6章　三角関数（1）

問題

【1】(1)　$480^\circ = 120^\circ + 360^\circ$ より，$\mathbf{120^\circ}$　(答)
これは **第 2 象限の角** である．　(答)

(2)　$-150^\circ = 210^\circ - 360^\circ$ より，$\mathbf{210^\circ}$　(答)
これは **第 3 象限の角** である．　(答)

(3)　$1150^\circ = 70^\circ + 360^\circ \times 3$ より，$\mathbf{70^\circ}$　(答)
これは **第 1 象限の角** である．　(答)

(4)　$-800^\circ = 280^\circ - 360^\circ \times 3$ より，$\mathbf{280^\circ}$　(答)
これは **第 4 象限の角** である．　(答)

(5)　$600^\circ = 240^\circ + 360^\circ$ より，$\mathbf{240^\circ}$　(答)
これは **第 3 象限の角** である．　(答)

(6)　$-350^\circ = 10^\circ - 360^\circ$ より，$\mathbf{10^\circ}$　(答)
これは **第 1 象限の角** である．　(答)

(7)　$-550^\circ = 170^\circ - 360^\circ \times 2$ より，$\mathbf{170^\circ}$　(答)
これは **第 2 象限の角** である．　(答)

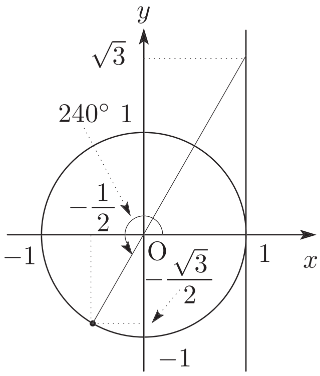
(8)　$700^\circ = 340^\circ + 360^\circ$ より，$\mathbf{340^\circ}$　(答)
これは **第 4 象限の角** である．　(答)

【2】(1)　右の図より

$$\sin 240^\circ = -\frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos 240^\circ = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan 240^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

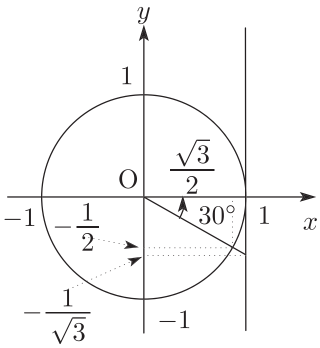


(2)　右の図より

$$\sin(-30^\circ) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos(-30^\circ) = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan(-30^\circ) = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}} \qquad \text{(答)}$$

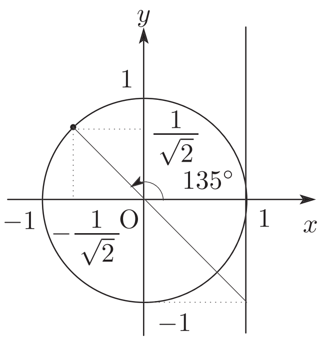


(3)　$855^\circ = 135^\circ + 360^\circ \times 2$ だから，右の図より

$$\begin{aligned} \sin 855^\circ &= \sin 135^\circ \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 855^\circ &= \cos 135^\circ \\ &= -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 855^\circ &= \tan 135^\circ \\ &= \mathbf{-1} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

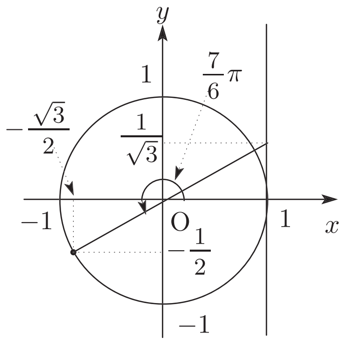


(4)　右の図より

$$\sin\frac{7}{6}\pi = -\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos\frac{7}{6}\pi = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan\frac{7}{6}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad \text{(答)}$$

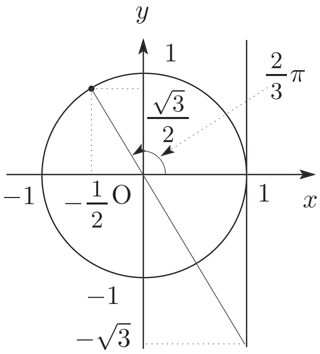


(5)　$-\dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{2}{3}\pi - 2\pi$ だから，右の図より

$$\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \sin\frac{2}{3}\pi$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi$$
$$= -\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \tan\frac{2}{3}\pi$$
$$= \boldsymbol{-\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

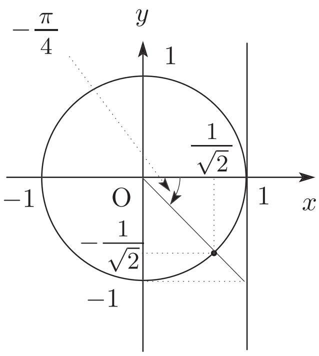


(6)　$\dfrac{15}{4}\pi = -\dfrac{\pi}{4} + 4\pi$ だから，右の図より

$$\sin\left(\frac{15}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos\left(\frac{15}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan\left(\frac{15}{4}\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{-1} \qquad \text{(答)}$$



【3】(1) $(\text{与式}) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathbf{\frac{3}{4}}$ (答)

(2) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

θ は第 4 象限の角だから，$\cos\theta > 0$

よって, $\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ (答)

したがって, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ (答)

(3) $\frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 = (-2)^2 + 1 = 5$ より, $\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

θ は第 2 象限の角だから，$\cos\theta < 0$

よって, $\cos\theta = -\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$ (答)

したがって, $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ (答)

(4) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta + 1 = \frac{1}{4}$ より, $\sin\theta\cos\theta = -\boldsymbol{\frac{3}{8}}$ (答)

また，
$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{11}{16}} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5) $1+\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ \cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ (答)

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ (答)

(6) $\cos\theta=0$ のとき与式は不成立だから，$\cos\theta\ (\fallingdotseq 0)$ で左辺の分母分子を割って

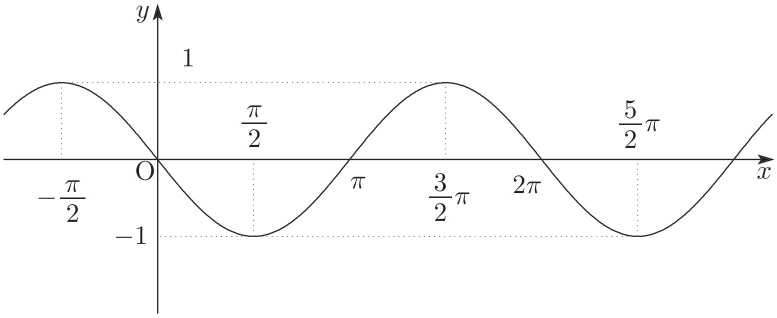
$$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\sqrt{2}-1$$

$\therefore\ \tan\theta=\boldsymbol{1-\sqrt{2}}$ (答)

また

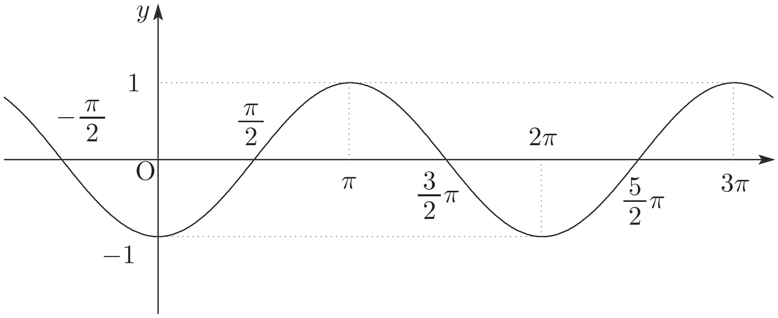
$$\cos^2\theta=\frac{1}{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2+1}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$ (答)

【4】(1)　$y = \sin x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフだから



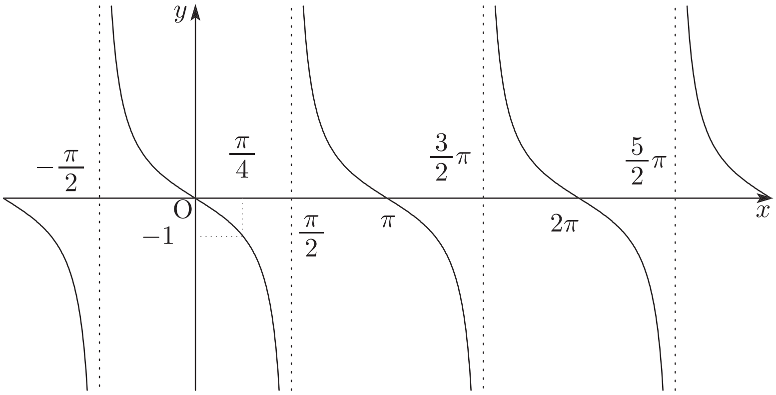
（答）

(2)　$y = \cos x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフだから



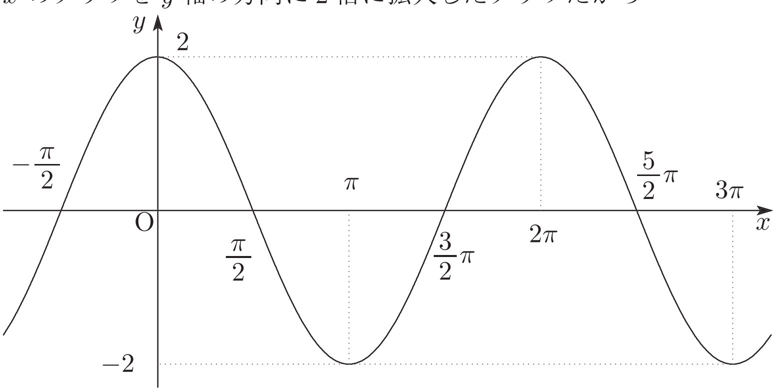
（答）

(3)　$y = \tan x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフだから



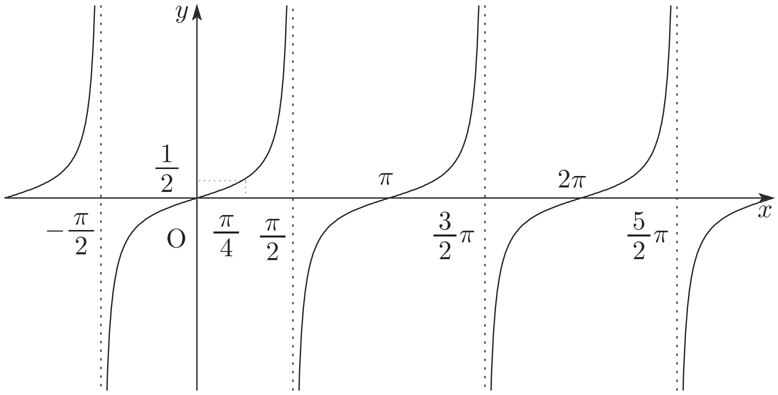
（答）

(4)　$y = \cos x$ のグラフを y 軸の方向に 2 倍に拡大したグラフだから



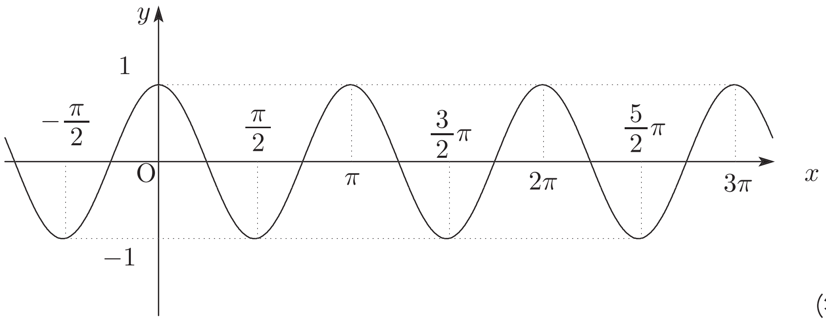
（答）

(5)　$y=\tan x$ のグラフを y 軸の方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に拡大したグラフだから



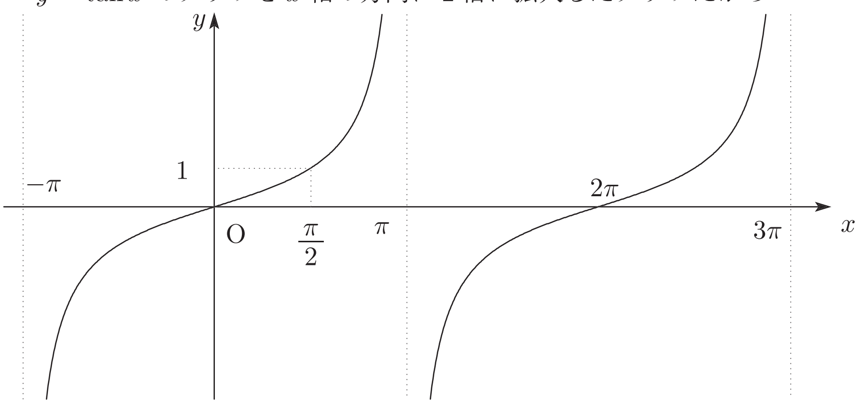
(答)

(6)　$y=\cos x$ のグラフを x 軸の方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に拡大したグラフだから



(答)

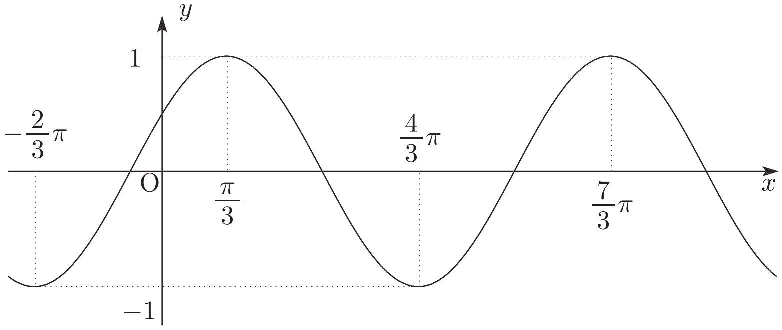
(7)　$y=\tan x$ のグラフを x 軸の方向に 2 倍に拡大したグラフだから



(答)

【5】〔I〕

(1)



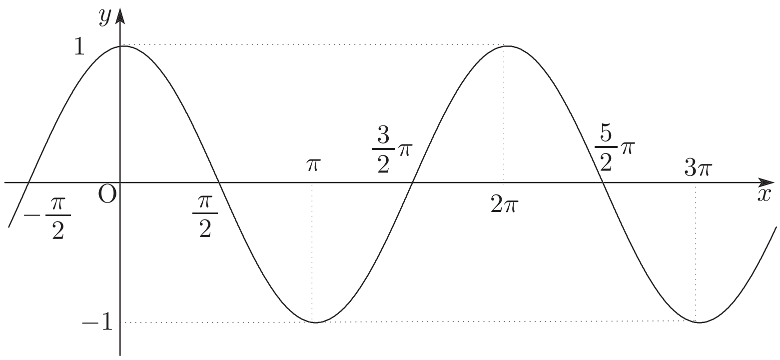
グラフは，上図のとおり．　　　(答)

これは

$$\boldsymbol{y = \cos x} \textbf{ のグラフを } \boldsymbol{x} \textbf{ 軸の正方向に } \boldsymbol{\frac{\pi}{3}} \textbf{ 平行移動したグラフ} \qquad \text{(答)}$$

である．

(2)



グラフは上図のとおり．　　　(答)

これは

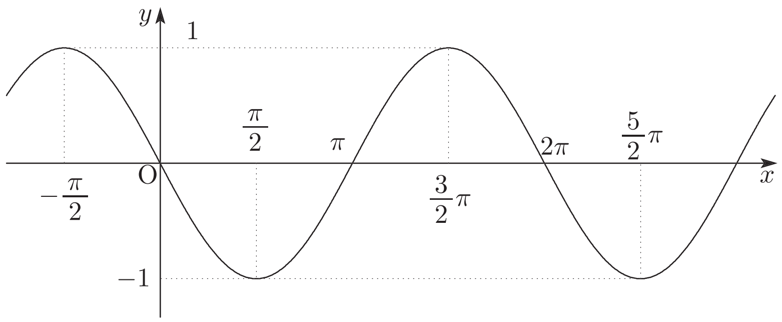
$$\boldsymbol{y = \sin x} \textbf{ のグラフを } \boldsymbol{x} \textbf{ 軸の正方向に } \boldsymbol{-\frac{\pi}{2}} \textbf{ 平行移動させたグラフ} \text{ (答)}$$

である．

<参考>

このグラフは，$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ より $y = \cos x$ のグラフと一致する．

(3)



グラフは上図のとおり.　　　(答)

これは

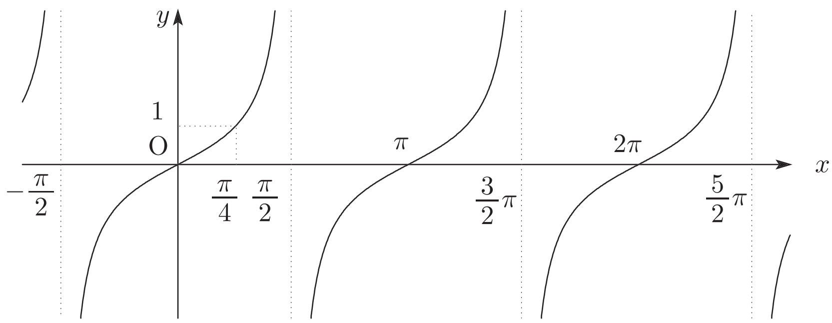
$$\boldsymbol{y = \cos x}\ \text{のグラフを}\ \boldsymbol{x}\ \text{軸の正方向に}\ \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}\ \text{平行移動させたグラフ (答)}$$

である.

<参考>

このグラフは, $y = \cos\left(x - \dfrac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ より $y = -\sin x$ のグラフと一致する.

(4)



これは

$$\boldsymbol{y = \tan x}\ \text{のグラフを}\ \boldsymbol{x}\ \text{軸の正方向に}\ \boldsymbol{\pi}\ \text{平行移動させたグラフ (答)}$$

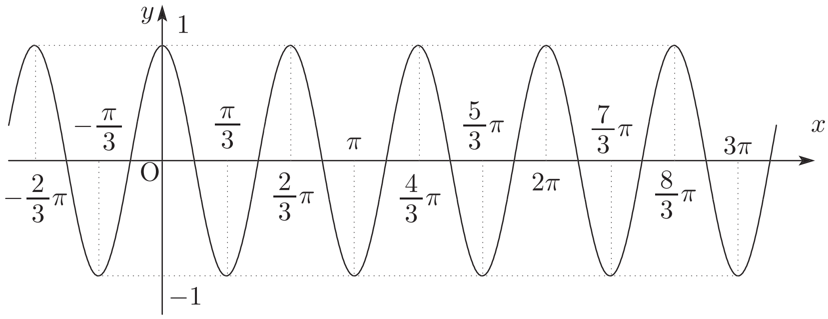
である.

<参考>

このグラフは, $y = \tan(x - \pi) = \tan x$ より $y = \tan x$ のグラフと一致する.

〔II〕

(1)



グラフは，上図のとおり．　　(答)

<参考>

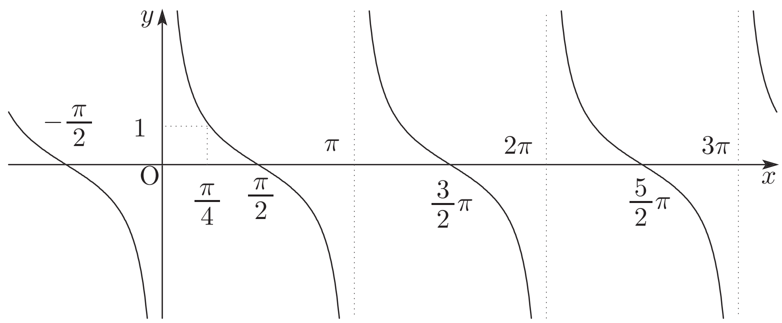
これは，$y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right\}$ より

$y = \sin x$ のグラフを x 軸の方向に $\frac{1}{3}$ 倍に拡大した

$y = \sin 3x$ のグラフを x 軸の正方向に $-\frac{\pi}{6}$ 平行移動したグラフ

である．

(2)



グラフは上図のとおり．　　(答)

<参考>

これは，$y = \tan\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left\{-\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ より

$y = \tan x$ のグラフを y 軸に関して対称移動させた

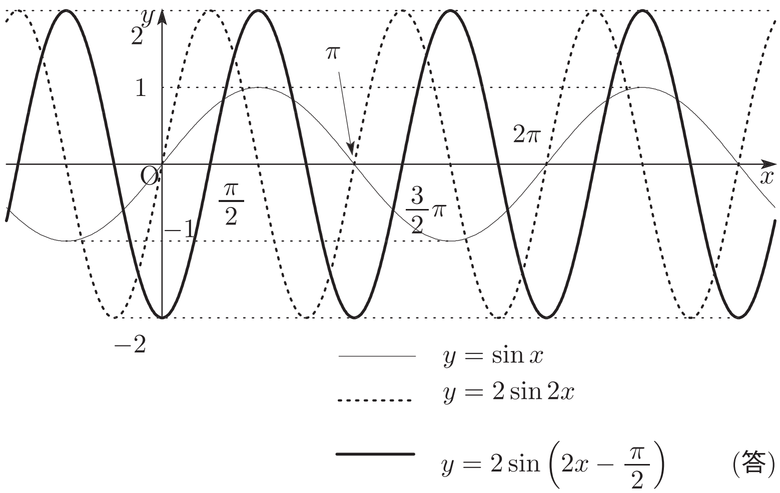
$y = \tan(-x)$ のグラフを x 軸の正方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動させたグラフ

である．

【6】(1) $$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

より，与式は，$y=\sin x$ のグラフを，x 軸の方向に $\frac{1}{2}$ 倍，y 軸の方向に 2 倍に拡大したグラフ $y=2\sin 2x$ を，さらに x 軸の正方向に $\frac{\pi}{4}$ 平行移動したグラフである．

よって，グラフは以下のとおり．

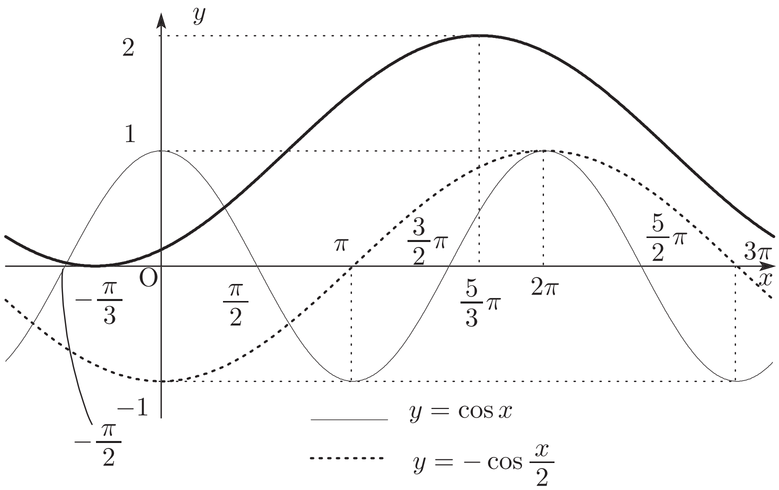


(答)

(2) $$y=-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+1=-\cos\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}+1$$

より，与式は，$y=\cos x$ のグラフを，x 軸の方向に 2 倍に拡大し，x 軸に関して対称移動したグラフ $y=-\cos\frac{1}{2}x$ を，さらに x 軸の正方向に $-\frac{\pi}{3}$，y 軸の正方向に 1 平行移動したグラフである．

よって，グラフは以下のとおり．



(答)

【7】(1)　$y=\sin x$ のグラフの最大値は 1，最小値は -1 だから

(i)　$a>0$ のとき

$$-a+b \leqq a\sin x+b \leqq a+b$$

よって，$-a+b=-1$，$a+b=5$ より，　$a=3$，$b=2$

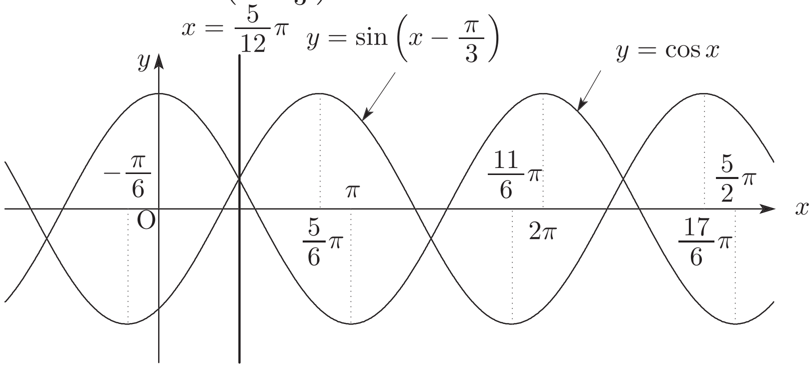
(ii)　$a<0$ のとき

$$a+b \leqq a\sin x+b \leqq -a+b$$

よって，$a+b=-1$，$-a+b=5$ より，$a=-3$，$b=2$

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b)=(3,\ 2),\ (-3,\ 2)}$　　(答)

(2)　$y=\cos x$，$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを重ねあわせてみると



これにより，対称の軸となる $x=a$ のうちで，最小の正の値 a は

$$a=\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}\qquad (答)$$

であることがわかる．

＜別解＞

$y=\cos x$ 上の点を $(X,\ Y)$ とし，$x=a$ に関する対称点を $(x,\ y)$ とすると

$$\frac{X+x}{2}=a,\ Y=y\quad \cdots\cdots ①$$

$(X,\ Y)$ は $y=\cos x$ 上の点より

$$Y=\cos X\quad \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$y=\cos(2a-x)$$

$$\therefore y=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(2a-x)\right\}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-2a\right)$$

これが $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ と一致するとき

$$\frac{\pi}{2}-2a=-\frac{\pi}{3}+2n\pi\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

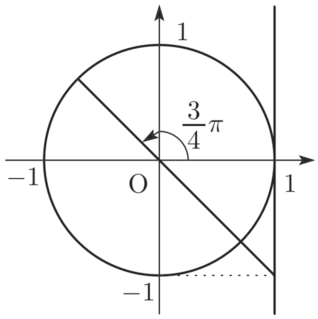
$$\therefore a=\frac{5}{12}\pi-n\pi$$

よって，これをみたす正の値 a の最小値は，$a=\boldsymbol{\dfrac{5}{12}\pi}$　　(答)

添削課題

【1】(1) 一般角は

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi + 2n\pi}\ (\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数}) \qquad (答)$$



また

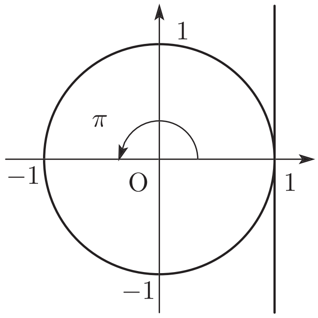
$$\sin\frac{3}{4}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad (答)$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad (答)$$

$$\tan\frac{3}{4}\pi = \boldsymbol{-1} \qquad (答)$$

(2) $5\pi = \pi + 2\pi \times 2$ より，一般角は

$$\boldsymbol{\pi + 2n\pi}\ (\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数}) \qquad (答)$$



また

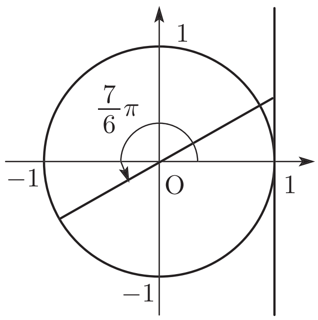
$$\sin 5\pi = \sin\pi = \boldsymbol{0} \qquad (答)$$

$$\cos 5\pi = \cos\pi = \boldsymbol{-1} \qquad (答)$$

$$\tan 5\pi = \tan\pi = \boldsymbol{0} \qquad (答)$$

(3) $-\frac{17}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi - 2\pi \times 2$ より，一般角は

$$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi + 2n\pi}\ (\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数}) \qquad (答)$$



また

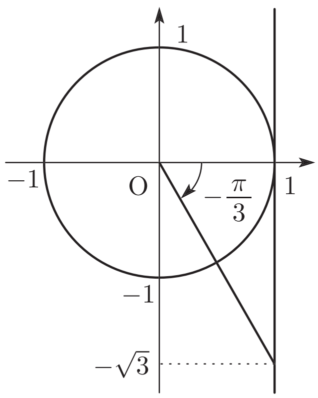
$$\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right) = \sin\frac{7}{6}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \qquad (答)$$

$$\cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right) = \cos\frac{7}{6}\pi = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad (答)$$

$$\tan\left(-\frac{17}{6}\pi\right) = \tan\frac{7}{6}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad (答)$$

(4) $-\frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi - 2\pi$ より，一般角は

$$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi + 2n\pi}\ (\boldsymbol{n}\ \textbf{は整数}) \qquad (答)$$



また

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad (答)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad (答)$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{3}} \qquad (答)$$

【2】 $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

θ は第 3 象限の角 $\left(\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi\right)$ より，$\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \qquad \text{(答)}$$

したがって，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

【3】 (1) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}(\sin\theta - \cos\theta)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\\ \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta &= \frac{2}{9}\\ 1 - 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{2}{9}\\ \therefore\ \sin\theta\cos\theta &= \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

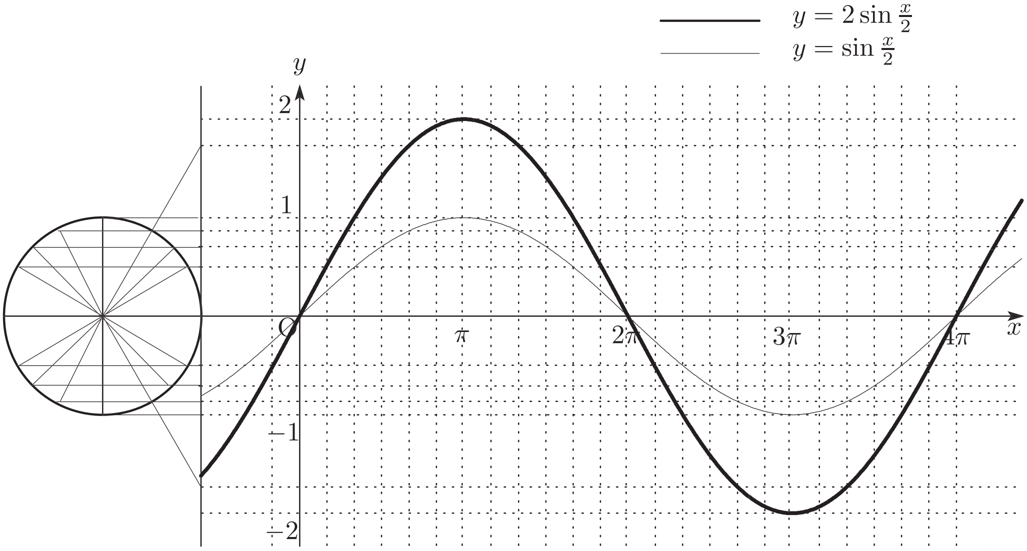
(2)

$$\begin{aligned}(\sin\theta + \cos\theta)^2 &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\\ &= 1 + 2 \times \frac{7}{18}\\ &= \frac{16}{9}\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta \geqq 0$，$\cos\theta \geqq 0$ だから，$\sin\theta + \cos\theta \geqq 0$
よって

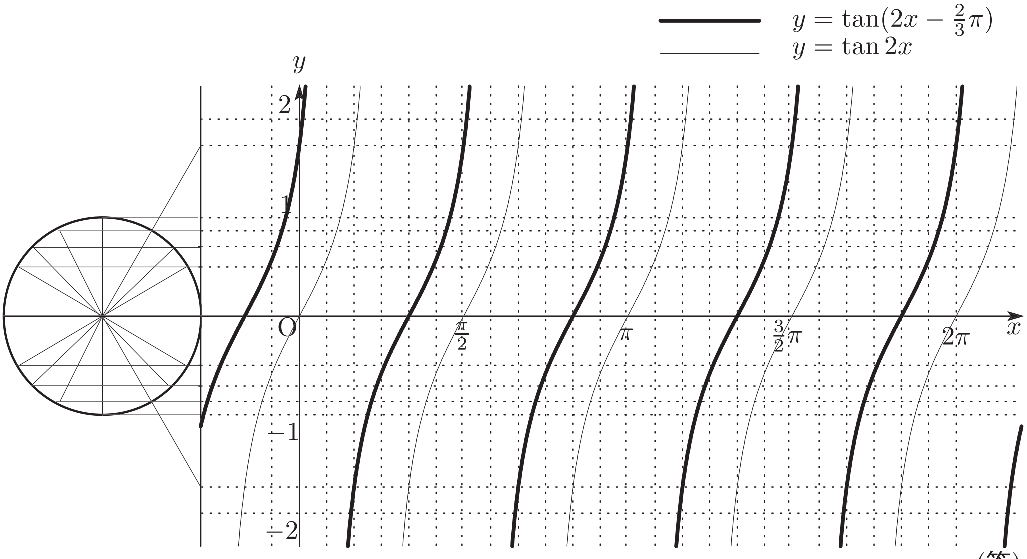
$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $y = 2\sin\dfrac{x}{2}$ のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍，y 軸方向に 2 倍にしたグラフであるから



(答)

(2) $y = \tan\left(2x - \dfrac{2}{3}\pi\right) = \tan\left\{2\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ のグラフは，$y = \tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍にして，x 軸の正方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものであるから



(答)

７章　三角関数（２）

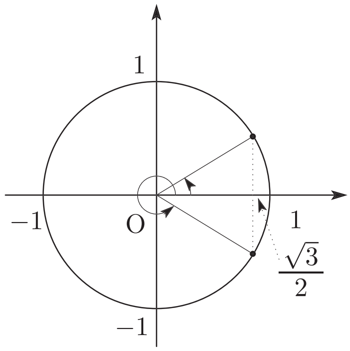
問題

【1】(1) 右図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi} \qquad (答)$$

であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,}$$
$$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi + 2n\pi} \quad (n \text{ は整数}) \qquad (答)$$

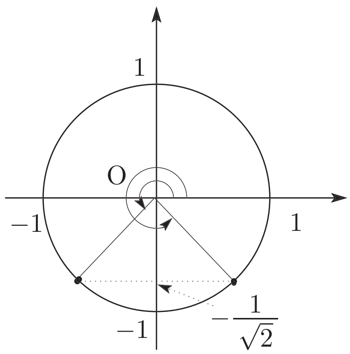


(2) 右図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi} \qquad (答)$$

であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi,}$$
$$\boldsymbol{\frac{7}{4}\pi + 2n\pi} \quad (n \text{ は整数}) \qquad (答)$$

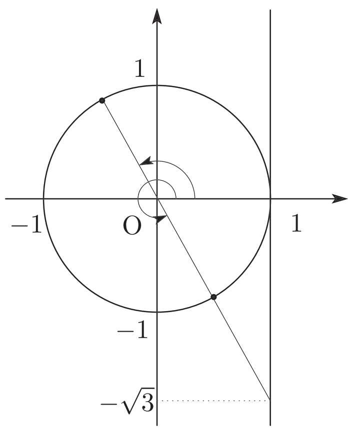


(3) 右図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi} \qquad (答)$$

であるから，一般解は

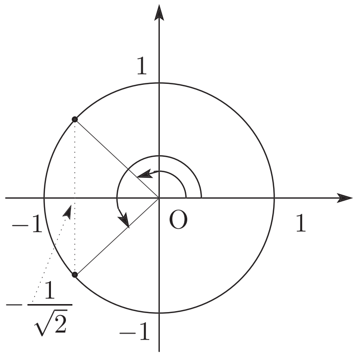
$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi} \quad (n \text{ は整数}) \qquad (答)$$



(4)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，右図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$



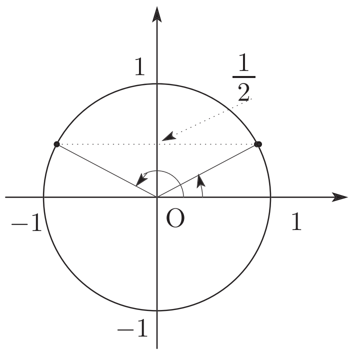
であるから，一般解は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta =} &\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi + 2n\pi},\\ &\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi + 2n\pi} \quad (n\text{ は整数}) \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(5)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

したがって，右図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$



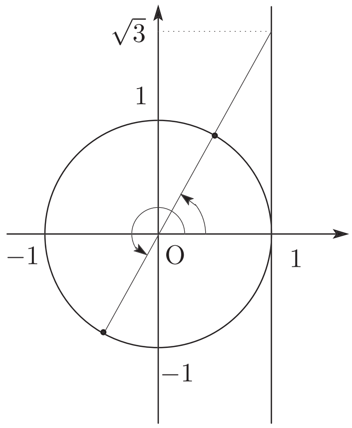
であるから，一般解は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta =} &\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + 2n\pi},\\ &\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi + 2n\pi} \quad (n\text{ は整数}) \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

したがって，右図より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$



であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi} \quad (n\text{ は整数}) \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)
$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta &= 0 \\ \sin\theta(2\sin\theta - 3) &= 0 \end{aligned}$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta = 0$

よって，$\boldsymbol{\theta = 0,\ \pi}$　　(答)

(2)
$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 &= 0 \\ 2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 1 &= 0 \\ -2\cos^2\theta - \cos\theta + 1 &= 0 \\ 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 &= 0 \\ (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) &= 0 \\ \therefore\ \cos\theta &= \frac{1}{2},\ -1 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi}$　　(答)

(3)
$$\begin{aligned} \cos^2\theta + 2\sin\theta + 2 &= 0 \\ 1 - \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2 &= 0 \\ -\sin^2\theta + 2\sin\theta + 3 &= 0 \\ \sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 &= 0 \\ (\sin\theta + 1)(\sin\theta - 3) &= 0 \end{aligned}$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta = -1$

よって，$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{2}\pi}$　　(答)

(4)
$$\begin{aligned} \tan\theta &= \sqrt{2}\cos\theta \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sqrt{2}\cos\theta &= 0 \\ \sin\theta - \sqrt{2}\cos^2\theta &= 0 \\ \sin\theta - \sqrt{2}(1-\sin^2\theta) &= 0 \\ \therefore\ \sqrt{2}\sin^2\theta + \sin\theta - \sqrt{2} &= 0 \\ (\sqrt{2}\sin\theta - 1)(\sin\theta + \sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi}$　　(答)

(5)
$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 1 &= 0 \\ 2(1-\sin^2\theta) - \sqrt{3}\sin\theta + 1 &= 0 \\ \therefore\ 2\sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 3 &= 0 \\ (2\sin\theta - \sqrt{3})(\sin\theta + \sqrt{3}) &= 0 \end{aligned}$$

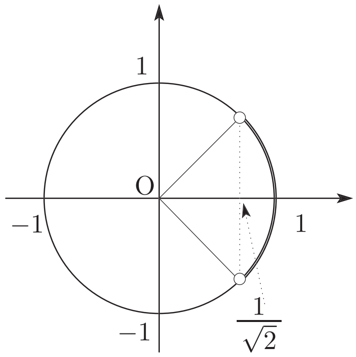
ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi}$　　(答)

【3】(1)　$\cos\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

右図より，これをみたす θ の値の範囲は

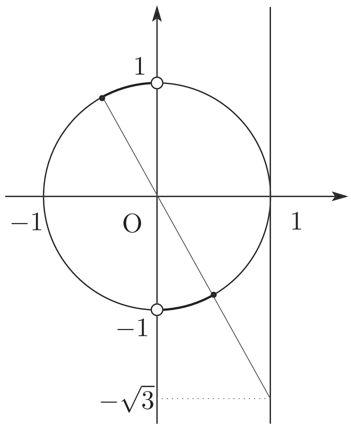
$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



(2)　$\tan\theta \leqq -\sqrt{3}$

右図より，これをみたす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$



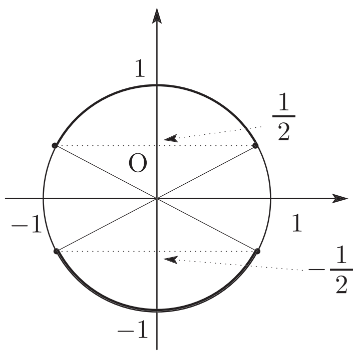
(3)　$4\sin^2\theta - 1 \geqq 0$

$(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geqq 0$

$\sin\theta \leqq -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta$

右図より，

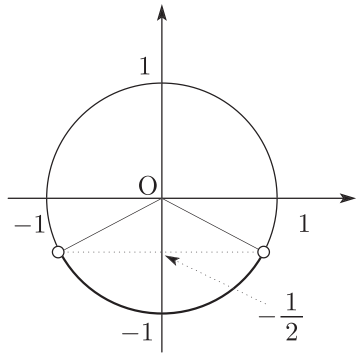
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$



(4)
$$
\begin{aligned}
&2\cos^2\theta+\sin\theta-1<0\\
&2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1<0\\
&-2\sin^2\theta+\sin\theta+1<0\\
\therefore\ &2\sin^2\theta-\sin\theta-1>0\\
&(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)>0
\end{aligned}
$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta-1\leqq 0\\
&2\sin\theta+1<0\\
\therefore\ &\sin\theta<-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



右図より，

$$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) まず，$\cos\theta \fallingdotseq 0$ であることから，$\theta \fallingdotseq \frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

(i) $\cos\theta>0$ $\left(\text{すなわち } 0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ のとき

$$\frac{1}{\cos\theta}\leqq\frac{1}{2} \text{ より，} \quad \cos\theta\geqq 2$$

これをみたす θ は存在しない.

(ii) $\cos\theta<0$ $\left(\text{すなわち } \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$ のとき

$$\frac{1}{\cos\theta}\leqq\frac{1}{2} \text{ より，} \quad \cos\theta\leqq 2$$

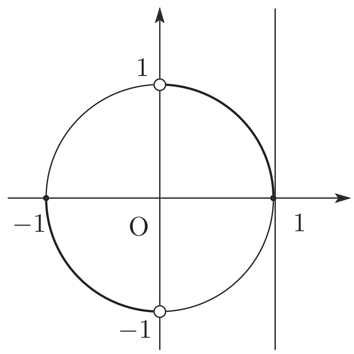
これは常に成り立つ.

よって

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi} \qquad \text{(答)}$$

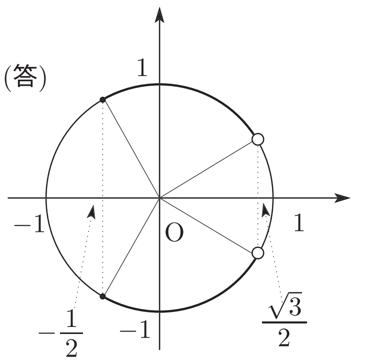
(2) 右図より

$$\boldsymbol{0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \pi\leqq\theta<\frac{3}{2}\pi} \qquad \text{(答)}$$



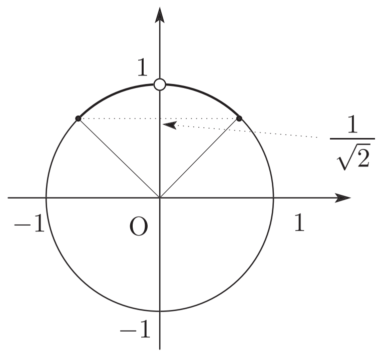
【5】(1) 右図より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$



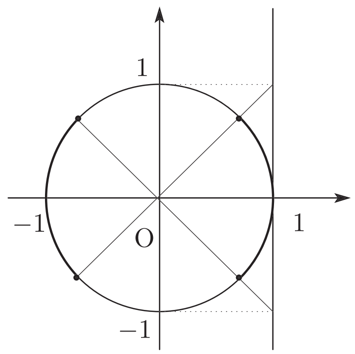
(2) 右図より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{3}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$



(3) 右図より

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi,}$$
$$\boldsymbol{\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



(4) $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，与式は常に成立する．
よって

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)(\tan x - 1) \geqq 0$ より

(i) $\cos x - \dfrac{1}{2} \leqq 0$ かつ $\tan x - 1 \leqq 0$ のとき

この不等式をみたす x は存在しない.

(ii) $\cos x - \dfrac{1}{2} \geqq 0$ かつ $\tan x - 1 \geqq 0$ のとき

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} \text{ かつ } \frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$$

以上より,

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\begin{aligned} 4 - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - 4\cos^2\theta &\leqq 0 \\ 4 - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - 4(1 - \sin^2\theta) &\leqq 0 \\ 4\sin^2\theta - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - \sqrt{3} &\leqq 0 \\ (2\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta + 1) &\leqq 0 \\ \therefore\ -\frac{1}{2} \leqq \sin\theta &\leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より, $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

よって, この範囲で, $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ となるのは

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より, $-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{23}{6}\pi$

よって, この範囲で, $\tan\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ となるのは

$$2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi$$

ゆえに, $2\theta = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi,\ \dfrac{29}{12}\pi,\ \dfrac{41}{12}\pi$ より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{24}\pi,\ \frac{17}{24}\pi,\ \frac{29}{24}\pi,\ \frac{41}{24}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より, $\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{4}{3}\pi$

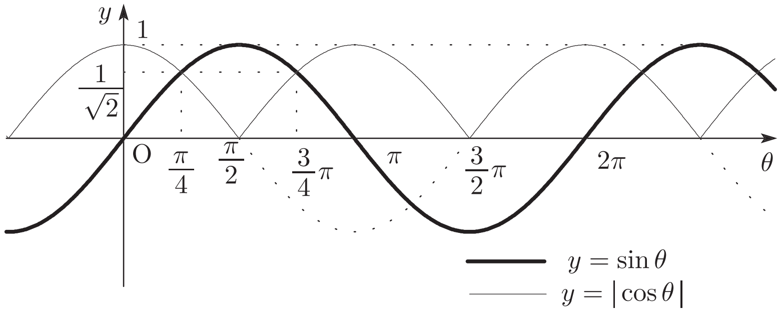
よって, この範囲で $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは,

$$\frac{5}{6}\pi \leqq \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi$$

ゆえに，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より

$$\boldsymbol{\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) $y=\sin\theta$ と $y=|\cos\theta|$ のグラフの比較を用いる.



よって，図より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(2) (i) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$|\sin x| = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

であるから，

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

(ii) $-2\pi \leqq x < 0$ のとき

$$|\sin(-x)| = \frac{1}{2} \qquad -\sin x = \pm\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

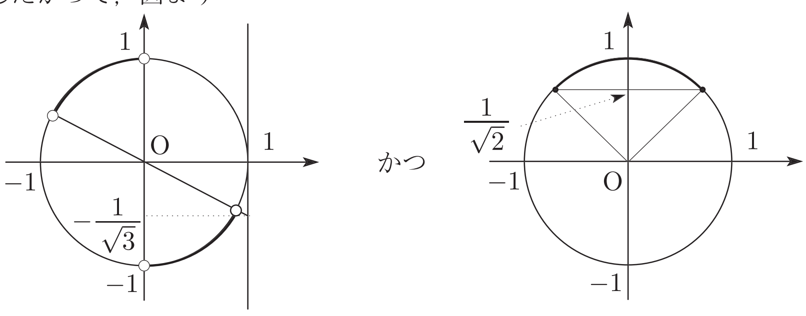
であるから，

$$x = -\frac{\pi}{6},\ -\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{7}{6}\pi,\ -\frac{11}{6}\pi$$

よって，この方程式の解のうち最大のものは $\boldsymbol{\dfrac{11}{6}\pi}$，最小のものは $\boldsymbol{-\dfrac{11}{6}\pi}$ (答)

(3)
$$\sqrt{3}\tan x + 1 < 0 \quad \text{かつ} \quad 2\sin x \geqq \sqrt{2}$$
$$\tan x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{かつ} \quad \sin x \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，図より



であるから，

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{3}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【9】

$$\sin x = \cos 2y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2y$$

$$\therefore \begin{cases} 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + 2n\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \\ \text{または} \\ -2y = \dfrac{\pi}{2} - x + 2n\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \end{cases}$$

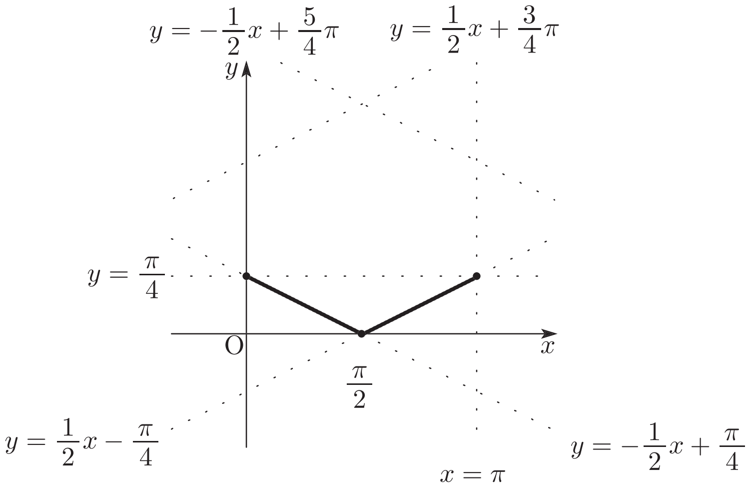
したがって

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{4n+1}{4}\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \\ \text{かつ} \\ 0 \leqq x \leqq \pi \\ \text{かつ} \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{4n+1}{4}\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \\ \text{かつ} \\ 0 \leqq x \leqq \pi \\ \text{かつ} \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

であり，このグラフを図示すると以下の実線部分のようになる．



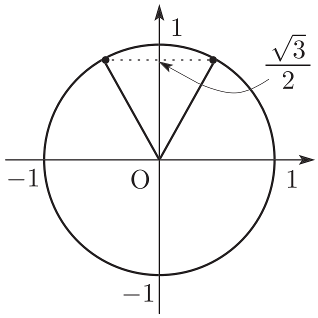
添削課題

【1】(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \\ \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi \end{cases} \quad (n \text{ は整数})} \qquad \text{(答)}$$

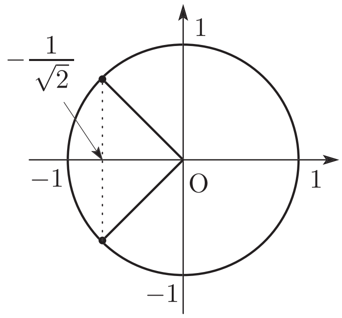


(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi \\ \dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi \end{cases} \quad (n \text{ は整数})} \qquad \text{(答)}$$

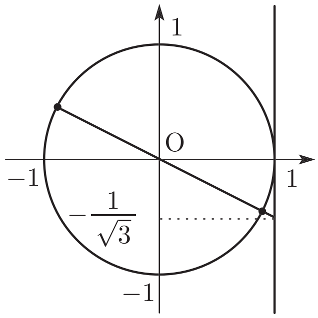


(3) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数})} \qquad \text{(答)}$$

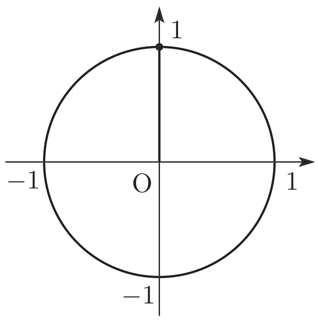


(4) $\sin\theta = 1$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}} \qquad \text{(答)}$$

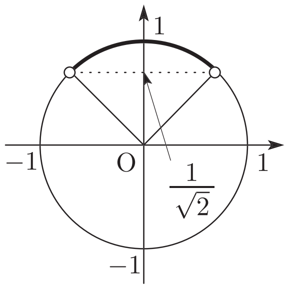
よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})} \qquad \text{(答)}$$



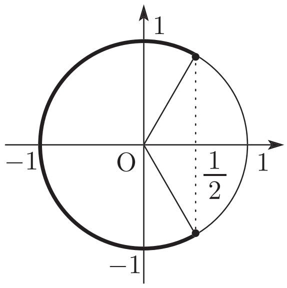
【2】(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$



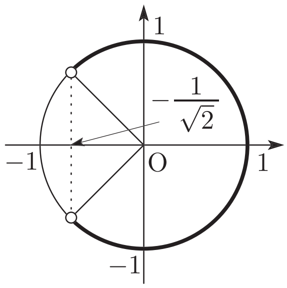
(2) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$



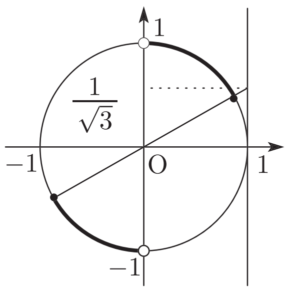
(3) $\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



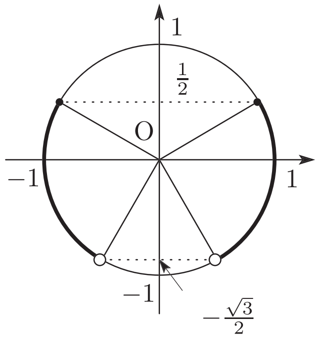
(4) $\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi} \qquad \text{(答)}$$



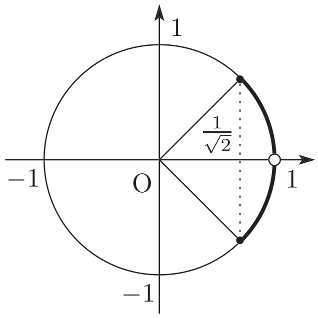
【3】(1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi \leqq \theta < \frac{4}{3}\pi,}$$
$$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos\theta < 1$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

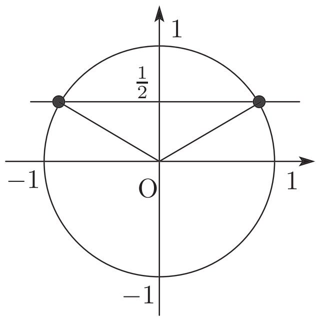
$$\boldsymbol{0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{9}{2}\pi$

この範囲で，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ をみたすのは，

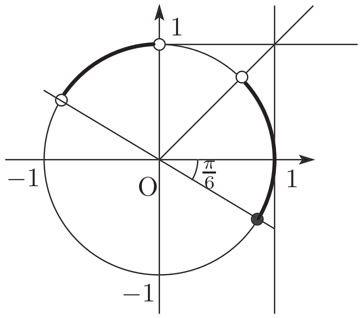
$$2\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$



(4) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5}{6}\pi$

この範囲で，$\tan\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) < 1$ をみたすのは，

$$-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



【4】(1) $\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)(\tan x - 1) \geqq 0$ より

(i) $\cos x - \dfrac{1}{2} \leqq 0$　かつ　$\tan x - 1 \leqq 0$ のとき

この不等式をみたす x は存在しない.

(ii) $\cos x - \dfrac{1}{2} \geqq 0$　かつ　$\tan x - 1 \geqq 0$ のとき

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} \quad \text{かつ} \quad \frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&4-\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)\sin\theta - 4\cos^2\theta \leqq 0\\
&4-\sqrt{3}-2(\sqrt{3}-1)\sin\theta - 4(1-\sin^2\theta) \leqq 0\\
&4\sin^2\theta - 2(\sqrt{3}-1)\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0\\
&(2\sin\theta-\sqrt{3})(2\sin\theta+1) \leqq 0\\
\therefore \quad &-\frac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

M1J/M1JS
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	