$xy \geqq ab$$

が成り立つ.
ただし，等号は

$$(x,\ y) = (a,\ b),\ (b,\ a)$$

のとき成立. 〔証明終〕
<別解>
$f(x) = x(a+b-x)$ とおくと，$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，$a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最小値は $f(a)$ または $f(b)$ である.
ここで，$f(a) = f(b) = ab$ であるから，$a \leqq x \leqq b$ をみたすすべての x について $f(x) \geqq ab$ である．また，等号は $(x,\ y) = (a,\ b),\ (b,\ a)$ のとき成立する. 〔証明終〕

(2) $x + y + z = a + 2b$ より

$$z = a + 2b - y - x$$

であるから

$$xyz = xy(a + 2b - x - y)$$

ここで，上式の右辺を x の関数とみて

$$f(x) = yx(a + 2b - y - x)$$

とおく.
$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，$a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最小値は $f(a)$ または $f(b)$ である.

(i) $x = a$ のとき

$$y + z = 2b,\ a \leqq y \leqq b,\ a \leqq z \leqq b$$
$$\therefore\quad y = z = b$$

であるから

$$f(a) = ba(a + 2b - b - a) = ab^2$$

(ii) $x = b$ のとき

$$y + z = a + b,\ a \leqq y \leqq b,\ a \leqq z \leqq b$$
$$\therefore\quad yz \geqq ab \quad (\because (1))$$
$$\therefore\quad xyz \geqq ab^2$$

等号は $(y,\ z) = (a,\ b),\ (b,\ a)$ のとき成立.

以上より，$a \leqq x \leqq b$ をみたすすべての x について

$$f(x) \geqq ab^2$$

であるから

$$xyz \geqq ab^2$$

である.
ただし，等号は

$$(x,\ y,\ z) = (a,\ b,\ b),\ (b,\ a,\ b),\ (b,\ b,\ a)$$

のとき成立する. 〔証明終〕

添削課題

【1】(1) 与式を，c について整理すると

$$(3ab-2a-2b)c+3-2ab>0 \quad \cdots ①$$

ここで，$c=x$ とおき，さらに

$$f(x)=(3ab-2a-2b)x+3-2ab$$

とおいて，$0<x<1$ のとき $f(x)>0$ であることを示す．
$f(x)$ は x の 1 次以下の整式だから，x を変数であると考えれば，$y=f(x)$ のグラフは直線であり

$$0<a<1,\ 0<b<1$$

のとき

$$\begin{aligned} f(0)&=3-2ab>0 \\ f(1)&=ab-2a-2b+3 \\ &=(1-a)(1-b)+(1-a)+(1-b)>0 \end{aligned}$$

よって

$$0<x<1 \text{ のとき } f(x)>0$$

である．
以上より

$$0<a<1,\ 0<b<1,\ 0<c<1$$

のとき ① が成立するから

$$3(1+abc)>2(bc+ca+ab)$$

が成立する．〔証明終〕

(2) 与式を，c について変形すると

$$(1-2a-2b+3ab)c+a+b-2ab>0$$

ここで，$c=x$ とおき，さらに

$$f(x)=(1-2a-2b+3ab)x+a+b-2ab$$

とおいて，$0<a<1$，$0<b<1$，$0<x<1$ のとき $f(x)>0$ であることを示す．
ここで，$y=f(x)$ $(0<x<1)$ のグラフは直線であり

$$\begin{aligned} f(0)&=a+b-2ab \\ &=a(1-b)+b(1-a)>0 \\ f(1)&=1-a-b+ab \\ &=(1-a)(1-b)>0 \end{aligned}$$

よって，つねに $f(x)>0$ である．〔証明終〕

＜別解＞

左辺と右辺の差を考えると

$$\begin{aligned}
&\ a+b+c+3abc-2(bc+ca+ab)\\
&=a(1-b-c+bc)+b(1-c-a+ca)+c(1-a-b+ab)\\
&=a(1-b)(1-c)+b(1-c)(1-a)+c(1-a)(1-b)>0
\end{aligned}$$

より，与式は成立する．〔証明終〕

問題

【1】(1) 点 A より辺 BC に垂線を下ろし，その足を H とすると，$\angle B = 30^\circ$ であるから

$$\angle BAH = 60^\circ,\ \angle DAH = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

ゆえに

$$AH = AB \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$\triangle AHD$ は直角 2 等辺 3 角形であるから

$$DH = AH = 1$$

また，$\angle C = 15^\circ$ であるから

$$\angle CAH = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ,\ \angle EAH = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$

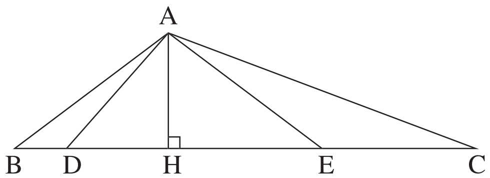
ゆえに

$$HE = AH \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

よって

$$DE = DH + HE = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{(答)}$$

図 7.1



(2) $\triangle AEC$ は，$\angle CAE = \angle C = 15^\circ$ の 2 等辺 3 角形であるから

$$AE = EC$$

$\triangle AEH$ において

$$AH = AE \cos 60^\circ$$

$$\therefore \quad AE = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = 2AH = 2$$

$AE = EC$ より

$$EC = 2$$

ゆえに

$$HC = HE + EC = \sqrt{3} + 2$$

$\triangle AHC$ において，3 平方の定理より

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$AC > 0$ より

$$AC = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

【2】与条件を図示すると，図 7.2 のようになる．

図 7.2

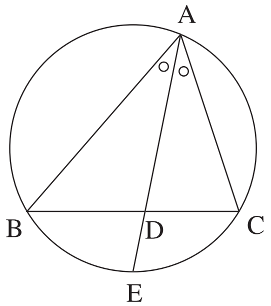


図 7.2 において，角の 2 等分線に関する定理より

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 8 : 6 = 4 : 3$$

が成り立つから

$$\begin{cases} \mathrm{BD} = \dfrac{4}{4+3}\mathrm{BC} = \dfrac{4}{7} \cdot 7 = 4 \\ \mathrm{DC} = \dfrac{3}{4+3}\mathrm{BC} = \dfrac{3}{7} \cdot 7 = 3 \end{cases}$$

$\mathrm{AD} = x$ とすると，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAD} = \frac{8^2 + x^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot x}, \quad \cos\angle\mathrm{DAC} = \frac{6^2 + x^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot x}$$

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DAC}$ より

$$\frac{8^2 + x^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot x} = \frac{6^2 + x^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot x}$$

$x > 0$ より

$$\frac{x^2 + 48}{4} = \frac{x^2 + 27}{3}$$

$$\therefore \quad x^2 = 36$$

$$\therefore \quad x = 6$$

よって，$\mathrm{AD} = 6$.

ここで，方べきの定理より

$$\mathrm{DA} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{DB} \cdot \mathrm{DC} \iff 6 \cdot \mathrm{DE} = 4 \cdot 3$$

$$\therefore \quad \mathrm{DE} = 2 \qquad (答)$$

【3】(1) 外接円の半径を R とおくと，正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R}$$

これを与式に代入して

$$\frac{a^2}{2R} + \frac{b^2}{2R} = \frac{c^2}{2R}$$

すなわち

$$a^2 + b^2 = c^2$$

であるから，$C = 90°$ の直角 3 角形となる．　　(答)

(2) 正弦定理，および余弦定理より

$$\frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \frac{\dfrac{b}{2R}}{\dfrac{c}{2R}}$$

$$\iff \quad \frac{a(b^2+c^2-a^2)+2c(a^2+b^2-c^2)}{a(b^2+c^2-a^2)+2b(c^2+a^2-b^2)} = \frac{b}{c}$$

$$\iff \quad ac(b^2+c^2-a^2)+2c^2(a^2+b^2-c^2) = ab(b^2+c^2-a^2)+2b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$\iff \quad (c-b)\left\{a(b^2+c^2-a^2)+2(c+b)(a^2-b^2-c^2)\right\} = 0$$

$$\iff \quad (c-b)(b^2+c^2-a^2)(a-2b-2c) = 0$$

3 角形の成立条件より

$$b + c > a \qquad \therefore \quad a - 2(b+c) < 0$$

であるから

$$b = c \quad \text{または} \quad b^2 + c^2 = a^2$$

したがって，$b = c$ の 2 等辺 3 角形 または $A = 90°$ の直角 3 角形である．　　(答)

【4】(1) 内接円の中心を I とし，半径を r とすると

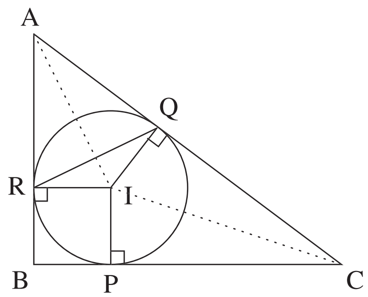
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}r(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}) = 6r \ \cdots ①$$

一方

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} = 6 \ \cdots ②$$

であるから，①, ② より $r = 1$.

図 7.3



よって

$$\mathrm{BP} = \mathrm{BR} = 1$$

$\mathrm{AB} = 3,\ \mathrm{BC} = 4$ より

$$\mathrm{AR} = \mathrm{AB} - \mathrm{BR} = 2,\ \mathrm{PC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BP} = 3$$

$\triangle\mathrm{ARI} \equiv \triangle\mathrm{AQI},\ \triangle\mathrm{CQI} \equiv \triangle\mathrm{CPI}$ より

$$\mathrm{AQ} = \mathrm{AR} = 2,\ \mathrm{CQ} = \mathrm{CP} = 3$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2 &= \mathrm{AR}^2 + \mathrm{AQ}^2 - 2\mathrm{AR} \cdot \mathrm{AQ} \cos \angle\mathrm{BAC} \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{QR} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \qquad (\text{答})$$

正弦定理より

$$\sin \angle\mathrm{QPR} = \frac{\mathrm{QR}}{2r} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad (\text{答})$$

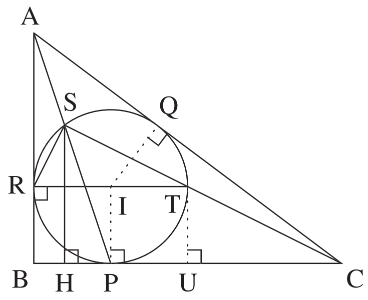
(2) 3 平方の定理より

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BP}^2} = \sqrt{10}$$

方べきの定理より

$$\begin{aligned}&\mathrm{AS} \cdot \mathrm{AP} = \mathrm{AQ}^2 \\ \therefore\ &\mathrm{AS} \cdot \sqrt{10} = 4 \\ \therefore\ &\mathrm{AS} = \frac{2}{5}\sqrt{10} \\ \therefore\ &\mathrm{SP} = \mathrm{AP} - \mathrm{AS} = \frac{3}{5}\sqrt{10} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

図 7.4



S から BC に下ろした垂線の足を H とすると，$\triangle$ABP $\backsim$ $\triangle$SHP より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{SH} = \mathrm{BP} : \mathrm{HP} = \mathrm{AP} : \mathrm{SP} = 5 : 3$$

AB = 3, BP = 1 より

$$\mathrm{SH} = \frac{9}{5},\ \mathrm{HP} = \frac{3}{5}$$

よって

$$\tan\angle\mathrm{BCS} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CH}} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{HP} + \mathrm{PC}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{18}{5}} = \frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(3) T から BC に下ろした垂線の足を U とすると

$$\mathrm{UC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BU} = \mathrm{BC} - \mathrm{RT} = \mathrm{BC} - 2r = 2$$

より

$$\tan\angle\mathrm{BCT} = \frac{\mathrm{TU}}{\mathrm{UC}} = \frac{1}{2}$$

であり，$\tan\angle\mathrm{BCS} = \tan\angle\mathrm{BCT}$ より 3 点 C，T，S は同一直線上にある．
よって

$$\angle\mathrm{RSC} = \angle\mathrm{RST} = 90^\circ \quad (\because\ \mathrm{RT}\ \text{は直径}) \qquad \text{(答)}$$

また，円周角の定理より

$$\angle\mathrm{PSC} = \angle\mathrm{PST} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{PIT} = 45^\circ \qquad \text{(答)}$$

【5】頂点 A，B，C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とする．$A+B+C=\pi$ であるから

$$4\sin(\pi-C)\sin C=1 \qquad \therefore \quad 4\sin^2 C=1$$

$0<C<\pi$ だから

$$\sin C=\frac{1}{2}(>0),\ \cos C=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

外接円の半径を R とすると，$R=\sqrt{2}$ なので，正弦定理より

$$c=2R\sin C=\sqrt{2}$$

また，面積が $\sqrt{3}$ であることから

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3} \qquad \therefore \quad ab=4\sqrt{3}$$

余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

なので，$c=\sqrt{2}$, $ab=4\sqrt{3}$, $\cos C=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入すると

$$a^2+b^2=2+2\cdot 4\sqrt{3}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\pm 12=14,\ -10$$

a, b は実数だから

$$a^2+b^2=14$$

これに $b=\dfrac{4\sqrt{3}}{a}$ を代入して

$$a^2+\frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2}=14$$
$$\therefore \quad a^4-14a^2+48=(a^2-8)(a^2-6)=0$$

$a>0$ なので

$$a=2\sqrt{2},\ \sqrt{6}$$

これより

$$a=2\sqrt{2},\ b=\sqrt{6} \quad \text{または} \quad a=\sqrt{6},\ b=2\sqrt{2}$$

だから，求める 3 辺の長さは

$$2\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ \sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

また，△ABC の内接円の半径を r とすると

$$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2})r=\sqrt{3}$$
$$\therefore \quad r=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) Q は $\triangle$PAB の内心であるから

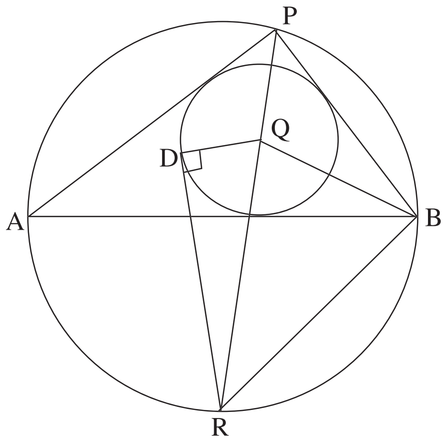
$$\angle APQ = \frac{1}{2}\angle APB = 45^\circ$$

であり，円周角の定理より

$$\angle ABR = \angle APR = 45^\circ$$

ここで，A，B は定点であるから，R も定点である．

図 7.1



また，$\angle QBA = \angle QBP$，$\angle QPB = \angle ABR = 45^\circ$ より

$$\begin{aligned}\angle RQB &= \angle PBQ + \angle BPQ \\ &= \angle QBA + \angle ABR \\ &= \angle QBR\end{aligned}$$

であるから，$\triangle$BQR は RQ = RB の 2 等辺 3 角形である．
ここで，$\triangle$RAB は直角 2 等辺 3 角形であるから，AB = 2 より QR = RB = $\sqrt{2}$.
すなわち，Q は R を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の劣弧 AB 上の点である．ただし，端点 A, B をのぞく．　(答)

(2) R から △PAB の内接円に引いた接線の接点を D とすると，DQ⊥RD であるから

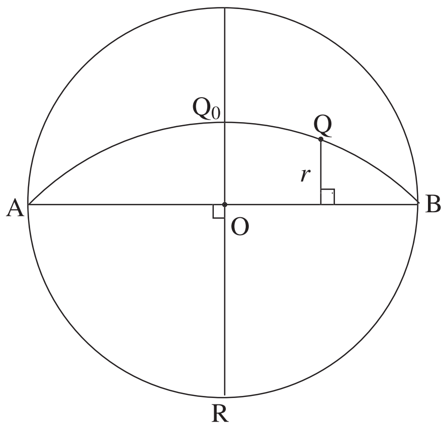
$$\mathrm{RD}^2 = \mathrm{QR}^2 - \mathrm{QD}^2 \qquad \therefore \quad l^2 = 2 - r^2$$

$l > 0$，$0 < r < 1$ より

$$l = \sqrt{2 - r^2} \qquad \text{(答)}$$

ゆえに，r が最大となるとき，l は最小となる．ここで，内接円は辺 AB に接するので，r は Q から辺 AB に下ろした垂線の長さに一致する．そして，Q は R を中心として A，B を通る円弧上を動くので，円 C の中心を O とすると，r が最大になるのは Q が直線 OR 上にあるときである (図 7.2 参照).

図 7.2



このとき

$$r = \mathrm{Q_0R} - \mathrm{OR} = \sqrt{2} - 1$$

よって，求める l の最小値は

$$l^2 = 2 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 1 \qquad \therefore \quad l = \sqrt{2\sqrt{2} - 1} \qquad \text{(答)}$$

M2JS/M2J

高２選抜東大数学

高２東大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	