M2JK

本科 1 期 5 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 東大数学 K

Lecture 4　平面ベクトルとその演算 - 解答

演習問題 4 − 1

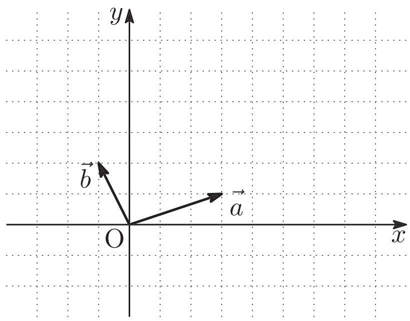
$\boxed{1}$　右図において，次のベクトルを，原点 O を始点として図示せよ．

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$.

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$.

(3)　$2\vec{b}$.

(4)　$2\vec{a}+\vec{b}$.



$\boxed{2}$　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル，$\vec{b}$ と平行な単位ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3)　$\vec{a}+k\vec{b}$ が x 軸，y 軸に平行になるような k の値をそれぞれ求めよ．

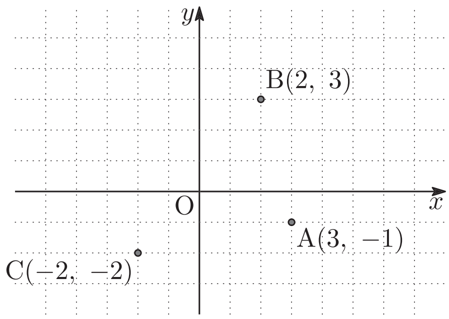
$\boxed{3}$　右図のように，いくつかの点が与えられている．次の問いに答えよ．

(1) O を基点とする点 B，点 C の位置ベクトルを求めよ．

(2) A を基点とする点 B，点 C の位置ベクトルを求めよ．

(3) 3 角形 ABC の重心 G の座標を求めよ．

(4) AB を 2 : 1 に内分する点 D の座標を求めよ．



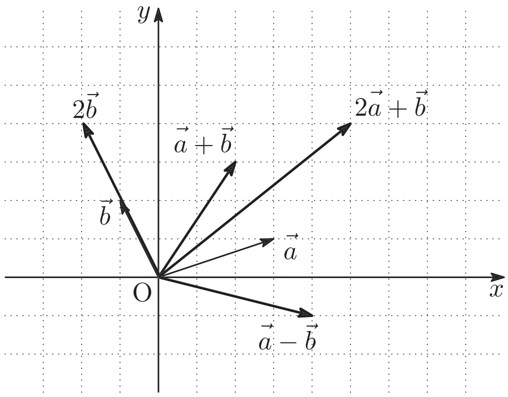
$\boxed{4}$　次の問いに答えよ．

(1) 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ -2)$，C$(2,\ c)$ が同一直線上にあるように，実数の定数 c の値を定めよ．

(2) 実数 p に対して，3 点 A$(2p,\ p)$，B$\left(3p,\ \dfrac{1}{2}p\right)$，C$(6p,\ -p)$ が同一直線上にあることを証明せよ．

解答・解説

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}2-3\\3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ より，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$. (**答**)

(2) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ より，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(答)}$$

また $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ より，$\vec{b}$ と平行な単位ベクトルは

$$\pm\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(答)}$$

(3) $\vec{a}+k\vec{b}=\begin{pmatrix}2-3k\\3+k\end{pmatrix}$ である.

(i) x 軸に平行のとき.
y 成分が 0 であるから，$k=-3$. (**答**)

(ii) y 軸に平行のとき.
x 成分が 0 であるから，$k=\dfrac{2}{3}$. (**答**)

$\boxed{3}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$. (**答**)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$. (**答**)

(3) O を基点とする点 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3+2-2 \\ -1+3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって G(1, 0).　　(**答**)

(4) （内分点の位置ベクトルの公式を用いてもよいが）O を基点とする点 D の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

よって $\mathrm{D}\left(\frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right)$.　　(**答**)

$\boxed{4}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ c-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$ で，3 点 A，B，C が同一直線上であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

をみたす実数 t が存在する．x 成分から $t = -\frac{1}{2}$，y 成分から $c = 1$.　　(**答**)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3p-2p \\ \frac{1}{2}p-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 6p-2p \\ -p-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p \\ -2p \end{pmatrix}$. すなわち任意の実数 p に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

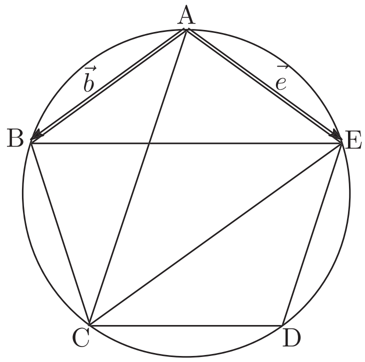
であるから，3 点 A，B，C は同一直線上にある．　　**〔証明終〕**

演習問題 4 − 2

正 5 角形 ABCDE に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{e}$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ を $\vec{e}$ を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{e}$ を用いて表せ．

解答・解説



まず，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BE}=\phi\ (>0)$ とすると，4 角形 ABCE にトレミーの定理を用いて

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CE}+\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}$$
$$1\cdot\phi+1\cdot1=\phi\cdot\phi.$$

整理して

$$\phi^2-\phi-1=0. \qquad \therefore\quad \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (>0).$$

以下この値を用いる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{e}-\vec{b}.$ **(答)**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ は同じ向きであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\phi\vec{e}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{e}. \qquad \textbf{(答)}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\vec{b}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{e}.$ **(答)**

演習問題 4 − 3

3 角形 ABC に対して，線分 AB を 2 : 1 に外分する点を P，線分 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 CA の中点を R とするとき，3 点 P，Q，R は同一直線上にあることを示せ．

解答・解説

$\mathrm{A}(\vec{0})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b}.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - 2\vec{b} \\ &= \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{4}{3}\vec{b} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}.\end{aligned}$$

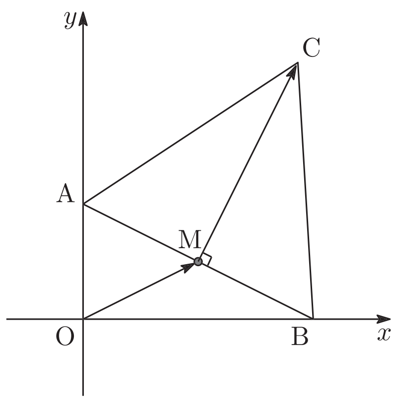
よって 3 点 P，Q，R は同一直線上にある．　**〔証明終〕**

補充問題 4 − 1

$\boxed{1}$ 座標平面上に 2 点 A(0, 1)，B(2, 0) がある．第 1 象限の点 C に対して，3 角形 ABC が正 3 角形となるような C の座標を求めよ．

$\boxed{2}$ 点 K(3, 5) を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円 C がある．直線 $l : 3x + y = k$ が円 C と接するとき，接点の座標を求めよ．ただし k は実数の定数とする．

解答・解説



$\boxed{1}$ AB の中点を M とする．AB の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であるから，MC の傾きは 2．すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

また $\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{5}$ であるから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \pm\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

よって

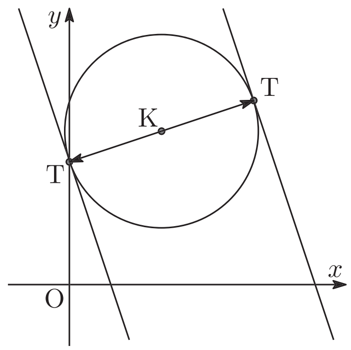
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \pm \sqrt{3} \\ 1 \pm 2\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad \text{(以上すべて複号同順)} \end{aligned}$$

点 C は第 1 象限であるから "+" の方をとって，求める座標は

$$\mathrm{C}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right). \qquad (\textbf{答})$$

$\boxed{2}$ 円 C と直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} C\ &: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 10, \\ l\ &: y = -3x + k. \end{aligned}$$



l の傾きは -3 であるから，接点を T とすると KT の傾きは $\dfrac{1}{3}$．すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{KT}} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{KT}}\right| = \sqrt{10}$ であるから，$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ と同じ向きの単位ベクトルを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{KT}} = \pm\left|\overrightarrow{\mathrm{KT}}\right|\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\} = \pm\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KT}} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

より，求める接点の座標は

$$(6,\ 6),\quad (0,\ 4).\qquad (\textbf{答})$$

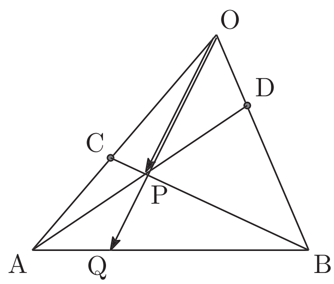
Lecture 5　共線条件と内積 - 解答

演習問題 5 − 1

$\boxed{1}$　次の 4 つの条件がすべて同値であることを示せ．

- 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ が同一直線上にある．
- $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたす実数 t が存在する．
- $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ をみたす実数 t が存在する．
- $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ かつ $s + t = 1$ をみたす実数 s，t が存在する．

$\boxed{2}$　図の 3 角形 OAB で，$\mathrm{OC} : \mathrm{CA} = 4 : 3$，$\mathrm{OD} : \mathrm{DB} = 1 : 2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．AD と BC の交点を P，OP と AB の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．



$\boxed{3}$　3 角形 ABC の内部の点 P に対して，

$$4\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

が成り立っている．3 角形 ABC の面積が 1 であるとき，3 角形 PAB の面積を求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$　3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ が同一直線上のとき，AP // AB，または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

をみたす実数 t が存在する．このとき

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\therefore \quad \vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}.$$

ここで $s=1-t$ とおくと，$s+t=1$ であるから

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1.$$

逆にこのとき，$s=1-t$ を上式に代入して

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}.$$

右辺を t について整理すると

$$\vec{p}-\vec{a}=t(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

t は実数であるから，AP // AB，または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$．すなわち 3 点 A，B，P は同一直線上にある．

以上より示された．　**〔証明終〕**

$\boxed{2}$　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{4}{7}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$ である．

(I) 3 点 A，P，D が共線であるから，s を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}.\quad\cdots①$$

(II) 3 点 C，P，B が共線であるから，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{4}{7}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}.\quad\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，

$$1-s=\frac{4}{7}(1-t),\quad \frac{1}{3}s=t$$

連立して解くと $s=\dfrac{9}{17}$，$t=\dfrac{3}{17}$．① に $s=\dfrac{9}{17}$ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{17}\vec{a}+\frac{3}{17}\vec{b}.\qquad \text{(答)}$$

また 3 点 O，P，Q が共線であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{17}k\vec{a}+\frac{3}{17}k\vec{b}.$$

3 点 A，Q，B が共線であるから

$$\frac{8}{17}k+\frac{3}{17}k=1.\qquad \therefore\quad k=\frac{17}{11}.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{17}{11}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{11}\vec{a}+\frac{3}{11}\vec{b}.\qquad \text{(答)}$$

$\boxed{3}$ $4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}\quad\cdots(*)$ とおく．$(*)$ で，点 A を始点とすると

$$
\begin{aligned}
-4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+5(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})&=\vec{0}\\
12\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\
\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{3}{12}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.
\end{aligned}
$$

ここで AP と BC の交点を Q とする．

(I)　3 点 A，P，Q が共線であるから，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{12}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{12}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

(II)　3 点 B，Q，C が共線であるから

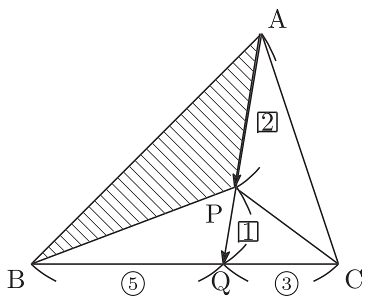
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{12}t+\frac{5}{12}t&=1.\\
\therefore\quad t&=\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

以上より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である．すなわち

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{APB}&=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABQ},\\
\triangle\mathrm{ABQ}&=\frac{5}{8}\triangle\mathrm{ABC}
\end{aligned}
$$



より

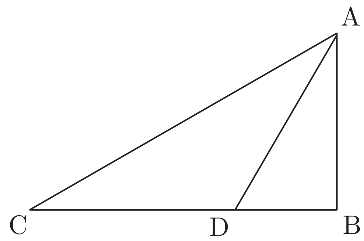
$$\triangle\mathrm{APB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{5}{12}.\qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 5 − 2

$\boxed{1}$ 図の 3 角形 ABC において，$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ $\angle\mathrm{ACB}=30^\circ$，線分 AD は角 BAC の 2 等分線であるとする．次の内積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.　(5) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$.　(6) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.



$\boxed{2}$ 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\left|\vec{a}\right|=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，$\left|\vec{b}\right|=\dfrac{2}{3}$ で，なす角が $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算せよ．

(2) $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ を計算せよ．

(3) $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|$ を計算せよ．

解答・解説

$\boxed{1}$ $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{AD}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{DB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=1.$ **(答)**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1\cdot\cos 30^\circ=1.$ **(答)**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=2\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=-1.$ **(答)**

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150^\circ=-3.$ **(答)**

(5) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\cos 30^\circ=2.$ **(答)**

(6) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{3}.$ **(答)**

$\boxed{2}$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}.$　　(**答**)

(2) $\left|\vec{a}\right|^2=\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{4}$, $\left|\vec{b}\right|^2=\dfrac{4}{9}$ であり,

$$\begin{aligned}\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)&=2\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-6\left|\vec{b}\right|^2\\&=2\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)-6\left(\frac{4}{9}\right)\\&=\frac{1+5\sqrt{3}}{3}.\qquad(\textbf{答})\end{aligned}$$

(3) $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$ であり,

$$\begin{aligned}\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)&=4\left|\vec{a}\right|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\left|\vec{b}\right|^2\\&=4\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{4}\right)-12\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)+9\left(\frac{4}{9}\right)\\&=5.\end{aligned}$$

よって $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{5}.$　　(**答**)

演習問題 5 − 3

$\boxed{1}$ 同一直線上にない 3 点 O，A，B に対して，3 角形 OAB の面積を S とし，$\mathrm{O}(\vec{0})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 次を示せ．

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき，

$$S = \frac{1}{2}|\,a_1b_2 - a_2b_1\,|$$

を示せ．

$\boxed{2}$ 半径 1 の円に内接する鋭角 3 角形 ABC の外心を O とする．

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

が成り立つとき，3 角形 OBC の面積を求めよ．

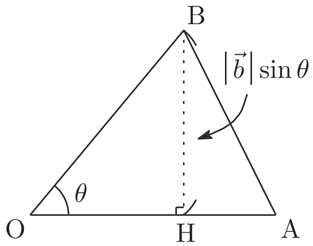
解答・解説

$\boxed{1}$

(1) 頂点 B から直線 OA に下ろした垂線の足を H とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{BH}.$$

ここで $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とおくと



$$\begin{aligned}\mathrm{BH} &= \mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB} \\ &= |\vec{b}|\sin\theta\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}.\end{aligned}$$

以上より示された. 〔証明終〕

(2) まず

$$\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$$
$$={a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2$$
$$=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2.$$

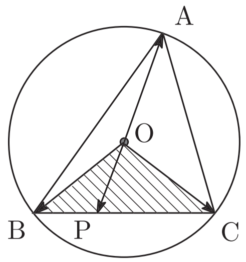
よって

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left|\,a_1b_2-a_2b_1\,\right|.$$

以上より示された. 〔証明終〕

$\boxed{2}$ $\mathrm{O}(\vec{0})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ とおく．与式は

$$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}\quad\cdots(*)$$



$(*)$ より

$$3\vec{b}+4\vec{c}=-2\vec{a}.$$

両辺それ自身との内積をとって

$$\left|3\vec{b}+4\vec{c}\right|^2=\left|-2\vec{a}\right|^2$$
$$9\left|\vec{b}\right|^2+16\left|\vec{c}\right|^2+24\vec{b}\cdot\vec{c}=4\left|\vec{a}\right|^2$$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$ であるから，

$$9+16+24\,\vec{b}\cdot\vec{c}=4$$
$$\therefore\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{7}{8}.$$

求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\right)^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(1\cdot1)^2-\left(-\frac{7}{8}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8^2-7^2}{8^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\sqrt{(8+7)(8-7)}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{16}.\qquad\textbf{(答)}$$

Lecture 6　ベクトル方程式 - 解答

演習問題 6 − 1

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ．

(1) 直線 $l_1 : y = 3x + 5$ をパラメータ表示せよ．

(2) 直線 $l_2 : 4x + 5y - 9 = 0$ をパラメータ表示せよ．

(3) 2 点 A(1, 2)，B(2, 5) を通る直線 l_3 をパラメータ表示せよ．

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ．

(1) 点 (2, 1) を通り，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ に垂直な直線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) 2 点 A(1, 2)，B(2, 5) を通る直線 l_2 の方程式を求めよ．

(3) 2 点 C(−2, 5)，D(6, 1) に対して，線分 CD の垂直 2 等分線 l_3 の方程式を求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) l_1 は傾き 3，定点 (0, 5) を通る直線であるから，l_1 上の点を P(x, y)，t を実数として

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 5+3t \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(答)}$$

(2) l_2 は定点 (1, 1) を通り，$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ とできる．よって l_2 上の点を P(x, y)，t を実数として

$$l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5t \\ 1-4t \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(答)}$$

(3) l_3 は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとし，点 A(1, 2) を通るから，l_3 上の点を P(x, y)，t を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(答)}$$

$\boxed{2}$

(1) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ として,

$$l_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0.$$

整理して，$l_1 : x + 4y - 6 = 0.$ (**答**)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ より，l_2 の法線ベクトルを $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ とできて，点 A(1, 2) を通るから

$$l_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0.$$

整理して，$l_2 : 3x - y - 1 = 0.$ (**答**)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ 1-5 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，l_3 の法線ベクトルを $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とできる．CD の中点を M とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

求める垂直 2 等分線は，CD に垂直で，点 M を通るから

$$l_3 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0.$$

整理して，$l_3 : 2x - y - 1 = 0.$ (**答**)

演習問題 6 − 2

各辺の長さが $\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=5$，$\mathrm{AB}=6$ の 3 角形 OAB がある．s，t を実数として，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　3 角形 OAB の面積を求めよ．

(2)　s，t が

$$s \geqq 0,\quad t \geqq 0,\quad 1 \leqq s+t \leqq 2$$

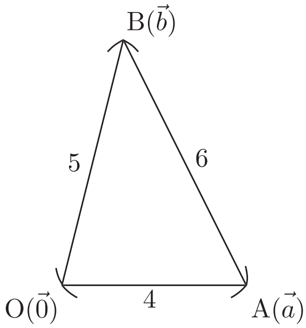
をみたすとき，点 P の存在領域の面積を求めよ．

解答・解説

(1)　$\mathrm{O}(\vec{0})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ とおく．3 角形 OAB に余弦定理を用いて

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$36=16+25-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2}.$$

よって，求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{(4\cdot5)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{(4\cdot2)^2-1}\\ &=\frac{15}{4}\sqrt{7}.\qquad(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(2)　$s+t=k$　$(1\leqq k\leqq 2)$ とおくと

$$\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1,\quad \frac{s}{k}\geqq 0,\quad \frac{t}{k}\geqq 0$$

であり，

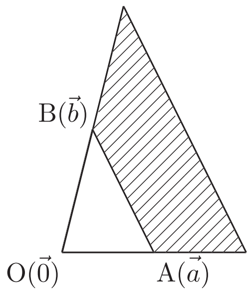
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\left(\frac{s}{k}\vec{a}+\frac{t}{k}\vec{b}\right)\\ &=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \end{aligned}$$

とおくと，点 Q は線分 AB 上であり，$1 \leqq k \leqq 2$ であるから P は線分 AB を，O を中心に k 倍相似拡大した線分上を動く．

$1 \leqq k \leqq 2$ で k を動かすと，点 P の存在領域は図の斜線部．

求める面積は

$$\left(2^2-1^2\right)S=\frac{45}{4}\sqrt{7}. \qquad \text{(答)}$$



演習問題 6 − 3

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の点 $\mathrm{K}(3,\ 2)$ を中心とする，半径 3 の円 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(5,\ 3)$，$\mathrm{B}(-1,\ -7)$ を直径の両端とする円 C_2 の方程式を求めよ．

(3) 円 C_2 上の点 $\mathrm{T}(-3,\ -5)$ における C_2 の接線の方程式を求めよ．

$\boxed{2}$ 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\left|\vec{a}\right| = 1$，$\left|\vec{b}\right| = 2$ をみたし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ と $2\vec{a} + \vec{b}$ のなす角を θ とする．$\cos\theta$ を求めよ．

(2) ベクトル方程式

$$\left|\vec{p}\right|^2 - \left(4\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \vec{p} + \left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$$

で定まる円の半径を求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) C_1 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$C_1 : \left|\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}\right| = 3$．両辺を 2 乗して，求める方程式は

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9. \qquad \text{(答)}$$

(2) A，B が直径の両端であるから，C_2 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として，$C_2 : \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$．すなわち

$$\begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y+7 \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0.$$

整理して，求める方程式は

$$C_2 : (x-2)^2 + (y+2)^2 = 34. \qquad \text{(答)}$$

(3) C_2 の中心を $\mathrm{C}(2,\ -2)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CT}} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ -5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$．求める接線を l，l 上の点を P として，

$$l : \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TP}} = 0$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ y+5 \end{pmatrix} = -5x - 3y - 30 = 0.$$

$$\therefore \quad l : 5x + 3y + 30 = 0. \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$ $\left|\vec{a}\right| = 1$，$\left|\vec{b}\right| = 2$ で，これらのなす角が 60° であるから，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ \\ &= 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

(1) まず，

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|^2 &= 4\left|\vec{a}\right|^2 + 9\left|\vec{b}\right|^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= 4\cdot 1^2 + 9\cdot 2^2 - 12\cdot 1 \\ &= 28.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2 &= 4\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= 4\cdot 1^2 + 2^2 + 4\cdot 1 \\ &= 12.\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right) &= 4\left|\vec{a}\right|^2 - 3\left|\vec{b}\right|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= 4\cdot 1 - 3\cdot 2^2 - 4\cdot 1 \\ &= -12.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)}{\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|} \\ &= \frac{-12}{\sqrt{28}\sqrt{12}} \\ &= -\frac{\sqrt{21}}{7}. \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 与えられた式は

$$\left\{\vec{p}-\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\right\}\cdot\left\{\vec{p}-\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right\} = 0$$

と変形される．$\mathrm{D}(2\vec{a}-3\vec{b})$，$\mathrm{E}(2\vec{a}+\vec{b})$ とおくと，この図形は DE を直径とする円である．

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (2\vec{a}+\vec{b}) - (2\vec{a}-3\vec{b}) = 4\vec{b}$$

より，求める半径は，

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = \left|2\vec{b}\right| = 4. \qquad \text{(答)}$$

添削課題 6 − 1

3 角形 OAB について，頂点 A，B におけるそれぞれの外角の 2 等分線の交点を C とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　点 P が ∠AOB の 2 等分線上にあるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

をみたす実数 t が存在することを示せ．

(2)　$|\vec{a}|=7$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

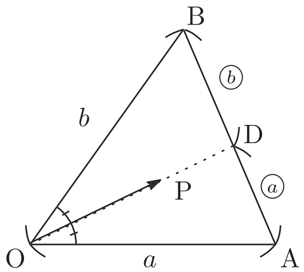
解答・解説

(1)　∠AOB の 2 等分線と直線 AB との交点を D とする．$|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$ として，

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=a:b$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}$ である．k を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおけるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}\right)$$
$$=\frac{kab}{a+b}\left(\frac{\vec{a}}{a}+\frac{\vec{b}}{b}\right).$$

すなわち $t=\dfrac{kab}{a+b}$ とおくと，

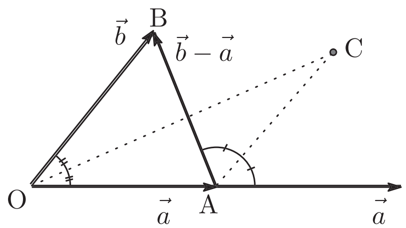
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表される．　**〔証明終〕**

(2)　(1) の結果より，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\quad\cdots①$$

とおける．また，



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\vec{a}+u\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)\quad\cdots②$$

ここで，

$$a = 7, \quad b = 5$$

であり，また

$$\begin{aligned} \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 &= \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= 25 + 49 - 10 \\ &= 64 \end{aligned}$$

より $\left|\vec{b} - \vec{a}\right| = 8$．よって ① は

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{t}{7}\vec{a} + \frac{t}{5}\vec{b}.$$

また ② は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \vec{a} + u\left(\frac{\vec{a}}{7} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{8}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{56}u\right)\vec{a} + \frac{u}{8}\vec{b} \end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{cases} \dfrac{t}{7} = 1 + \dfrac{1}{56}u \\ \dfrac{t}{5} = \dfrac{u}{8}. \end{cases}$$

連立して解くと

$$t = \frac{35}{4}, \quad u = 14.$$

以上より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}. \qquad \textbf{(答)}$$

Lecture 7　空間内のベクトル - 解答

演習問題 7 − 1

$\boxed{1}$　空間内の 2 点 A(1, 2, 2)，B(−1, 2, 5) に対して，次の問いに答えよ．

(1) AB 間の距離を求めよ．

(2) 3 角形 OAB の面積を求めよ．

(3) 平面 $x = 3$ 上の点 C に対して，3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，C の座標を求めよ．

(4) (3) の点 C に対して，3 角形 OBC の重心の座標を求めよ．

$\boxed{2}$　空間内の 2 点 A(1, 2, 3)，B(−1, 3, 2) について，直線 AB と xy 平面，yz 平面との交点をそれぞれ求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) $\mathrm{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13}$.　　**(答)**

(2) まず，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3,$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+5^2} = \sqrt{30},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 2\cdot 5 = 13$$

より，求める面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\right)^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 30 - 13^2} = \frac{1}{2}\sqrt{101}.\end{aligned}$$　**(答)**

(3) C(3, y, z) とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

である．3 点 A，B，C が共線であるから，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \therefore\ \begin{pmatrix} 2 \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}$$

と表される．x 成分より $t = -1$．y, z 成分より $y = 2$, $z = -1$．よって C(3, 2, −1).　**(答)**

(4) 求める重心を G とすると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1+3\\2+2\\5-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって $\mathrm{G}\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$. **(答)**

$\boxed{2}$ 直線 AB 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおく.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1-1\\3-2\\2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2t\\2+t\\3-t\end{pmatrix} \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

xy 平面の方程式は $z=0$ であるから,$(*)$ で $z=0$ として

$$3-t=0. \qquad \therefore \quad t=3.$$

$(*)$ で $t=3$ として,xy 平面との交点は $(-5,\ 5,\ 0)$. **(答)**

また,yz 平面の方程式は $x=0$ であるから,$(*)$ で $x=0$ として

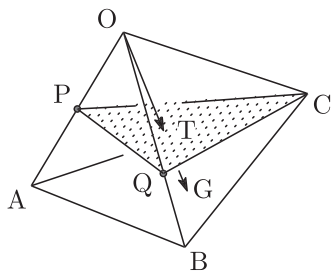
$$1-2t=0. \qquad \therefore \quad t=\frac{1}{2}.$$

$(*)$ で $t=\frac{1}{2}$ として,yz 平面との交点は $\left(0,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$. **(答)**

演習問題 7 − 2

4 面体 OABC に対して，3 角形 ABC の重心を G，OA の中点を P，OB を 2 : 1 に内分する点を Q，平面 CPQ と直線 OG の交点を T とする．$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

解答・解説



O($\vec{0}$)，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，G($\vec{g}$) とおく．まず，

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

である．次に

(I)　3 点 O，T，G は共線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}t\vec{a}+\frac{1}{3}t\vec{b}+\frac{1}{3}t\vec{c}.$$

(II)　4 点 C，P，Q，T は共面であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{1}{2}\beta\vec{a}+\frac{2}{3}\gamma\vec{b}+\alpha\vec{c},\quad \alpha+\beta+\gamma=1.\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}t=\dfrac{1}{2}\beta & \cdots① \\ \dfrac{1}{3}t=\dfrac{2}{3}\gamma & \cdots② \\ \dfrac{1}{3}t=\alpha & \cdots③ \\ \alpha+\beta+\gamma=1 & \cdots④\end{cases}$$

① より $\beta=\dfrac{2}{3}t$，② より $\gamma=\dfrac{1}{2}t$．③ をあわせて ④ に代入すると

$$\left(\frac{1}{3}t\right)+\left(\frac{2}{3}t\right)+\left(\frac{1}{2}t\right)=1.\qquad \therefore\quad t=\frac{2}{3}.$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}.\qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 7 − 3

3 点 A(0, 0, 1)，B(−4, −3, 3)，C(−1, 1, 5) を通る平面を π，点 K(7, 3, 2) を中心とする半径 5 の球面を S とする．平面 π と球面 S の交わりの円の半径を求めよ．

解答・解説

平面 π と直交するベクトルの 1 つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

より

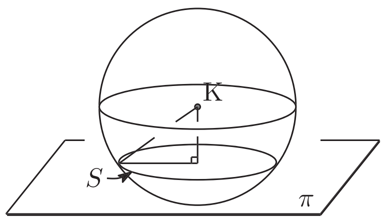
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\end{pmatrix}=-4a-3b+2c=0$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}=-a+b+4c=0$$

この 2 式で $b=1$ とおくと，$a=-1$，$c=-\dfrac{1}{2}$.　すなわち $\vec{n}\parallel\begin{pmatrix}-1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ であるから，

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

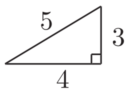
とできる．よって平面 π の方程式は



$$\pi:\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\quad 2x-2y+z-1=0\quad\cdots(*)$$

次に点 K(7, 3, 2) から平面 π までの距離を d とすると，



$$d=\frac{|2\cdot7-2\cdot3+2-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$$

よって求める半径は $\sqrt{5^2-3^2}=4$.　　(**答**)

演習問題 7 − 4

空間内の 4 点 A(1, 0, 0)，B(3, −1, 2)，C(2, −1, −1)，D(4, 0, 3) に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に直交するベクトルを 1 つ求めよ．

(2) 平面 ABC に点 D から下ろした垂線の長さを求めよ．

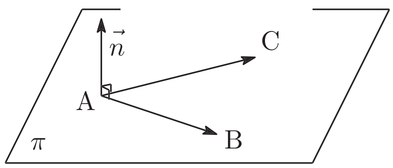
(3) 4 面体 ABCD の体積を求めよ．

解答・解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルの 1 つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2a-b+2c=0$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a-b-c=0.$$

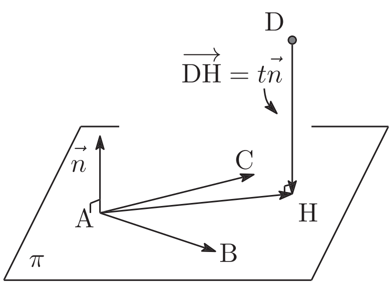
この 2 式で $b=1$ とすると $a=\dfrac{3}{4}$，$c=-\dfrac{1}{4}$．よって



$$\vec{n}\ /\!/ \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\1\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}.$$

すなわち $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ とできる．　(**答**)

(2) 平面 ABC を π とおくと，



$$\pi:\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-0\end{pmatrix}=0$$
$$\therefore\quad 3x+4y-z-3=0\quad\cdots(*)$$

次に，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$$

とおける．H は平面 π 上であるから，$x=4+3t$，$y=4t$，$z=3-t$ は $(*)$ をみたす．$(*)$ に代

入して

$$3(4+3t)+4(4t)-(3-t)-3=0$$
$$\therefore \quad t=-\frac{6}{26}.$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\left|t\vec{n}\right|=\frac{6}{26}\left|\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\right|=\frac{6}{\sqrt{26}}.$$

(3) 求める体積を V とすると,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|$$

である.

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}\\&=\frac{\sqrt{26}}{2}.\end{aligned}$$

であるから,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{26}}=1. \qquad (\textbf{答})$$

M2JK

高２東大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号		氏　名	