M1J/M1JS

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１選抜東大数学

高１東大数学

４章　図形と方程式（４）

問題

【1】(1) 条件をみたす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{PA} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
$$\mathrm{PB} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$\mathrm{PA} = \mathrm{PB}$　$\cdots\cdots$① より，

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

ここで，両辺とも正より，両辺を 2 乗して，

$$(x+1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

より，整理して

$$x = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots②$$

これは，点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通る y 軸に平行な直線を表す．

逆に，② をみたす任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ をとると，この計算を逆にたどることにより，① を導くことが出来る．

よって，点 P は条件に適する．

以上より，求める軌跡は，

直線 $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$　　(答)

(2) 条件をみたす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{PA}^2 - \mathrm{PB}^2 = 3$$

より，

$$\{(x+1)^2 + y^2\} - \{(x-2)^2 + y^2\} = 3$$

整理して，$x = 1$. これは，点 $(1, 0)$ を通り y 軸に平行な直線を表す．また，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は，

直線 $\boldsymbol{x = 1}$　　(答)

(3) 条件をみたす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=5$$

より，

$$\{(x+1)^2+y^2\}+\{(x-2)^2+y^2\}=5$$

整理して，$x^2-x+y^2=0$.

$$\therefore\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

これは，点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を表す．また，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は

中心 $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}, \mathbf{0}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ の円　　(答)

(4) 条件をみたす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:1$$

つまり，AP=2PB.

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

ここで，両辺とも 0 以上より，両辺を 2 乗して，

$$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$$

整理して，$x^2-6x+y^2+5=0$.

$$\therefore(x-3)^2+y^2=4$$

これは，点 $(3, 0)$ を中心とする半径 2 の円を表す．また，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は，

中心 (3, 0)，半径 2 の円　　(答)

【2】 $\mathrm{P}(X,Y),\mathrm{C}(2,0),\mathrm{D}(-4,0)$ とする.

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=1:2$$

より

$$\mathrm{PB}=2\mathrm{PA} \qquad \therefore \mathrm{PB}^2=4\mathrm{PA}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

であるが，三平方の定理より

$$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PC}^2-\mathrm{AC}^2=(X-2)^2+Y^2-1$$
$$\mathrm{PB}^2=\mathrm{PD}^2-\mathrm{BD}^2=(X+4)^2+Y^2-4$$

これらを①へ代入して

$$(X+4)^2+Y^2-4=4\{(X-2)^2+Y^2-1\}$$

これより

$$3X^2+3Y^2-24X=0$$
$$\therefore\quad (X-4)^2+Y^2=16$$

これは条件をみたすから，求める軌跡は

中心 $(4,0)$, 半径 4 の円 (答)

【3】 点 P の座標を (x,y) とすると，

$$\mathrm{F}(0,1),\ l:y=-1$$

より，

$$\mathrm{PF}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

また，P と l の距離は $|y+1|$ であるから，点 P の条件より，

$$x^2+(y-1)^2=(y+1)^2$$

整理して，

$$y=\frac{1}{4}x^2$$

逆に，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の任意の点は，上の計算を逆にたどると，与えられた条件をみたすことがわかる.

よって，求める軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x^2}$ (答)

【4】点 Q の座標を (X, Y) とすると，Q は原点 O と点 $\mathrm{P}(x, y)$ を結ぶ線分を $1:2$ の比に内分するので，

$$X = \frac{2 \times 0 + 1 \times x}{1+2},\ Y = \frac{2 \times 0 + 1 \times y}{1+2}$$

すなわち，

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{3}x \\ Y = \dfrac{1}{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3X \\ y = 3Y \end{cases}$$

ここで，点 P は直線 $x + 2y - 6 = 0$ 上の点であるから，

$$3X + 2 \times 3Y - 6 = 0$$
$$\therefore X + 2Y - 2 = 0$$

したがって，点 Q は直線 $x + 2y - 2 = 0$ 上にあり，逆に，直線 $x + 2y - 2 = 0$ 上の任意の点は与えられた条件をみたすことがわかる．

よって，求める軌跡は，

直線 $\boldsymbol{x + 2y - 2 = 0}$　　(答)

【5】2 点 P，R の座標を，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{R}(X, Y)$ とおくと，R は線分 PQ を $3:2$ の比に外分するので，

$$X = \frac{-2 \times x + 3 \times 2}{3-2} = -2x + 6 \quad \cdots\cdots ①$$
$$\begin{aligned} Y &= \frac{-2 \times y + 3 \times 2}{3-2} \\ &= -2y + 6 \\ &= -2(x^2 - 2x + 4) + 6 \\ &= -2x^2 + 4x - 2 \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

① より，$x = -\dfrac{1}{2}X + 3$. これを ② に代入して，

$$\begin{aligned} Y &= -2\left(-\frac{1}{2}X + 3\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}X + 3\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}X^2 + 4X - 8 \end{aligned}$$

したがって，点 R は放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ 上にあり，逆に，この放物線上の任意の点は与えられた条件をみたすことがわかる．

よって，求める軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 8}$　　(答)

【6】動点 Q の座標を (u, v)，点 P の座標を (x, y) とし，条件から，x，y だけの関係式を導けばよい．

点 Q は $x^2+y^2=4$ 上の点だから，

$$u^2+v^2=4 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P は線分 QA の中点なので，

$$x=\frac{u+4}{2},\ y=\frac{v}{2}$$

よって，$u=2x-4$，$v=2y \quad \cdots\cdots ②$

② を ① に代入すると，

$$(2x-4)^2+(2y)^2=4$$

両辺を 4 で割ると，

$$(x-2)^2+y^2=1$$

したがって，これは，点 $(2,0)$ を中心とする半径 1 の円を表す．また，② より，

任意の点 (u, v) に対して，点 (x, y) は 1 通りに決まり，
任意の点 (x, y) に対して，点 (u, v) も 1 通りに決まる．

つまり，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は，

中心 (2, 0)，半径 1 の円 (答)

【7】傾き 2 の直線 $y=2x+k$ と放物線 $y=-x^2$ とが異なる 2 点で交わるので，2 次方程式 $-x^2=2x+k$，すなわち，

$$x^2+2x+k=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の判別式を D とすると，

$$D/4=1^2-1\times k>0$$
$$\therefore 1-k>0 \text{ より}, k<1 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，① の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-2$$

したがって，点 P の座標 (X, Y) とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-1 \\ Y=2X+k=k-2 \end{cases}$$

また，$Y=k-2$ と ② とから，$Y<-1$

よって，点 P の軌跡は

直線 $x=-1$ の $y<-1$ の部分 (答)

【8】 $x^2+y^2-6x+4y=0$ より,

$$(x-3)^2+(y+2)^2=13$$

この円周上の点 P の座標を $(u,\ v)$ とすると,

$$(u-3)^2+(v+2)^2=13 \quad \cdots\cdots ①$$

また, $\triangle$OAP の重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると,

$$x=\frac{0+6+u}{3}=\frac{u+6}{3}$$

よって, $u=3x-6 \quad \cdots\cdots ②$

$$y=\frac{0+0+v}{3}=\frac{v}{3}$$

よって, $v=3y \quad \cdots\cdots ③$

②, ③ を ① に代入すると,

$$(3x-6-3)^2+(3y+2)^2=13$$
$$(3x-9)^2+(3y+2)^2=13$$

両辺を 9 で割って,

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで, 点 P が O または A に一致するとき, $\triangle$OAP は作れないので, この場合を除く. つまり,

P と O が一致するとき, $(u,\ v)=(0,\ 0)$ より,

$$(x,\ y)=(2,\ 0)$$

P と A が一致するとき, $(u,\ v)=(6,\ 0)$ より,

$$(x,\ y)=(4,\ 0)$$

この計算は逆にたどることができるから, 求める軌跡は,

中心 $\left(\mathbf{3},\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{3}}$ の円
ただし, 2 点 (2, 0), (4, 0) は除く (答)

【9】(1) A, B は直線 l に関して同じ側にあるから，直線 $l : y = mx$ について，点 B と対称な点を B' として，直線 AB' と l との交点を P とすればよい．

点 B の直線 l に関する対称点 B' の座標を (u, v) とすると，BB' の中点 $\left(\dfrac{u+2}{2}, \dfrac{v}{2}\right)$ は l 上の点だから，

$$\frac{v}{2} = m \times \frac{u+2}{2}$$

$$\therefore v = m(u+2) \quad \cdots\cdots ①$$

また，BB' は l に垂直だから，

$$\frac{v}{u-2} = -\frac{1}{m}$$

$$\therefore mv = 2 - u \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，$u = \dfrac{2-2m^2}{m^2+1}$，$v = \dfrac{4m}{m^2+1}$.

よって，$\mathrm{B}'\left(\dfrac{2-2m^2}{m^2+1}, \dfrac{4m}{m^2+1}\right)$ だから，直線 AB' の方程式は，

$$\left(\frac{4m}{m^2+1} - 0\right)(x-1) - \left(\frac{2-2m^2}{m^2+1} - 1\right)(y-0) = 0$$

整理して，

$$4mx + (3m^2-1)y - 4m = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

よって，l と ③ との交点 P の座標は，

$$4mx + (3m^2-1)mx - 4m = 0$$

$m \neq 0$ だから, $x = \dfrac{4}{3(m^2+1)}$

したがって，$y = \dfrac{4m}{3(m^2+1)}$

以上から，$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3(m^2+1)}, \dfrac{4m}{3(m^2+1)}\right)}$ （答）

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$x=\dfrac{4}{3(m^2+1)}$ より，$x \fallingdotseq 0$ で，

$$3(m^2+1)x=4 \quad \cdots\cdots ④$$

また，点 P は $y=mx$ 上の点でもあるから，

$$m=\frac{y}{x}$$

④ に代入して，

$$3\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)x=4$$
$$\therefore x^2-\frac{4}{3}x+y^2=0$$

ここで，$m \fallingdotseq 0$ より，$y \fallingdotseq 0$ だから，x 軸との交点 $(0,\ 0)$ と $\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く．よって，求める図形は

中心 $\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{3}},\ \boldsymbol{0}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ の円

$\Big($ただし，$(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0})$ と $\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{3}},\ \boldsymbol{0}\right)$ は除く$\Big)$ (答)

【10】 $y=x^2 \quad \cdots\cdots ①$

とする.

① の接線は，y 軸に平行になることはないので，接線の傾きを m とする.

① 上の点 $(a,\, a^2)$ における接線の方程式は,

$$y=m(x-a)+a^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より,

$$x^2=m(x-a)+a^2$$

$$\therefore x^2-mx-a^2+am=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

② は ① に接するので，③ は重解をもつから，判別式 $D=0$

$$\therefore (-m)^2-4\times1\times(-a^2+am)=0$$

$$\therefore (m-2a)^2=0 \text{ より}, m=2a$$

これを ② に代入して,

$$y=2a(x-a)+a^2$$

$$\therefore y=2ax-a^2 \quad \cdots\cdots ④$$

同様にして，① 上の点 $(b,\, b^2)$ における接線の方程式は,

$$y=2bx-b^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$a \fallingdotseq b$ として，④，⑤ の交点を P として，座標を求めると，$2ax-a^2=2bx-b^2$ より,

$$x=\frac{a+b}{2}$$

よって，$y=ab$ となるから,

$$\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2},\, ab\right)$$

ここで，④，⑤ が直交するとき,

$$2a\times2b=-1$$

$$\therefore ab=-\frac{1}{4}$$

つまり，$\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2},\, -\frac{1}{4}\right)$ だから，点 P の軌跡は

直線 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{4}}$ 　　(答)

また，点 $(a,\ a^2)$，$(b,\ b^2)$ における法線の方程式はそれぞれ

$$y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2} \quad \cdots ⑥$$

$$y=-\frac{1}{2b}x+b^2+\frac{1}{2} \quad \cdots ⑦$$

となるから，$a \fallingdotseq b$ として，⑥，⑦の交点を Q とすると

$$-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2b}x + b^2 + \frac{1}{2}$$

より

$$x = -2ab(a+b)$$

したがって，$y = a^2 + ab + b^2 + \dfrac{1}{2}$ となるから

$$\mathrm{Q}\left(-2ab(a+b),\ a^2 + ab + b^2 + \frac{1}{2}\right)$$

ここで，⑥，⑦が直交するとき

$$\left(-\frac{1}{2a}\right)\left(-\frac{1}{2b}\right) = -1 \qquad \therefore \quad ab = -\frac{1}{4}$$

これより，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2}(a+b),\ (a+b)^2 + \dfrac{3}{4}\right)$ だから，点 Q の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y = 4x^2 + \dfrac{3}{4}}$ 　　(答)

【11】円 C 上の点 P は

$$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$$

と表せる．ここで M は

$$\mathrm{M}\left(\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta + 1}{2}\right)$$

と表せるから，$\mathrm{M}(X, Y)$ とすると

$$X = \frac{\cos\theta}{2}, \quad Y = \frac{\sin\theta + 1}{2}$$
$$\therefore \quad \cos\theta = 2X, \quad \sin\theta = 2Y - 1$$

そして，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ だから

$$(2X)^2 + (2Y-1)^2 = 1$$
$$\therefore \quad X^2 + \left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ここで，点 P が A に一致するとき，弦 AP は存在しないので，この場合を除く．つまり，P と A が一致するとき，P(0, 1) より，M(0, 1) だから求める軌跡は，

中心 $\boldsymbol{\left(0, \dfrac{1}{2}\right)}$**，半径** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ **の円．ただし，点 (0, 1) は除く．** 　　(答)

添削課題

【1】(1) 点 P の座標を $(x,\,y)$ とすると，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ ……① から

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}$$

両辺を平方して

$$(x-4)^2+(y-2)^2=(x-5)^2+(y-1)^2$$

$$\therefore\ x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2-10x+25+y^2-2y+1$$

$$\therefore\ x-y-3=0 \quad \cdots\cdots ②$$

（逆に,②をみたす任意の点 $(x,\,y)$ をとると，この計算を逆にたどることにより,①を導くことができる）

よって，点 P の軌跡は

直線　$\boldsymbol{x-y-3=0}$　　(答)

(2) 点 P の座標を $(x,\,y)$ とすると，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=8$ ……① から

$$(x-4)^2+(y-2)^2+(x-5)^2+(y-1)^2=8$$

$$\therefore\ 2x^2-18x+2y^2-6y+38=0$$

$$\therefore\ x^2+y^2-9x-3y+19=0 \quad \cdots\cdots ②$$

（逆に,②をみたす任意の点 $(x,\,y)$ をとると，この計算を逆にたどることにより,①を導くことができる）

よって，点 P の軌跡は

円　$\boldsymbol{x^2+y^2-9x-3y+19=0}$　　(答)

【2】点 R の座標を $(X,\,Y)$，直線 $2x-y+1=0$ 上の任意の点 P の座標を $(x,\,y)$ とする．R は点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ と点 $\mathrm{Q}(5,\,-1)$ を結ぶ線分を $3:1$ の比に外分するので

$$X=\frac{-1\cdot x+3\cdot 5}{3-1},\qquad Y=\frac{-1\cdot y+3\cdot(-1)}{3-1}$$

すなわち

$$\begin{cases} X=\dfrac{-x+15}{2} \\ Y=\dfrac{-y-3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2X+15 \\ y=-2Y-3 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，点 P は直線 $2x-y+1=0$ 上の点であるから，① を代入して

$$2(-2X+15)-(-2Y-3)+1=0$$

$$\therefore\ 2X-Y-17=0$$

したがって，点 R は直線 $2x-y-17=0$ 上にある．

（逆に，直線 $2x-y-17=0$ 上の任意の点は，与えられた条件をみたすことがわかる）

よって，求める軌跡は

直線　$\boldsymbol{2x-y-17=0}$　　(答)

【3】与えられた放物線を平方完成すると

$$y = x^2 + ax + 2a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a$$

したがって，この放物線の頂点の座標を $(X,\,Y)$ とすると

$$\begin{cases} X = -\dfrac{a}{2} & \cdots\cdots ① \\ Y = -\dfrac{a^2}{4} + 2a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より

$$a = -2X \quad \cdots\cdots ③$$

③ を ② に代入して

$$Y = -\frac{4X^2}{4} + 2 \cdot (-2X) = -X^2 - 4X$$

よって，求める軌跡は

放物線　$\boldsymbol{y = -x^2 - 4x}$　　(答)

【4】傾き -2 である直線を

$$y = -2x + a$$

とおく.

放物線と直線の交点の x 座標は

$$2x^2 = -2x + a$$

$$\therefore\ 2x^2 + 2x - a = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解として求められる.

異なる 2 点で交わるので，① の判別式を D とすると

$$D = 4 + 8a > 0 \qquad \therefore\ a > -\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

点 Q，R の座標をそれぞれ $(\alpha,\,-2\alpha + a)$，$(\beta,\,-2\beta + a)$ とおくと，中点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad y = \frac{-2\alpha + a - 2\beta + a}{2} = -(\alpha + \beta) + a$$

ここで，① において，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{2} = -1$$

よって

$$x = \frac{-1}{2}, \qquad y = 1 + a$$

ただし，② より

$$y = 1 + a > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である.

以上より，求める軌跡は

直線 $\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$ の $\boldsymbol{y > \dfrac{1}{2}}$ の部分　　(答)

５章　図形と方程式（５）

問題

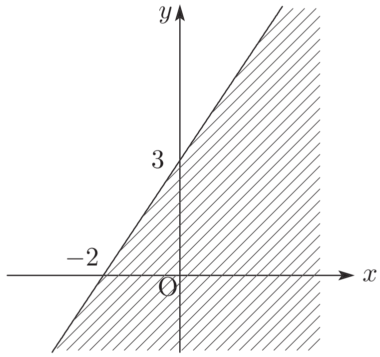
【1】(1) 与えられた不等式を変形すると,

$$y < \frac{3}{2}x + 3$$

である. この不等式の表す領域は,

直線 $y = \frac{3}{2}x + 3$ の下側

である. よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含まない.　　（答）



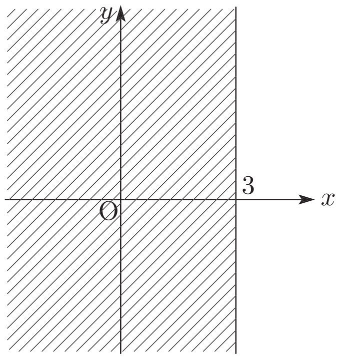
(2) 与えられた不等式を変形すると,

$$x \leqq 3$$

である. この不等式は x 座標が 3 以下の点の集合を表している. つまり, この不等式の表す領域は

直線 $x = 3$ 上およびこの直線の左側

である. よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含む.　　（答）



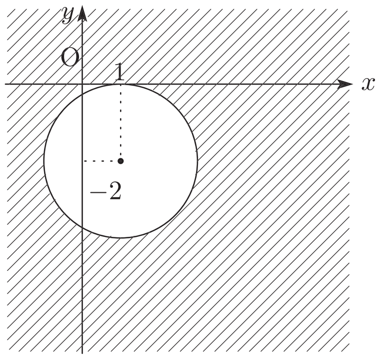
(3) 与えられた不等式を変形すると,

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 \geqq 4$$

である. この不等式の表す領域は,

円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 上,
およびこの円の外部

である. よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含む.　　（答）



(4) 与えられた不等式を変形すると,

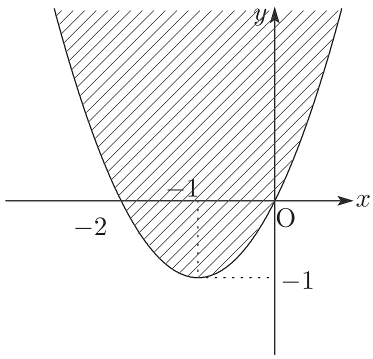
$$y > x^2 + 2x$$

である. この不等式の表す領域は,

放物線 $y = x^2 + 2x$ の上側

である.

よって, 求める領域は右図の斜線部分である.
境界は含まない. (答)

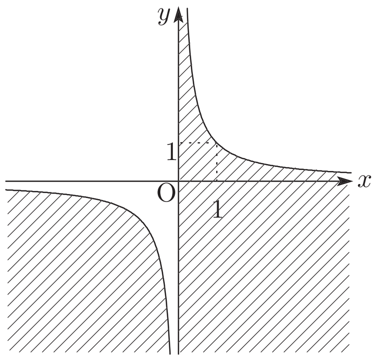


(5) 与えられた不等式の表す領域は

双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の下側

である.

よって, 求める領域は右図の斜線部分である.
境界は含まない. (答)



(6) 与えられた不等式を変形すると,

i) $x > 0$ のとき, $y < \dfrac{1}{x}$

ii) $x < 0$ のとき, $y > \dfrac{1}{x}$

iii) $x = 0$ のとき, y は任意

である. これらの不等式が表す領域は,

i) $x > 0$ のとき,

双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の下側

ii) $x < 0$ のとき,

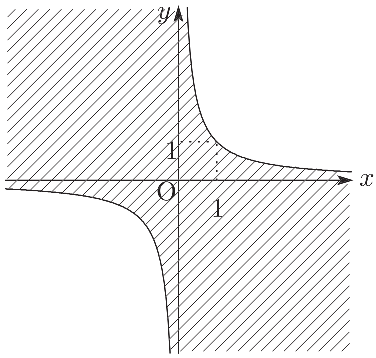
双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の上側

iii) $x = 0$ のとき,

直線 $x = 0$ 上

である.

よって, 求める領域は右図の斜線部分である.
境界は含まない. (答)



【2】(1)

$$\begin{cases} x+y>2 & \cdots ① \\ 2x-y>-1 & \cdots ② \end{cases}$$

不等式 ① を変形すると,

$y>-x+2$

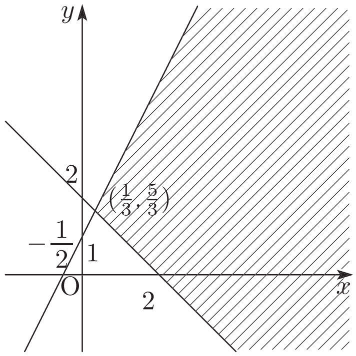
である．また，不等式 ② を変形すると，

$y<2x+1$

である．つまり，この連立不等式の表す領域は，

直線 $y=-x+2$ の上側で，
直線 $y=2x+1$ の下側である．

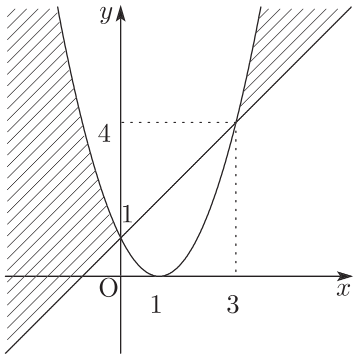
よって，求める領域は，右図の斜線部分である．境界は含まない．　（答）



(2) 与えられた連立不等式を変形すると，

$$\begin{cases} y \geqq x+1 & \cdots ① \\ y \leqq (x-1)^2 & \cdots ② \end{cases}$$

である．つまり，この連立不等式の表す領域は，
直線 $y=x+1$ 上およびこの直線の上側
かつ，
放物線 $y=(x-1)^2$ 上およびこの放物線の下側
である．
よって，求める領域は，右図の斜線部分である．
境界は含む．　（答）



(3) 与えられた不等式は

$$\begin{cases} y - 2x \geqq 0 \\ x - 2y + 4 \geqq 0 \end{cases}$$

または

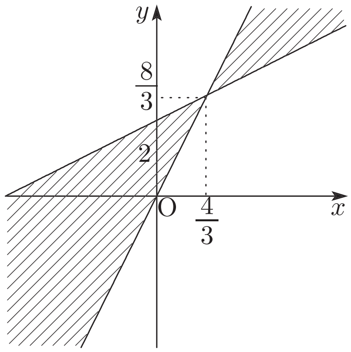
$$\begin{cases} y - 2x \leqq 0 \\ x - 2y + 4 \leqq 0 \end{cases}$$

これらを変形すると，

$$\begin{cases} y \geqq 2x & \cdots ① \\ y \leqq \dfrac{1}{2}x + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} y \leqq 2x & \cdots ③ \\ y \geqq \dfrac{1}{2}x + 2 & \cdots ④ \end{cases}$$



連立不等式 ①，② の表す領域と，連立不等式 ③，④ の表す領域を合わせると，図の斜線部分である．境界は含む．　　(答)

(4) 与えられた不等式は，

$$\begin{cases} -x + y - 8 > 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y < 0 \end{cases}$$

または，

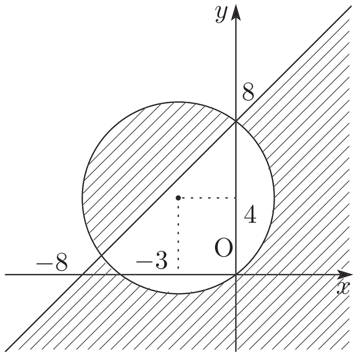
$$\begin{cases} -x + y - 8 < 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y > 0 \end{cases}$$

これらを変形すると，

$$\begin{cases} y > x + 8 & \cdots ① \\ (x+3)^2 + (y-4)^2 < 25 & \cdots ② \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} y < x + 8 & \cdots ③ \\ (x+3)^2 + (y-4)^2 > 25 & \cdots ④ \end{cases}$$



連立不等式 ①，② の表す領域と，連立不等式 ③，④ の表す領域をあわせると，図の斜線部分である. 境界は含まない.　　(答)

【3】(1) 境界は

$$\begin{array}{l} \text{直線 } y = 2x + 4 \ \cdots ① \\ \text{直線 } y = -x + 2 \ \cdots ② \end{array}$$

である.

領域は，直線 ① の下側，直線 ② の上側だから，境界を含まないことを考えて，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y < 2x + 4} \\ \boldsymbol{y > -x + 2} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) 境界は

$$\begin{array}{r} \text{直線 } y = -x + 1 \cdots ① \\ \text{円 } x^2 + y^2 = 9 \cdots ② \end{array}$$

であり，

領域は，直線 ① の下側，円 ② の内側だから，境界を含まないことを考えて，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y < -x + 1} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 < 9} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(3) 境界は，

$$\begin{array}{r} \text{放物線 } y = (x-2)^2 \\ \text{直線 } y = \dfrac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

であり，領域は，境界を含まないことを考えて，

$$\begin{cases} y < (x-2)^2 & \text{つまり, } x^2 - 4x - y + 4 > 0 \cdots ① \\ y > \dfrac{1}{2}x + 2 & \text{つまり, } x - 2y + 4 < 0 \cdots ② \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} y > (x-2)^2 & \text{つまり, } x^2 - 4x - y + 4 < 0 \cdots ③ \\ y < \dfrac{1}{2}x + 2 & \text{つまり, } x - 2y + 4 > 0 \cdots ④ \end{cases}$$

より，

$$\boldsymbol{(x^2 - 4x - y + 4)(x - 2y + 4) < 0} \qquad \text{(答)}$$

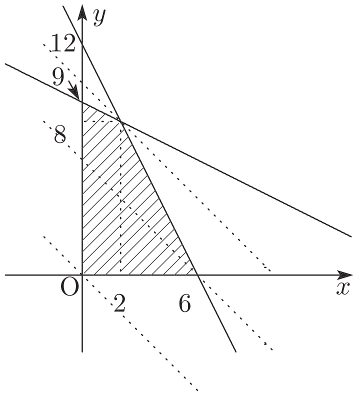
(4) 境界は，

$$\begin{array}{r} \text{円 } x^2 + y^2 = 4 \\ \text{直線 } x = 0,\ x = 1 \end{array}$$

であり，領域は，境界を含まないことを考えて，

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 < 4,\ 0 < x < 1} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)



$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+9 & \cdots ① \\ y \leqq -2x+12 & \cdots ② \end{cases}$$

より，存在する領域は右の図の斜線部分.
境界は含む.　(答)

(2) $x+y=k$ とおくと，

$$y=-x+k$$

より，傾きが -1 の直線である.
この直線を上方に平行移動すると k の値は増加し，下方に平行移動すると k の値は減少する．この直線が，図示された領域を通るとき，最も上方にくるのは，① と ② の交点 (2, 8) を通るときであり，最も下方にくるのは，原点 (0, 0) を通るときである.
したがって，$x+y$ は，

$x=2,\ y=8$ のとき，最大値 10
$x=0,\ y=0$ のとき，最小値 0

をとる.
したがって，

$\boldsymbol{0 \leqq x+y \leqq 10}$　　(答)

【5】$2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ と変形されるので，これは，傾き -2 の直線である．

したがって，この直線と条件の不等式の領域が共有点を持つときの k の値の範囲を調べて，k の最大値，最小値を求めればよい．

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ y=-2x+k & \cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して，

$$x^2+(-2x+k)^2=1$$

整理して，

$$5x^2-4kx+k^2-1=0 \quad \cdots ③$$

② が ① に接するとき，③ は重解を持つので，

$$\begin{aligned} \text{解の判別式 } D &= (-4k)^2-4\times5\times(k^2-1) \\ &= -4k^2+20=0 \end{aligned}$$

$\therefore\ k^2=5$ より，$k=\pm\sqrt{5}$

よって，

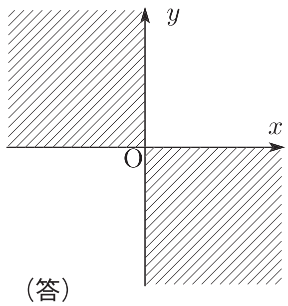
k の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$　　(答)

【6】(1) 境界線は，$x=0$，$y=0$. これによって，座標平面は 4 つの領域に分けられるが，そのうち 1 つの領域の点
$(1,-1)$ について，

$$xy=1\times(-1)=-1<0$$

より，不等式を満たす.

よって，領域は，右の図の通り. 境界は含まない. （答）

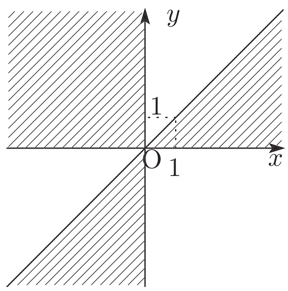


(2) 境界線は，$x=0$，$y=0$，$x-y=0$. これによって，座標平面は 6 つの領域に分けられるが，そのうち 1 つの領域の点 $(1,-1)$ について，

$$xy(x-y)=1\times(-1)\times(1+1)=-2<0$$

より，不等式を満たさない.

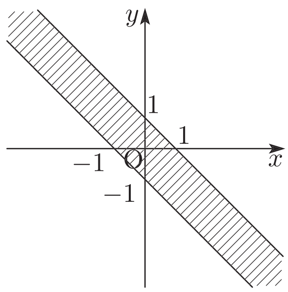
よって，領域は，右の図の通り. 境界は含む. （答）



(3) $-1\leqq x+y\leqq 1$ より，

$$\begin{cases} x+y\geqq -1 \\ x+y\leqq 1 \end{cases}$$

よって，領域は右の図の通り. 境界は含む. （答）



(4) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，

$x+y<1$ $\qquad\therefore\ y<-x+1$

$x<0,\ y\geqq 0$ のとき，

$-x+y<1$ $\qquad\therefore\ y<x+1$

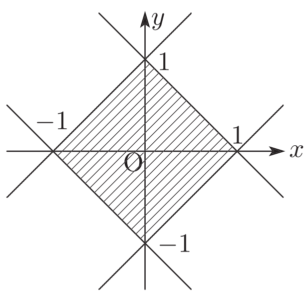
$x<0$，$y<0$ のとき，

$-x-y<1$ $\qquad\therefore\ y>-x-1$

$x\geqq 0$，$y<0$ のとき，

$x-y<1$ $\qquad\therefore\ y>x-1$

よって，領域は右の図の通り. 境界は含まない. （答）

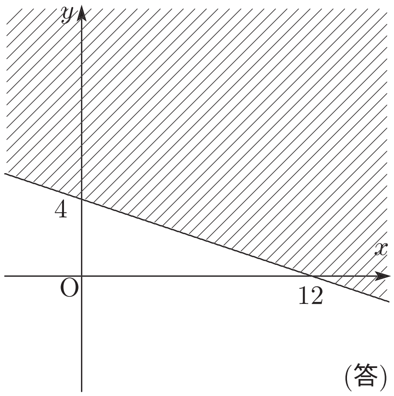


添削課題

【1】(1) $x+3y-12 \geqq 0$ より

$$y \geqq -\frac{1}{3}x+4$$

したがって，直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+4$ の直線上および上方の部分を表すから，右の図の斜線部分で，境界を含む．



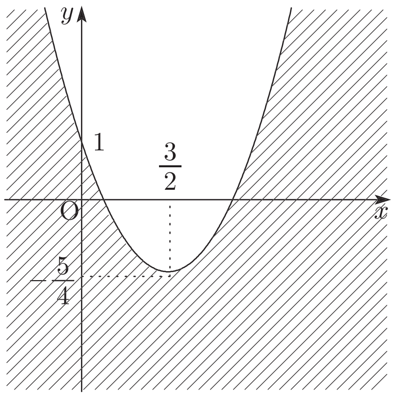
(答)

(2) $x^2-3x+1-y>0$ より

$$y<x^2-3x+1$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

したがって，

放物線 $y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ の下方の部分を表すから，右の図の斜線部分で，境界を含まない．

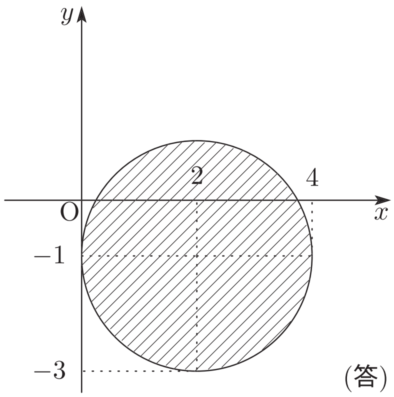


(答)

(3) $x^2+y^2-4x+2y+1 \leqq 0$ より

$$(x-2)^2+(y+1)^2 \leqq 4$$

したがって，円 $(x-2)^2+(y+1)^2 \leqq 4$ の円周上，および，内部を表すから，右の図の斜線部分で，境界を含む．



(答)

【2】(1) $\begin{cases} x^2+4x-1+y<0 \\ 2x+y+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<-(x+2)^2+5 & \cdots① \\ y>-2x-1 & \cdots② \end{cases}$

① を表す領域は，放物線 $y=-(x+2)^2+5$ の下方部分　$\cdots$③

② を表す領域は，直線 $y=-2x-1$ の上方部分　$\cdots$④

よって，求める領域は ③ かつ ④，すなわち，③ と ④ の共通部分であるから，下図の斜線部分となる．ただし，境界上の点は含まない．

(2)

$$(x+2y-5)(x-y-5)<0$$

$$\iff \text{(i)}\begin{cases} x+2y-5<0 \\ x-y-5>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(ii)}\begin{cases} x+2y-5>0 \\ x-y-5<0 \end{cases}$$

したがって，

$$\text{(i)}\begin{cases} x+2y-5<0 \\ x-y-5>0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} & \cdots① \\ y<x-5 & \cdots② \end{cases}$$

① の表す領域は，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ の下方部分　$\cdots$③

② の表す領域は，直線 $y=x-5$ の下方部分　$\cdots$④

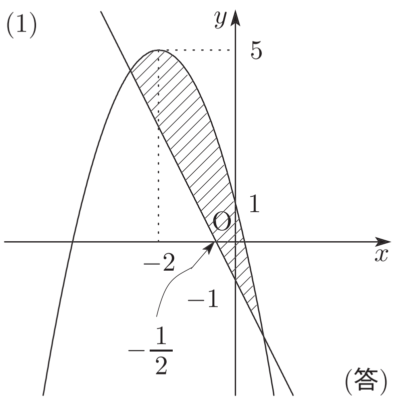
であり，また，

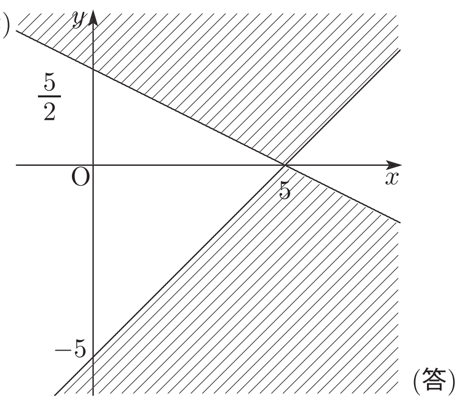
$$\text{(ii)}\begin{cases} x+2y-5>0 \\ x-y-5<0 \end{cases} \iff \begin{cases} y>-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} & \cdots⑤ \\ y>x-5 & \cdots⑥ \end{cases}$$

⑤ の表す領域は，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ の上方部分　$\cdots$⑦

⑥ の表す領域は，直線 $y=x-5$ の上方部分　$\cdots$⑧

であるから，求める領域は ③ かつ ④ の共通部分，または，⑦ かつ ⑧ の共通部分であるから，下図の斜線部分となる．ただし，境界上の点は含まない．

(1)


(2)


【3】(1) グラフより，放物線，直線の方程式はそれぞれ

$$y=\frac{1}{4}x^2-1,\qquad y=3$$

となる．放物線の下方部分と直線の下方部分の共通部分であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{y<\frac{1}{4}x^2-1} \\ \boldsymbol{y<3} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) グラフより，2 直線の方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 & \cdots ① \\ y=-2x-1 & \cdots ② \end{cases}$$

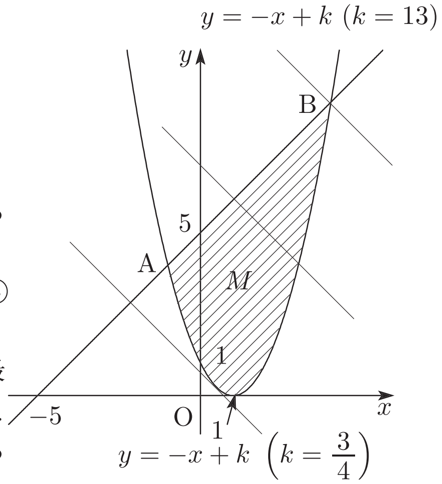
となる．① で表される直線の下方部分と，② で表される直線の上方部分の共通部分であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{y<-\frac{1}{2}x+2} \\ \boldsymbol{y>-2x-1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【4】

$$\begin{cases} y \geqq (x-1)^2 & \cdots ① \\ y \leqq x+5 & \cdots ② \end{cases}$$

2 つの不等式の表す領域を M とし，図示すると右の図の斜線部分となる（境界を含む）．



ここで，$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k \quad \cdots ③$ は点 $(0,\ k)$ を通り，傾き -1 の直線を表す．

③ が M と共有点を持つときの k の最大値，最小値を求める．図のように交点を A，B とする．

k が最大になるのは ③ が点 B$(4,\ 9)$ を通るとき，すなわち，$k=4+9=13$

また，k が最小になるのは ③ と ① が接するときで，このとき 2 次方程式

$$x^2-x+1-k=0 \quad \cdots ④$$

の判別式が 0 となるので，$D=(-1)^2-4(1-k)=0 \qquad \therefore\ k=\frac{3}{4}$

このとき ④ に $k=\frac{3}{4}$ を代入して接点の x 座標を求めると $x=\frac{1}{2}$ となり，確かに ③ は，点 A$(-1,\ 4)$ と点 B$(4,\ 9)$ の間で放物線 ① と接している．

ゆえに，$x+y$ の最大値，最小値はそれぞれ

$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \boldsymbol{13} \quad \boldsymbol{(x=4,\ y=9\ \text{のとき})} \\ \text{最小値} \quad \boldsymbol{\frac{3}{4}} \quad \boldsymbol{\left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}\ \text{のとき}\right)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$