M1T

本科 1 期 5 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 難関大数学

問題

【1】(1) 条件を満たす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{PA} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
$$\mathrm{PB} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$\mathrm{PA} = \mathrm{PB}$　$\cdots\cdots$①より，

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

ここで，両辺とも正より，両辺を 2 乗して，

$$(x+1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

より，整理して

$$x = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots②$$

これは，点 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ を通る y 軸に平行な直線を表す．

逆に，② を満たす任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ をとると，この計算を逆にたどることにより，① を導くことが出来る．

よって，点 P は条件に適する．

以上より，求める軌跡は，

直線 $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$　　(答)

(2) 条件を満たす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{PA}^2 - \mathrm{PB}^2 = 3$$

より，

$$\{(x+1)^2 + y^2\} - \{(x-2)^2 + y^2\} = 3$$

整理して，$x = 1$. これは，点 $(1, 0)$ を通り y 軸に平行な直線を表す．また，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は，

直線 $\boldsymbol{x = 1}$　　(答)

(3) 条件を満たす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 = 5$$

より，

$$\{(x+1)^2 + y^2\} + \{(x-2)^2 + y^2\} = 5$$

整理して，$x^2 - x + y^2 = 0$.

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

これは，点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を表す．また，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は

中心 $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}, \mathbf{0}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ の円 (答)

(4) 条件を満たす点 P の座標を (x, y) とすると，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 2 : 1$$

つまり，AP=2PB.

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

ここで，両辺とも 0 以上より，両辺を 2 乗して，

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-2)^2 + y^2\}$$

整理して，$x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$.

$$\therefore (x-3)^2 + y^2 = 4$$

これは，点 $(3, 0)$ を中心とする半径 2 の円を表す．また，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は，

中心 (3, 0)，半径 2 の円 (答)

【2】 $\mathrm{P}(X,Y), \mathrm{C}(2,0), \mathrm{D}(-4,0)$ とする．

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=1:2$$

より

$$\mathrm{PB}=2\mathrm{PA} \qquad \therefore \mathrm{PB}^2=4\mathrm{PA}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

であるが，三平方の定理より

$$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PC}^2-\mathrm{AC}^2=(X-2)^2+Y^2-1$$
$$\mathrm{PB}^2=\mathrm{PD}^2-\mathrm{BD}^2=(X+4)^2+Y^2-4$$

これらを①へ代入して

$$(X+4)^2+Y^2-4=4\{(X-2)^2+Y^2-1\}$$

これより

$$3X^2+3Y^2-24X=0$$
$$\therefore\ (X-4)^2+Y^2=16$$

だから，求める軌跡は

中心 $(4,0)$, 半径 4 の円 (答)

【3】 点 P の座標を (x,y) とすると，

$$\mathrm{F}(0,1),\ l:y=-1$$

より，

$$\mathrm{PF}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

また，P と l の距離は $|y+1|$ であるから，点 P の条件より，

$$x^2+(y-1)^2=(y+1)^2$$

整理して，

$$y=\frac{1}{4}x^2$$

逆に，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の任意の点は，上の計算を逆にたどると，与えられた条件を満たすことがわかる．

よって，求める軌跡は，

放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ (答)

【4】点 Q の座標を (X, Y) とすると，Q は原点 O と点 $\mathrm{P}(x, y)$ を結ぶ線分を $1:2$ の比に内分するので，

$$X = \frac{2 \times 0 + 1 \times x}{1+2},\ Y = \frac{2 \times 0 + 1 \times y}{1+2}$$

すなわち，

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{3}x \\ Y = \dfrac{1}{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3X \\ y = 3Y \end{cases}$$

ここで，点 P は直線 $x + 2y - 6 = 0$ 上の点であるから，

$$3X + 2 \times 3Y - 6 = 0$$
$$\therefore X + 2Y - 2 = 0$$

したがって，点 Q は直線 $x + 2y - 2 = 0$ 上にあり，逆に，直線 $x + 2y - 2 = 0$ 上の任意の点は与えられた条件を満たすことがわかる．

よって，求める軌跡は，

直線 $\boldsymbol{x + 2y - 2 = 0}$　　(答)

【5】2 点 P，R の座標を，$\mathrm{P}(x, y)$，$\mathrm{R}(X, Y)$ とおくと，R は線分 PQ を $3:2$ の比に外分するので，

$$X = \frac{-2 \times x + 3 \times 2}{3-2} = -2x + 6 \quad \cdots\cdots ①$$
$$\begin{aligned} Y &= \frac{-2 \times y + 3 \times 2}{3-2} \\ &= -2y + 6 \\ &= -2(x^2 - 2x + 4) + 6 \\ &= -2x^2 + 4x - 2 \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

① より，$x = -\dfrac{1}{2}X + 3$. これを ② に代入して，

$$\begin{aligned} Y &= -2\left(-\frac{1}{2}X + 3\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}X + 3\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}X^2 + 4X - 8 \end{aligned}$$

したがって，点 R は放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ 上にあり，逆に，この放物線上の任意の点は与えられた条件を満たすことがわかる．

よって，求める軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 8}$　　(答)

【6】動点 Q の座標を (u, v)，点 P の座標を (x, y) とし，条件から，x，y だけの関係式を導けばよい．

点 Q は $x^2 + y^2 = 4$ 上の点だから，

$$u^2 + v^2 = 4 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P は線分 QA の中点なので，

$$x = \frac{u+4}{2},\ y = \frac{v}{2}$$

よって，$u = 2x - 4$，$v = 2y \quad \cdots\cdots ②$

② を ① に代入すると，

$$(2x-4)^2 + (2y)^2 = 4$$

両辺を 4 で割ると，

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

したがって，これは，点 $(2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を表す．また，② より，

任意の点 (u, v) に対して，点 (x, y) は 1 通りに決まり，
任意の点 (x, y) に対して，点 (u, v) も 1 通りに決まる．

つまり，この計算は逆にたどれるから，求める軌跡は，

中心 (2, 0)，半径 1 の円　　　(答)

【7】傾き 2 の直線 $y = 2x + k$ と放物線 $y = -x^2$ とが異なる 2 点で交わるので，2 次方程式 $-x^2 = 2x + k$，すなわち，

$$x^2 + 2x + k = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

の判別式を D とすると，

$$D/4 = 1^2 - 1 \times k > 0$$
$$\therefore 1 - k > 0 \text{ より}, k < 1 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，① の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より，

$$\alpha + \beta = -2$$

したがって，点 P の座標 (X, Y) とおくと，

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = -1 \\ Y = 2X + k = k - 2 \end{cases}$$

また，$Y = k - 2$ と ② とから，$Y < -1$

よって，点 P の軌跡は

直線 $\boldsymbol{x = -1}$ の $\boldsymbol{y < -1}$ の部分　　　(答)

【8】 $x^2+y^2-6x+4y=0$ より，

$$(x-3)^2+(y+2)^2=13$$

この円周上の点 P の座標を $(u,\ v)$ とすると，

$$(u-3)^2+(v+2)^2=13 \quad \cdots\cdots ①$$

また，△OAP の重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x=\frac{0+6+u}{3}=\frac{u+6}{3}$$

よって，$u=3x-6 \quad \cdots\cdots ②$

$$y=\frac{0+0+v}{3}=\frac{v}{3}$$

よって，$v=3y \quad \cdots\cdots ③$

②，③ を ① に代入すると，

$$(3x-6-3)^2+(3y+2)^2=13$$
$$(3x-9)^2+(3y+2)^2=13$$

両辺を 9 で割って，

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，点 P が O または A に一致するとき，△OAP は作れないので，この場合を除く．つまり，

P と O が一致するとき，$(u,\ v)=(0,\ 0)$ より，

$$(x,\ y)=(2,\ 0)$$

P と A が一致するとき，$(u,\ v)=(6,\ 0)$ より，

$$(x,\ y)=(4,\ 0)$$

この計算は逆にたどることができるから，求める軌跡は，

中心 $\left(3,\ -\dfrac{2}{3}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ の円
ただし，2 点 $(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ は除く (答)

添削課題

【1】(1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ ……① から

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}$$

両辺を平方して

$$(x-4)^2+(y-2)^2=(x-5)^2+(y-1)^2$$

$$\therefore\ x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2-10x+25+y^2-2y+1$$

$$\therefore\ x-y-3=0 \quad \cdots\cdots ②$$

（逆に,②をみたす任意の点 $(x,\ y)$ をとると，この計算を逆にたどることにより,①を導くことができる）

よって，点 P の軌跡は

直線　$\boldsymbol{x-y-3=0}$　(答)

(2) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=8$ ……① から

$$(x-4)^2+(y-2)^2+(x-5)^2+(y-1)^2=8$$

$$\therefore\ 2x^2-18x+2y^2-6y+38=0$$

$$\therefore\ x^2+y^2-9x-3y+19=0 \quad \cdots\cdots ②$$

（逆に,②をみたす任意の点 $(x,\ y)$ をとると，この計算を逆にたどることにより,①を導くことができる）

よって，点 P の軌跡は

円　$\boldsymbol{x^2+y^2-9x-3y+19=0}$　(答)

【2】(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく．条件より

$$x^2+(y-2)^2=y^2 \qquad \therefore\ y=\frac{1}{4}x^2+1$$

であるから，求める点 P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x^2+1}$　(答)

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく．条件より

$$\frac{|4x-3y+3|}{5}=\frac{|3x+4y-4|}{5} \qquad \therefore\ 4x-3y+3=\pm(3x+4y-4)$$

であるから，求める点 P の軌跡は

直線 $\boldsymbol{x-7y+7=0,\ 7x+y-1=0}$　(答)

【3】点 R の座標を (X, Y)，直線 $2x - y + 1 = 0$ 上の任意の点 P の座標を (x, y) とする．R は点 $\mathrm{P}(x, y)$ と点 $\mathrm{Q}(5, -1)$ を結ぶ線分を $3:1$ の比に外分するので

$$X = \frac{-1 \cdot x + 3 \cdot 5}{3-1}, \qquad Y = \frac{-1 \cdot y + 3 \cdot (-1)}{3-1}$$

すなわち

$$\begin{cases} X = \dfrac{-x+15}{2} \\ Y = \dfrac{-y-3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2X + 15 \\ y = -2Y - 3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，点 P は直線 $2x - y + 1 = 0$ 上の点であるから，① を代入して

$$2(-2X+15) - (-2Y-3) + 1 = 0$$

$$\therefore\ 2X - Y - 17 = 0$$

したがって，点 R は直線 $2x - y - 17 = 0$ 上にある．

（逆に，直線 $2x - y - 17 = 0$ 上の任意の点は，与えられた条件をみたすことがわかる）

よって，求める軌跡は

直線　$\boldsymbol{2x - y - 17 = 0}$　　(答)

【4】与えられた放物線を平方完成すると

$$y = x^2 + ax + 2a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a$$

したがって，この放物線の頂点の座標を (X, Y) とすると

$$\begin{cases} X = -\dfrac{a}{2} & \cdots\cdots ① \\ Y = -\dfrac{a^2}{4} + 2a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より

$$a = -2X \quad \cdots\cdots ③$$

③ を ② に代入して

$$Y = -\frac{4X^2}{4} + 2 \cdot (-2X) = -X^2 - 4X$$

よって，求める軌跡は

放物線　$\boldsymbol{y = -x^2 - 4x}$　　(答)

問題

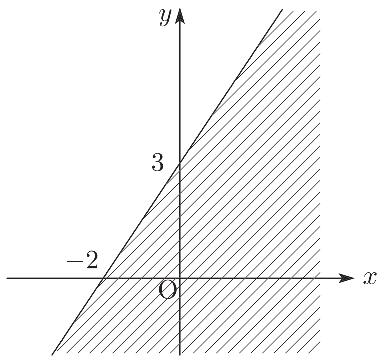
【1】(1) 与えられた不等式を変形すると,

$$y < \frac{3}{2}x + 3$$

である. この不等式の表す領域は,

直線 $y = \dfrac{3}{2}x + 3$ の下側

である. よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含まない. (答)



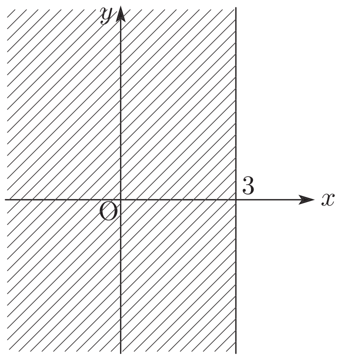
(2) 与えられた不等式を変形すると,

$$x \leqq 3$$

である. この不等式は x 座標が 3 以下の点の集合を表している. つまり, この不等式の表す領域は

直線 $x = 3$ 上およびこの直線の左側

である. よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含む. (答)



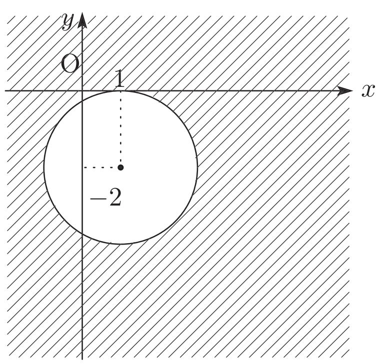
(3) 与えられた不等式を変形すると,

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 \geqq 4$$

である. この不等式の表す領域は,

円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 上,
およびこの円の外部

である. よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含む. (答)



(4) 与えられた不等式を変形すると,

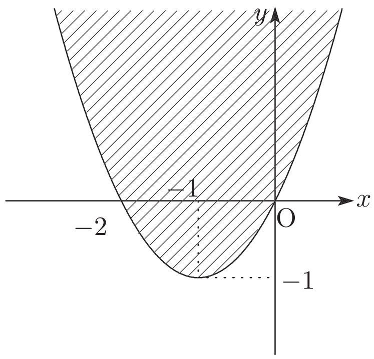
$$y > x^2 + 2x$$

である. この不等式の表す領域は,

放物線 $y = x^2 + 2x$ の上側

である.

よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含まない. (答)

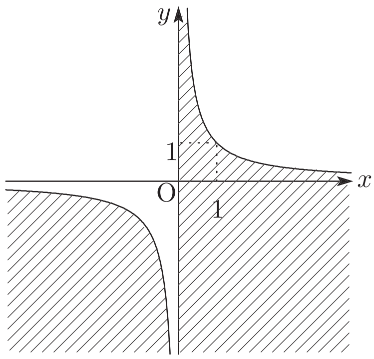


(5) 与えられた不等式の表す領域は

双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の下側

である.

よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含まない. (答)



(6) 与えられた不等式を変形すると,

i) $x > 0$ のとき, $y < \dfrac{1}{x}$

ii) $x < 0$ のとき, $y > \dfrac{1}{x}$

iii) $x = 0$ のとき, y は任意

である. これらの不等式が表す領域は,

i) $x > 0$ のとき,

双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の下側

ii) $x < 0$ のとき,

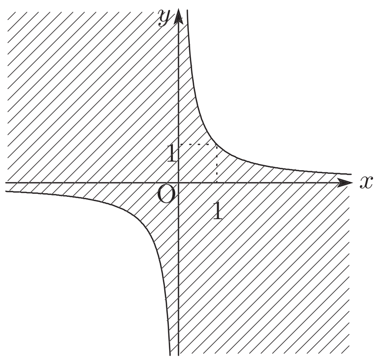
双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の上側

iii) $x = 0$ のとき,

直線 $x = 0$ 上

である.

よって, 求める領域は右図の斜線部分である. 境界は含まない. (答)



【2】(1)

$$\begin{cases} x+y>2 & \cdots ① \\ 2x-y>-1 & \cdots ② \end{cases}$$

不等式 ① を変形すると，

$$y>-x+2$$

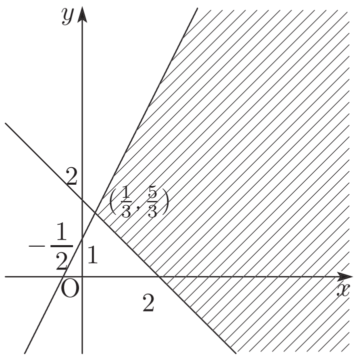
である．また，不等式 ② を変形すると，

$$y<2x+1$$

である．つまり，この連立不等式の表す領域は，

直線 $y=-x+2$ の上側で，
直線 $y=2x+1$ の下側である．

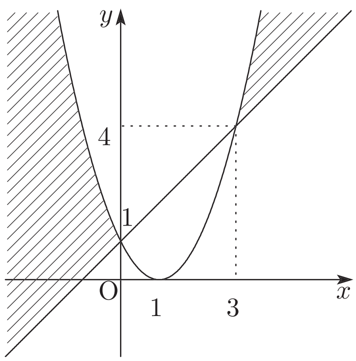
よって，求める領域は，右図の斜線部分である．
境界は含まない．　　(答)



(2) 与えられた連立不等式を変形すると，

$$\begin{cases} y \geqq x+1 & \cdots ① \\ y \leqq (x-1)^2 & \cdots ② \end{cases}$$

である．つまり，この連立不等式の表す領域は，
直線 $y=x+1$ 上およびこの直線の上側
かつ，
放物線 $y=(x-1)^2$ 上およびこの放物線の下側
である．
よって，求める領域は，右図の斜線部分である．
境界は含む．　　(答)



(3) 与えられた不等式は

$$\begin{cases} y-2x \geqq 0 \\ x-2y+4 \geqq 0 \end{cases}$$

または

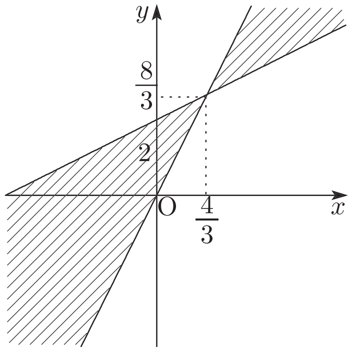
$$\begin{cases} y-2x \leqq 0 \\ x-2y+4 \leqq 0 \end{cases}$$

これらを変形すると，

$$\begin{cases} y \geqq 2x & \cdots ① \\ y \leqq \dfrac{1}{2}x+2 & \cdots ② \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} y \leqq 2x & \cdots ③ \\ y \geqq \dfrac{1}{2}x+2 & \cdots ④ \end{cases}$$



連立不等式 ①，② の表す領域と，連立不等式 ③，④ の表す領域を合わせると，図の斜線部分である．境界は含む．　　(答)

(4) 与えられた不等式は，

$$\begin{cases} -x+y-8>0 \\ x^2+y^2+6x-8y<0 \end{cases}$$

または，

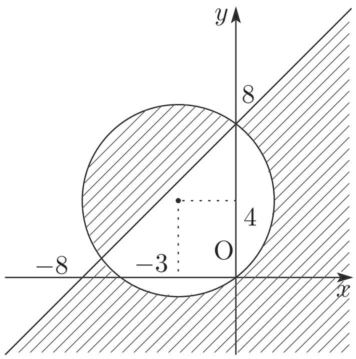
$$\begin{cases} -x+y-8<0 \\ x^2+y^2+6x-8y>0 \end{cases}$$

これらを変形すると，

$$\begin{cases} y>x+8 & \cdots ① \\ (x+3)^2+(y-4)^2<25 & \cdots ② \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} y<x+8 & \cdots ③ \\ (x+3)^2+(y-4)^2>25 & \cdots ④ \end{cases}$$



連立不等式 ①，② の表す領域と，連立不等式 ③，④ の表す領域をあわせると，図の斜線部分である. 境界は含まない.　　(答)

【3】(1) 境界は

$$\begin{aligned}&\text{直線 } y=2x+4 \ \cdots ①\\&\text{直線 } y=-x+2 \ \cdots ②\end{aligned}$$

である．

領域は，直線 ① の下側，直線 ② の上側だから，境界を含まないことを考えて，

$$\begin{cases}\boldsymbol{y<2x+4}\\ \boldsymbol{y>-x+2}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 境界は

$$\begin{aligned}&\text{直線 } y=-x+1\cdots ①\\&\quad\text{円 } x^2+y^2=9\cdots ②\end{aligned}$$

であり，

領域は，直線 ① の下側，円 ② の内側だから，境界を含まないことを考えて，

$$\begin{cases}\boldsymbol{y<-x+1}\\ \boldsymbol{x^2+y^2<9}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(3) 境界は，

$$\begin{aligned}&\text{放物線 } y=(x-2)^2\\&\quad\text{直線 } y=\frac{1}{2}x+2\end{aligned}$$

であり，領域は，境界を含まないことを考えて，

$$\begin{cases}y<(x-2)^2 & \text{つまり},\ x^2-4x-y+4>0\cdots ①\\ y>\dfrac{1}{2}x+2 & \text{つまり},\ x-2y+4<0\cdots ②\end{cases}$$

または，

$$\begin{cases}y>(x-2)^2 & \text{つまり},\ x^2-4x-y+4<0\cdots ③\\ y<\dfrac{1}{2}x+2 & \text{つまり},\ x-2y+4>0\cdots ④\end{cases}$$

より，

$$\boldsymbol{(x^2-4x-y+4)(x-2y+4)<0} \qquad \text{(答)}$$

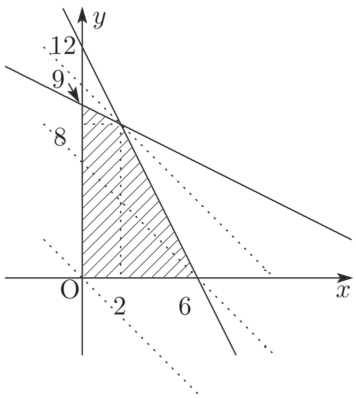
(4) 境界は，

$$\begin{aligned}&\quad\text{円 } x^2+y^2=4\\&\text{直線 } x=0,\ x=1\end{aligned}$$

であり，領域は，境界を含まないことを考えて，

$$\boldsymbol{x^2+y^2<4,\ 0<x<1} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)



$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x + 9 & \cdots ① \\ y \leqq -2x + 12 & \cdots ② \end{cases}$$

より，存在する領域は右の図の斜線部分.
境界は含む. (答)

(2) $x + y = k$ とおくと,

$$y = -x + k$$

より，傾きが -1 の直線である.
この直線を上方に平行移動すると k の値は増加し，下方に平行移動すると k の値は減少する．この直線が，図示された領域を通るとき，最も上方にくるのは，① と ② の交点 (2, 8) を通るときであり，最も下方にくるのは，原点 (0, 0) を通るときである.
したがって，$x + y$ は,

$x = 2,\ y = 8$ のとき，最大値 10
$x = 0,\ y = 0$ のとき，最小値 0

をとる.
したがって,

$\mathbf{0 \leqq x + y \leqq 10}$　　(答)

【5】 $2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ と変形されるので，これは，傾き -2 の直線である．

したがって，この直線と条件の不等式の領域が共有点を持つときの k の値の範囲を調べて，k の最大値，最小値を求めればよい．

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ y=-2x+k & \cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して，

$$x^2+(-2x+k)^2=1$$

整理して，

$$5x^2-4kx+k^2-1=0 \quad \cdots ③$$

② が ① に接するとき，③ は重解を持つので，

$$\begin{aligned} \text{解の判別式 } D &= (-4k)^2-4\times 5\times (k^2-1) \\ &= -4k^2+20=0 \end{aligned}$$

$\therefore\ k^2=5$ より，$k=\pm\sqrt{5}$

よって，

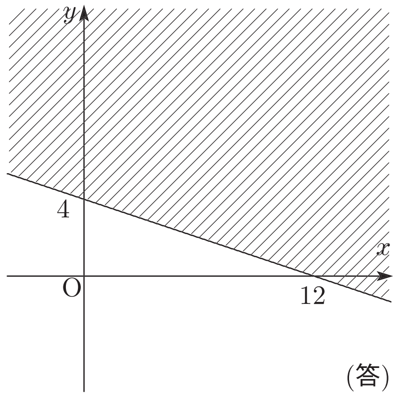
k の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$ 　(答)

添削課題

【1】(1) $x+3y-12 \geqq 0$ より

$$y \geqq -\frac{1}{3}x+4$$

したがって，直線 $y=-\frac{1}{3}x+4$ の直線上および上方の部分を表すから，右の図の斜線部分で，境界を含む．



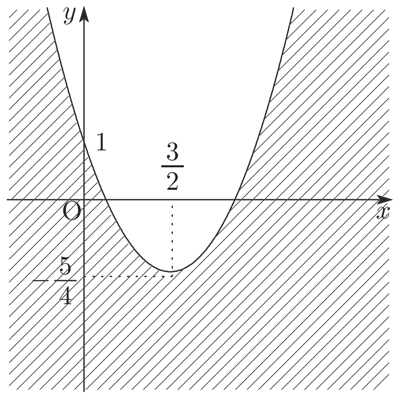
(答)

(2) $x^2-3x+1-y>0$ より

$$y<x^2-3x+1$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

したがって，

放物線 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ の下方の部分を表すから，右の図の斜線部分で，境界を含まない．

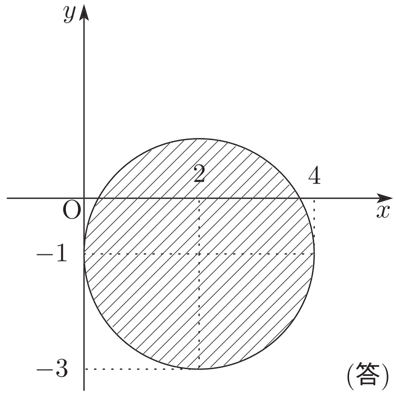


(答)

(3) $x^2+y^2-4x+2y+1 \leqq 0$ より

$$(x-2)^2+(y+1)^2 \leqq 4$$

したがって，円 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ の円周上，および，内部を表すから，右の図の斜線部分で，境界を含む．



(答)

【2】(1) $\begin{cases} x^2+4x-1+y<0 \\ 2x+y+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<-(x+2)^2+5 & \cdots ① \\ y>-2x-1 & \cdots ② \end{cases}$

① を表す領域は，放物線 $y=-(x+2)^2+5$ の下方部分　$\cdots$③
② を表す領域は，直線 $y=-2x-1$ の上方部分　$\cdots$④
よって，求める領域は ③ かつ ④，すなわち，③ と ④ の共通部分であるから，下図の斜線部分となる．ただし，境界上の点は含まない．

(2)
$$(x+2y-5)(x-y-5)<0$$
$$\iff \text{(i)}\begin{cases} x+2y-5<0 \\ x-y-5>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(ii)}\begin{cases} x+2y-5>0 \\ x-y-5<0 \end{cases}$$

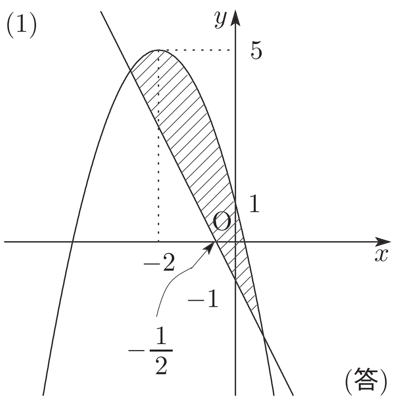
したがって，

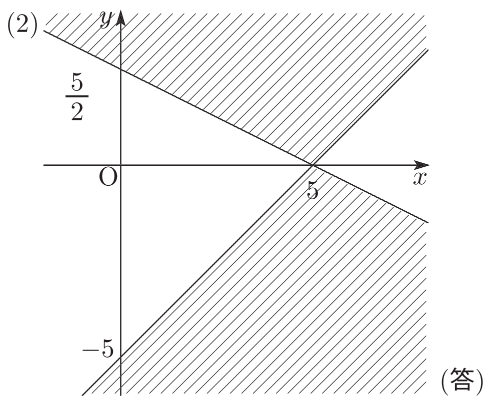
$$\text{(i)}\begin{cases} x+2y-5<0 \\ x-y-5>0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} & \cdots ① \\ y<x-5 & \cdots ② \end{cases}$$

① の表す領域は，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ の下方部分　$\cdots$③
② の表す領域は，直線 $y=x-5$ の下方部分　$\cdots$④
であり，また，

$$\text{(ii)}\begin{cases} x+2y-5>0 \\ x-y-5<0 \end{cases} \iff \begin{cases} y>-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} & \cdots ⑤ \\ y>x-5 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ の表す領域は，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ の上方部分　$\cdots$⑦
⑥ の表す領域は，直線 $y=x-5$ の上方部分　$\cdots$⑧
であるから，求める領域は ③ かつ ④ の共通部分，または，⑦ かつ ⑧ の共通部分であるから，下図の斜線部分となる．ただし，境界上の点は含まない．





【3】(1) グラフより，放物線，直線の方程式はそれぞれ

$$y=\frac{1}{4}x^2-1,\qquad y=3$$

となる．放物線の下方部分と直線の下方部分の共通部分であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{y<\frac{1}{4}x^2-1} \\ \boldsymbol{y<3} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) グラフより，2 直線の方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 & \cdots① \\ y=-2x-1 & \cdots② \end{cases}$$

となる．① で表される直線の下方部分と，② で表される直線の上方部分の共通部分であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{y<-\frac{1}{2}x+2} \\ \boldsymbol{y>-2x-1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【4】

$$y=x \quad \cdots①$$
$$y=\frac{2}{7}x \quad \cdots②$$
$$2x+3y=20 \quad \cdots③$$

とおく．3 つの不等式の表す領域は，3 直線①, ②, ③で囲まれた 3 点 O(0, 0), A(4, 4), B(7, 2) を頂点とする △AOB の内部および周である

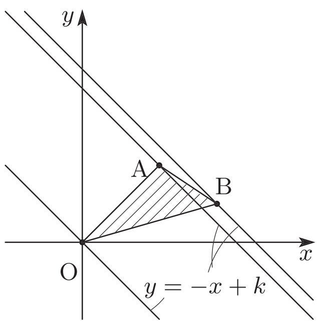
$$x+y=k \quad \cdots④$$

とおくと，k は直線 ④ の y 切片で，④ が △AOB の周，および内部の領域と共有点をもつときの k の最大値，最小値を求める．

$$(\text{直線④の傾き} -1) < \left(\text{直線③の傾き} -\frac{2}{3}\right)$$

であるから，右の図のように

④が B(7, 2) を通るとき $k=9$ で最大
④が O(0, 0) を通るとき $k=0$ で最小



したがって

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \boldsymbol{9\ (x=7,\ y=2)} \\ \textbf{最小値} \quad \boldsymbol{0\ (x=0,\ y=0)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$