M1JK

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１東大数学Ｋ

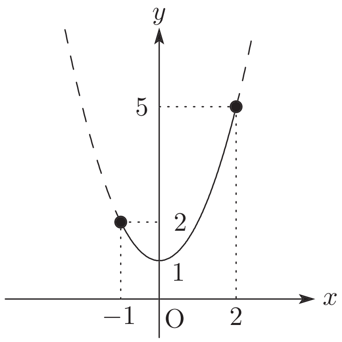
４章　２次関数（２）－２次関数の最大・最小－

問題

【1】(1)

$$y = x^2 + 1$$

であるから，

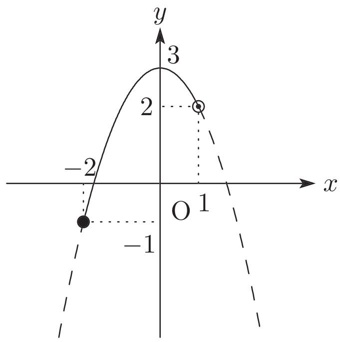


最大値：**5 ($x = 2$)**，
最小値：**1 ($x = 0$)**

(2)

$$\begin{aligned} y &= 3 - x^2 \\ &= -x^2 + 3 \end{aligned}$$

であるから，

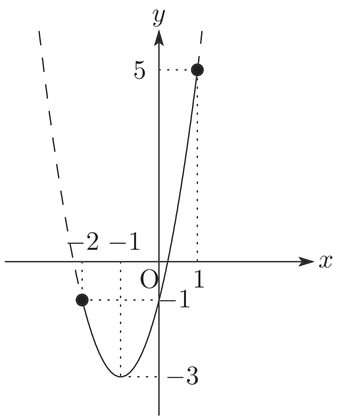


最大値：**3 ($x = 0$)**，
最小値：**−1 ($x = -2$)**

(3)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 1 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 1 \\ &= 2\{(x + 1)^2 - 1\} - 1 \\ &= 2(x + 1)^2 - 2 - 1 \\ &= 2(x + 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

であるから，

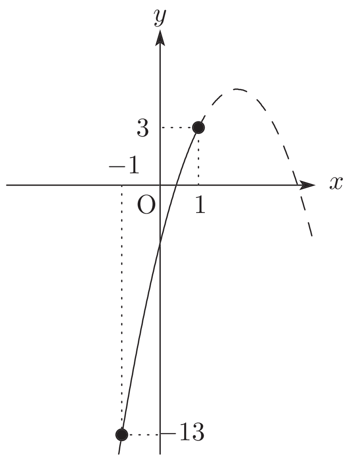


最大値：**5 ($x = 1$)**，
最小値：**−3 ($x = -1$)**

(4)

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x - 3 \\ &= -2(x^2 - 4x) - 3 \\ &= -2\{(x - 2)^2 - 4\} - 3 \\ &= -2(x - 2)^2 + 8 - 3 \\ &= -2(x - 2)^2 + 5 \end{aligned}$$

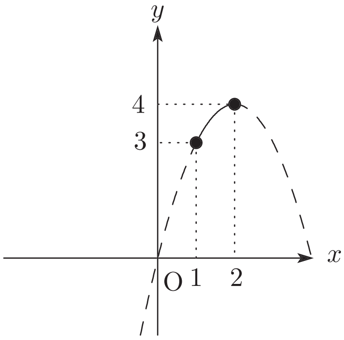
であるから，



最大値：**3 ($x = 1$)**，
最小値：**−13 ($x = -1$)**

(5)
$$\begin{aligned} y &= 4x - x^2 = -(x^2 - 4x) \\ &= -\{(x-2)^2 - 4\} \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

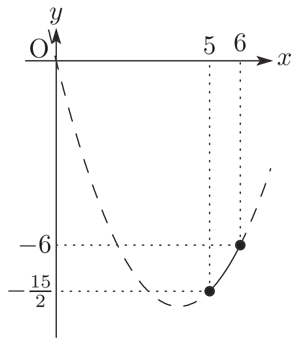
であるから,



最大値：4 ($x = 2$),
最小値：3 ($x = 1$)

(6)
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 4x \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 8x) \\ &= \frac{1}{2}\{(x-4)^2 - 16\} \\ &= \frac{1}{2}(x-4)^2 - 8 \end{aligned}$$

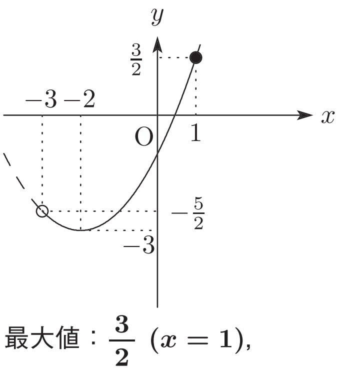
であるから,



最大値：-6 ($x = 6$),
最小値：$-\frac{15}{2}$ ($x = 5$)

(7)
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x) - 1 \\ &= \frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4\} - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 - 1 \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3 \end{aligned}$$

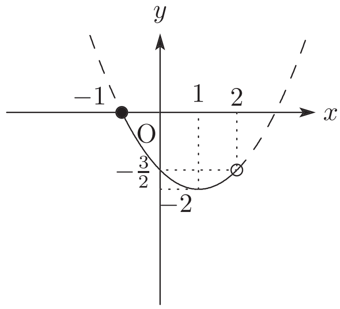
であるから,



最大値：$\frac{3}{2}$ ($x = 1$),
最小値：-3 ($x = -2$)

(8)
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x+1)(x-3) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}\{(x-1)^2 - 1\} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

であるから,



最大値：0 ($x = -1$),
最小値：-2 ($x = 1$)

【2】(1) $x=-3$ のとき，最大になるから，
求める 2 次関数は

$$y=-(x+3)^2+q$$

とおくことができる．
これが (1, 3) を通るので，

$$\begin{aligned}3&=-(1+3)^2+q\\&=-16+q\\q&=19\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}y&=-(x+3)^2+19\\&=-x^2-6x+10\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a=-6,\ b=10}$

(2) $x=1$ のとき最小になるから，
求める 2 次関数は

$$y=(x-1)^2+q$$

とおくことができる．
これが $(-2,\ -1)$ を通るので

$$\begin{aligned}-1&=(-2-1)^2+q\\-1&=9+q\\q&=-10\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}y&=(x-1)^2-10\\&=x^2-2x-9\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a=-2,\ b=-9}$

(3) 最大値 1 なので，$a<0$．よって，

$$\begin{aligned}y&=ax^2-4x+a+1\\&=a\left(x^2-\frac{4}{a}x\right)+a+1\\&=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+a+1\end{aligned}$$

$x=\dfrac{2}{a}$ のとき，最大値 $-\dfrac{4}{a}+a+1$ を
とるので

$$\begin{aligned}-\frac{4}{a}+a+1&=1\\a^2&=4\\a&=\pm2\end{aligned}$$

ここで，$a<0$ なので，$\boldsymbol{a=-2}$

＜別解＞
最大値 1 をとるので，$a<0$．よって，

$$y=a(x-p)^2+1\ (a<0)$$

とおける．展開すると

$$y=ax^2-2apx+ap^2+1$$

これと

$$y=ax^2-4x+a+1$$

より，係数比較すると

$$\begin{cases}2ap=4 & \cdots ①\\ ap^2=a & \cdots ②\end{cases}$$

②より，$a<0$ だから

$$\begin{aligned}p^2&=1\\p&=\pm1\end{aligned}$$

①に $p=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}2a&=4\\a&=2\end{aligned}$$

$a<0$ より不適．
次に①に $p=-1$ を代入すると

$$-2a=4 \qquad a=-2$$

よって，$\boldsymbol{a=-2}$

(4) 最小値 $-3a$ なので，$a>0$．また，グラフは 2 点 $(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$ を通るので

$$y=a(x+1)(x-1)-2 \quad (a>0)$$

とおける．

$$\begin{aligned} y&=a(x+1)(x-1)-2\\ &=ax^2-a-2 \end{aligned}$$

よって，$x=0$ のとき最小値 $-a-2$ をとるので

$$\begin{aligned} -a-2&=-3a\\ 2a&=2 \qquad \therefore\ a=1 \end{aligned}$$

これは $a>0$ をみたしているので，$\boldsymbol{a=1}$
$a=1$ なので

$$y=ax^2-a-2=x^2-3$$

よって，$\boldsymbol{b=0,\ c=-3}$　　　（答）$\boldsymbol{a=1,\ b=0,\ c=-3}$

【3】(1) (I) $a\fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^2-2ax+b\\ &=a(x^2-2x)+b\\ &=a(x-1)^2-a+b \end{aligned}$$

となるから，グラフの頂点は $(1,\ -a+b)$ である．

(i) $a>0$ のとき，$x=1$ は区間 $-1\leqq x\leqq 2$ 内にあるので

$$x=1 \text{ のとき 最小値}：-a+b=-4 \ \cdots ①$$

をとる．さらに，端点のうち $x=-1$ のとき最大値 6 をとるから，

$$\begin{aligned} &6=a\cdot(-1)^2-2a\cdot(-1)+b\\ &6=3a+b \ \cdots ② \end{aligned}$$

①，②を連立して $a=\dfrac{5}{2}$，$b=-\dfrac{3}{2}$
これは $a>0$ をみたす．

(ii) $a<0$ のとき，$x=1$ は区間 $-1\leqq x\leqq 2$ 内にあるので

$$x=1 \text{ のとき 最大値}：-a+b=6 \ \cdots ③$$

をとる．さらに，端点のうち $x=-1$ のとき最小値 -4 をとるから

$$\begin{aligned} &-4=a\cdot(-1)^2-2a\cdot(-1)+b\\ &-4=3a+b \ \cdots ④ \end{aligned}$$

③，④を連立して $a=-\dfrac{5}{2}$，$b=\dfrac{7}{2}$
これは $a<0$ をみたす．

(II) $a=0$ のとき

$$f(x)=0\cdot x^2-2\cdot 0\cdot x+b=b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．したがって，最大値 6，最小値 -4 とはならない．

(I)(II) より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0}\textbf{ のとき，}\quad \boldsymbol{a=\dfrac{5}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}} \\ \boldsymbol{a<0}\textbf{ のとき，}\quad \boldsymbol{a=-\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{7}{2}} \end{cases}$$

(2) (I) $a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^2-ax+b \\ &=a(x^2-x)+b \\ &=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a+b \end{aligned}$$

となるから，グラフの頂点は $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4}a+b\right)$ である．

(i) $a>0$ のとき，$x=\dfrac{1}{2}$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ 内にあるので，

$$x=\frac{1}{2}\text{のとき，最小値：}-\frac{1}{4}a+b=-1\ \cdots①$$

をとる．さらに，端点のうち，$x=-2$ のとき，最大値 4 をとるから

$$4=a\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b$$
$$4=6a+b\ \cdots②$$

①，②を連立して $a=\dfrac{4}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$

これは $a>0$ をみたす．

(ii) $a<0$ のとき，$x=\dfrac{1}{2}$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ 内にあるので

$$x=\frac{1}{2}\text{のとき，最大値：}-\frac{1}{4}a+b=4\ \cdots③$$

をとる．さらに，端点のうち，$x=-2$ のとき，最小値 -1 をとるから

$$-1=a\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b$$
$$-1=6a+b\ \cdots④$$

③，④を連立して $a=-\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{19}{5}$

これは $a<0$ をみたす．

(II) $a=0$ のとき

$$f(x)=0\cdot x^2-0\cdot x+b=b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．

したがって，最大値 4，最小値 -1 とはならない．

(I)(II) より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0}\textbf{ のとき，}\quad \boldsymbol{a=\dfrac{4}{5},\ b=-\dfrac{4}{5}} \\ \boldsymbol{a<0}\textbf{ のとき，}\quad \boldsymbol{a=-\dfrac{4}{5},\ b=\dfrac{19}{5}} \end{cases}$$

(3) (I) $a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + 2ax + 3a + b \\ &= a(x+1)^2 + 2a + b \end{aligned}$$

となるから，グラフの頂点は $(-1,\ 2a+b)$ である．

(i) $a > 0$ のとき，$x = -1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ 内にあるので

$x = -1$ のとき，最小値：$2a + b = -5$ $\cdots$①

をとる．さらに，端点のうち $x = 1$ のとき最大値 7 をとるから

$$\begin{aligned} &7 = a \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3a + b \\ &7 = 6a + b \ \cdots ② \end{aligned}$$

①，②を連立して，$a = 3,\ b = -11$

これは $a > 0$ をみたす．

(ii) $a < 0$ のとき，$x = -1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ 内にあるので

$x = -1$ のとき，最大値：$2a + b = 7$ $\cdots$③

をとる．さらに端点のうち $x = 1$ のとき最小値 -5 をとるから

$$\begin{aligned} &-5 = a \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3a + b \\ &-5 = 6a + b \ \cdots ④ \end{aligned}$$

③，④を連立して $a = -3,\ b = 13$

これは $a < 0$ をみたす．

(II) $a = 0$ のとき

$$f(x) = 0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 3 \cdot 0 + b = b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．

したがって，最大値 7，最小値 -5 とはならない．

(I)(II) より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 0} \text{ **のとき，**} \quad \boldsymbol{a = 3,\ b = -11} \\ \boldsymbol{a < 0} \text{ **のとき，**} \quad \boldsymbol{a = -3,\ b = 13} \end{cases}$$

(4) (I) $a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + b \\ &= a(x-1)^2 - a + b \end{aligned}$$

となるからグラフの頂点は $(1,\ -a+b)$ である．

(i) $a > 0$ のとき，$x = 1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので

$x = 1$ のとき，最小値：$-a + b = -1$ $\cdots$①

をとる．さらに，端点のうち $x = -2$ のとき最大値 17 をとるから

$$\begin{aligned} &17 = a \cdot (-2)^2 - 2a \cdot (-2) + b \\ &17 = 8a + b \ \cdots ② \end{aligned}$$

①，②を連立して，$a = 2,\ b = 1$

これは $a > 0$ をみたす．

(ii) $a<0$ のとき，$x=1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので

$$x=1 \text{ のとき，最大値：} -a+b=17 \ \cdots ③$$

をとる．さらに，端点のうち $x=-2$ のとき最小値 -1 をとるから，

$$-1=a\cdot(-2)^2-2a\cdot(-2)+b$$
$$-1=8a+b \ \cdots ④$$

③，④を連立して，$a=-2,\ b=15$
これは $a<0$ をみたす．

(II) $a=0$ のとき

$$f(x)=0\cdot x^2-2\cdot 0\cdot x+b=b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．
したがって，最大値 17，最小値 -1 とはならない．

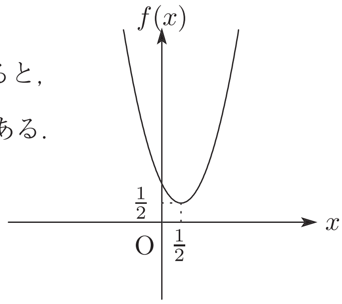
(I)(II) より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>0} \textbf{ のとき，} \ \boldsymbol{a=2,\ b=1} \\ \boldsymbol{a<0} \textbf{ のとき，} \ \boldsymbol{a=-2,\ b=15} \end{cases}$$

【4】(1) $x+y=1$ より，$y=1-x \ \cdots ①$
よって，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(1-x)^2 \\ &= x^2+1-2x+x^2 \\ &= 2x^2-2x+1 \\ &= 2(x^2-x)+1 \\ &= 2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる．そこで，$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ とすると，
右のグラフより，最大値はなく，最小値は $\frac{1}{2}$ である．



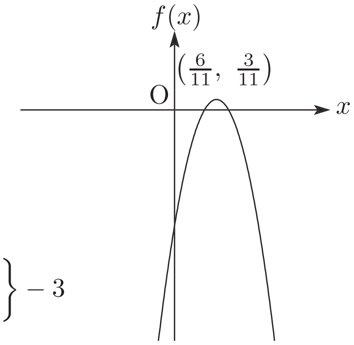
$x=\frac{1}{2}$ を①に代入して

$$y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，**最大値：なし，最小値：**$\boldsymbol{\frac{1}{2}} \ \left(\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}}\right)$

(2) $2x+y=1$ より，$y=1-2x$ $\cdots$①

よって，



$$\begin{aligned} x^2-3y^2 &= x^2-3(1-2x)^2 \\ &= x^2-3(1-4x+4x^2) \\ &= -11x^2+12x-3 \\ &= -11\left(x^2-\frac{12}{11}x\right)-3 \\ &= -11\left\{\left(x-\frac{6}{11}\right)^2-\frac{36}{121}\right\}-3 \\ &= -11\left(x-\frac{6}{11}\right)^2+\frac{36}{11}-3 \\ &= -11\left(x-\frac{6}{11}\right)^2+\frac{3}{11} \end{aligned}$$

となる．$f(x)=-11\left(x-\dfrac{6}{11}\right)^2+\dfrac{3}{11}$ とすると，

右のグラフより，最大値 $\dfrac{3}{11}$，最小値なしとなる．

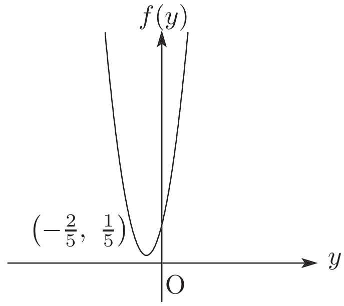
$x=\dfrac{6}{11}$ を①に代入して，$y=1-2\cdot\dfrac{6}{11}=-\dfrac{1}{11}$

よって，**最大値：**$\boldsymbol{\dfrac{3}{11}}$ $\boldsymbol{\left(x=\dfrac{6}{11},\ y=-\dfrac{1}{11}\right)}$**，最小値：なし**

(3) $x-2y=1$ より，$x=1+2y$ $\cdots$①

よって，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (1+2y)^2+y^2 \\ &= 5y^2+4y+1 \\ &= 5\left(y^2+\frac{4}{5}y\right)+1 \\ &= 5\left\{\left(y+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right\}+1 \\ &= 5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}+1 \\ &= 5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5} \end{aligned}$$



$f(y)=5\left(y+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$ とすると，

右のグラフより，最大値なし，最小値 $\dfrac{1}{5}$ となる．

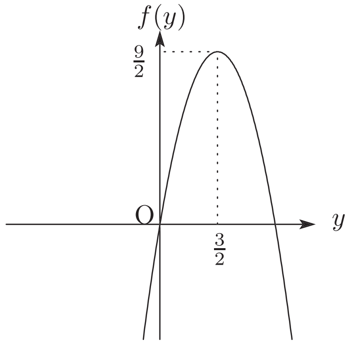
$y=-\dfrac{2}{5}$ のとき①より

$$x=1+2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

よって，**最大値：なし，最小値：**$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ $\boldsymbol{\left(x=\dfrac{1}{5},\ y=-\dfrac{2}{5}\right)}$

(4) $x+2y=6$ より，$x=6-2y$ $\cdots$①
よって，

$$\begin{aligned} xy &= (6-2y)\cdot y \\ &= -2y^2+6y \\ &= -2(y^2-3y) \\ &= -2\left\{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\} \\ &= -2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2} \end{aligned}$$



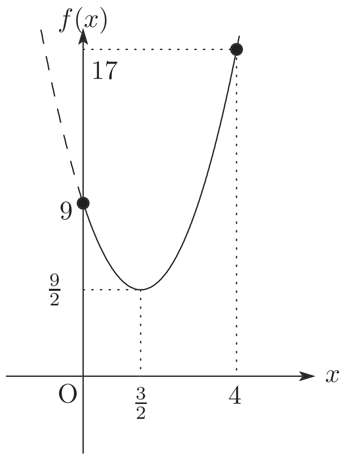
$f(y)=-2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ とすると，
右のグラフより，最大値 $\frac{9}{2}$，最小値なしとなる．
$y=\frac{3}{2}$ のとき①より

$$x=6-2\cdot\frac{3}{2}=3$$

よって，**最大値：$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ $\left(\boldsymbol{x=3,\ y=\frac{3}{2}}\right)$，最小値：なし**

【5】(1) $x+y=3$ より，$y=3-x$ $\cdots$①
$y\geqq -1$ より，

$$\begin{aligned} y=3-x &\geqq -1 \\ -x &\geqq -4 \\ x &\leqq 4 \end{aligned}$$



よって，x の変域は $0\leqq x\leqq 4$ $\cdots$②
である．
x^2+y^2 に①を代入して，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(3-x)^2 \\ &= 2x^2-6x+9 \\ &= 2(x^2-3x)+9 \\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+9 \\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる．$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ とすると，
②の定義域についての右のグラフより，最大値は 17，最小値は $\frac{9}{2}$ となる．
$x=\frac{3}{2}$ を①に代入して，$y=\frac{3}{2}$．$x=4$ を①に代入して，$y=-1$
よって，**最大値：17 $\boldsymbol{(x=4,\ y=-1)}$，最小値：$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ $\left(\boldsymbol{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}}\right)$**

(2) $2x+y=2$ より，$y=2-2x$ $\cdots$①

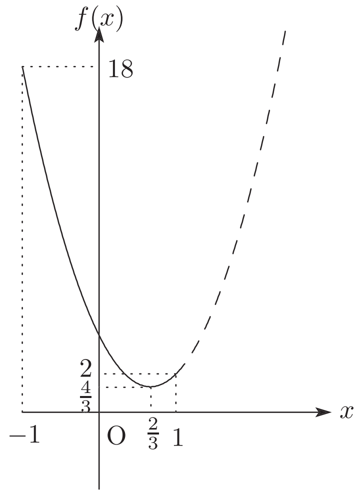
$y \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} y = 2-2x &\geqq 0 \\ -2x &\geqq -2 \\ x &\leqq 1 \end{aligned}$$

よって，x の変域は $-1 \leqq x \leqq 1$ $\cdots$② である．

$2x^2+y^2$ に①を代入して，

$$\begin{aligned} 2x^2+y^2 &= 2x^2+(2-2x)^2 \\ &= 6x^2-8x+4 \\ &= 6\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+4 \\ &= 6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{8}{3}+4 \\ &= 6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3} \end{aligned}$$



となる．そこで，$f(x)=6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$ として，

②の定義域についての右のグラフより，最大値は 18，最小値は $\frac{4}{3}$ となる．

$x=\frac{2}{3}$ を①に代入して，$y=\frac{2}{3}$

$x=-1$ を①に代入して，$y=4$

よって，**最大値：18 ($x=-1$，$y=4$)**，**最小値：$\frac{4}{3}$ $\left(x=\frac{2}{3},\ y=\frac{2}{3}\right)$**

(3) $2x+y=4$ より，$y=4-2x$ $\cdots$①

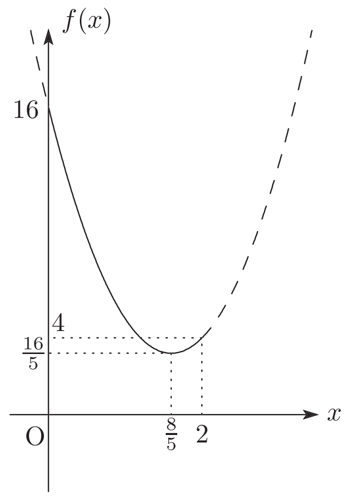
$y \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} y = 4-2x &\geqq 0 \\ -2x &\geqq -4 \\ x &\leqq 2 \end{aligned}$$

よって，x の変域は $0 \leqq x \leqq 2$ $\cdots$②

である．x^2+y^2 に①を代入して，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(4-2x)^2 \\ &= x^2+16-16x+4x^2 \\ &= 5x^2-16x+16 \\ &= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16 \\ &= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5} \end{aligned}$$



となる．そこで，$f(x)=5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$ として，

②の定義域についての右のグラフより，最大値は 16，最小値は $\frac{16}{5}$ である．

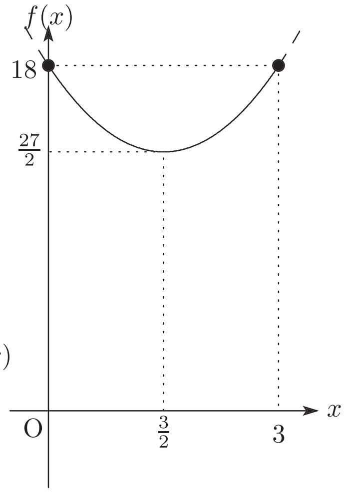
$x=\frac{8}{5}$ を①に代入して，$y=\frac{4}{5}$．また，$x=0$ を①に代入して，$y=4$.

よって，**最大値：16 ($x=0$，$y=4$)**，**最小値：$\frac{16}{5}$ $\left(x=\frac{8}{5},\ y=\frac{4}{5}\right)$**

(4) $2x+y=6$ より，$y=6-2x$ $\cdots$①
$y \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} y=6-2x &\geqq 0 \\ -2x &\geqq -6 \\ x &\leqq 3 \end{aligned}$$

よって，x の変域は $0 \leqq x \leqq 3$ $\cdots$②
となる．与式に①を代入して，



$$\begin{aligned} &4x^2+3xy+y^2-6x-3y \\ =&4x^2+3x(6-2x)+(6-2x)^2-6x-3(6-2x) \\ =&2x^2-6x+18=2(x^2-3x)+18 \\ =&2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+18 \\ =&2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+18 \\ =&2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2} \end{aligned}$$

となる．そこで，$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2}$ として，
②の定義域についての右のグラフより，最大値は 18，最小値は $\frac{27}{2}$ である．
①より，$x=0$ のとき，$y=6$ であり，$x=3$ のとき，$y=0$ であり，
$x=\frac{3}{2}$ のとき，$y=3$.
よって，**最大値：18 ($x=0$，$y=6$ または $x=3$，$y=0$)，**
　　最小値：$\frac{27}{2}$ $\left(x=\frac{3}{2},\ y=3\right)$

【6】(1)

$$\begin{aligned} &\text{三角形 PQR} \\ =&\text{四角形 ABCD} - \text{三角形 BPQ} - \text{三角形 CQR} - \text{四角形 ADRP} \\ =&4-\frac{1}{2}\times 2x\times(2-x)-\frac{1}{2}\times 3x\times(2-2x)-\frac{1}{2}\times(x+2-3x)\times 2 \\ =&\boldsymbol{4x^2-3x+2} \end{aligned}$$

(2) 三角形 PQR の面積を $f(x)$ とすると，

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)+2 \\ &= 4\left\{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{64}\right\}+2 \\ &= 4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}+2 \\ &= 4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16} \end{aligned}$$

$0 \leqq 3x \leqq 2$ より，$0 \leqq x \leqq \frac{2}{3}$ なので，$f(x)$ は $x=\frac{3}{8}$ のとき，最小値をとる．
よって，$\boldsymbol{x=\frac{3}{8}}$

【7】片方を x とすると，もう一辺は $18-x$

$$\begin{aligned} 18-x &> 0 \\ -x &> -18 \\ x &< 18 \end{aligned}$$

$0<x<18$ となる．斜辺を y とすると，

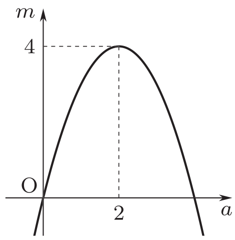
$$\begin{aligned} y^2 &= x^2+(18-x)^2 \\ &= 2x^2-36x+324 \\ &= 2(x^2-18x)+324 \\ &= 2\{(x-9)^2-81\}+324 \\ &= 2(x-9)^2-162+324 \\ &= 2(x-9)^2+162 \end{aligned}$$

y は線分だから，$y>0$ で，y^2 が最小になれば y も最小になるので，
y の最小値は，$x=9$ のとき，$y=\sqrt{162}=\mathbf{9\sqrt{2}}$

【8】(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax+4a \\ &= (x-a)^2-a^2+4a \end{aligned}$$

よって，$x=a$ のとき，$f(x)$ は最小値 $-a^2+4a$ をとる．

$\therefore$ $\boldsymbol{m=-a^2+4a}$ **(** $\boldsymbol{x=a}$ **のとき)**



(2)
$$\begin{aligned} m &= -a^2+4a \\ &= -(a^2-4a) \\ &= -\{(a-2)^2-4\} \\ &= -(a-2)^2+4 \end{aligned}$$

m のグラフは右図のようになるので，

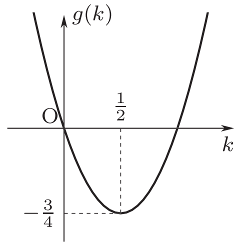
$\boldsymbol{a=2}$ **のとき,** $\boldsymbol{m}$ **は最大値 4 をとる**

【9】(1)
$$\begin{aligned} y &= -2x^2+4kx+k^2-3k \\ &= -2(x^2-2kx)+k^2-3k \\ &= -2\{(x-k)^2-k^2\}+k^2-3k \\ &= -2(x-k)^2+2k^2+k^2-3k \\ &= -2(x-k)^2+3k^2-3k \end{aligned}$$

よって，$x=k$ のとき，y は最大値 $3k^2-3k$ をとる．

$\therefore$ $\boldsymbol{g(k)=3k^2-3k}$ **(** $\boldsymbol{x=k}$ **のとき)**

(2) $$g(k) = 3k^2 - 3k$$
$$= 3(k^2 - k)$$
$$= 3\left\{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}$$
$$= 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$



$g(k)$ のグラフは右図のようになる．
よって，$\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$ をとる．

【10】(1) $$y = (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x) + 10$$

ここで，$x^2 - 2x = t$ $\cdots$① とおくと，
$$y = t^2 + 6t + 10 \ \cdots ②$$
となる．①より
$$t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$$
これより，t の変域は，$t \geqq -1$ $\cdots$③
次に，②を平方完成して
$$y = t^2 + 6t + 10 = (t + 3)^2 + 1$$
よって，最大値：なし，最小値：5 $(t = -1)$
$t = -1$ を①に代入して
$$x^2 - 2x = -1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 1$$
したがって，**最小値：5** $\boldsymbol{(x = 1}$ **のとき)**

(2) $$y = -(x^2 - 2x + 2)^2 + 6(x^2 - 2x + 2) + 1$$

ここで，$x^2 - 2x + 2 = t$ $\cdots$① とおくと，
$$y = -t^2 + 6t + 1 \ \cdots ②$$
となる．①より
$$t = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$
これより，t の変域は，$t \geqq 1$ $\cdots$③
次に②を平方完成して
$$y = -t^2 + 6t + 1 = -(t - 3)^2 + 10$$
よって，最大値：10 $(t = 3)$
$t = 3$ を①に代入して
$$x^2 - 2x + 2 = 3$$
$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$
したがって，**最大値：10** $\boldsymbol{(x = 1 \pm \sqrt{2}}$**のとき)**

(3) $$y=-(x^2-4x+1)^2+2x^2-8x-1=-(x^2-4x+1)^2+2(x^2-4x+1)-3$$

と変形できる．ここで，$x^2-4x+1=t\ \cdots①$ とおくと，

$$y=-t^2+2t-3\ \cdots②$$

となる．①より

$$t=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

これより t の変域は，$-3\leqq t\leqq 1\ \cdots③$

次に②を平方完成して

$$y=-t^2+2t-3=-(t-1)^2-2$$

よって，最大値：-2 ($t=1$)，最小値：-18 ($t=-3$)

$t=1$ を①に代入して

$$x^2-4x+1=1$$
$$x(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=0,\ 4$$

$0\leqq x\leqq 3$ より，$x=0$

同様にして，$t=-3$ を①に代入して

$$x^2-4x+1=-3$$
$$x^2-4x+4=0 \qquad \therefore\ x=2$$

$0\leqq x\leqq 3$ より，$x=2$

したがって，**最大値：$-$2 ($\boldsymbol{x=0}$)，最小値：$-$18 ($\boldsymbol{x=2}$)**

(4) $$f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$$

ここで，$x^2+2x+2=t\ \cdots①$ とおくと，

$$g(t)=at^2+2at+b\ \cdots②$$

とおける．①より

$$t=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

これより，t の変域は，$t\geqq 1\ \cdots③$

次に②を平方完成して

$$g(t)=at^2+2at+b=a(t+1)^2-a+b$$

③の範囲で②を考えると，最小値 6 をもつので $a>0$

また，最小値：$g(1)=3a+b=6\ \cdots④$

$f(0)=11$ より，$x=0$ のとき，$t=0^2+2\cdot 0+2=2$ なので，

$$\begin{aligned}g(2)&=a\cdot 2^2+2a\cdot 2+b\\&=8a+b=11\ \cdots⑤\end{aligned}$$

④，⑤より

$$\begin{cases}3a+b=6 & \cdots④\\ 8a+b=11 & \cdots⑤\end{cases}$$

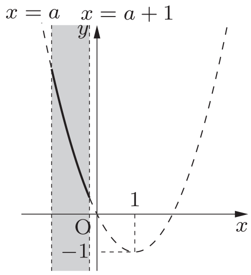
よって，$a=1,\ b=3$

$a>0$ より，条件をみたすので，$\boldsymbol{a=1,\ b=3}$

【11】(1) $$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

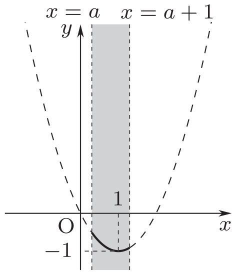
となり，下に凸なグラフで，頂点は $(1,\ -1)$ である．

(i) $a+1<1$
つまり $a<0$ のとき



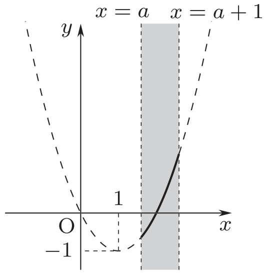
$$\begin{aligned} m(a) &= f(a+1) \\ &= (a+1)^2 - 2(a+1) \\ &= a^2 - 1 \end{aligned}$$

(ii) $a<1 \leqq a+1$,
つまり $0 \leqq a < 1$ のとき



$$m(a) = f(1) = -1$$

(iii) $a \geqq 1$ のとき



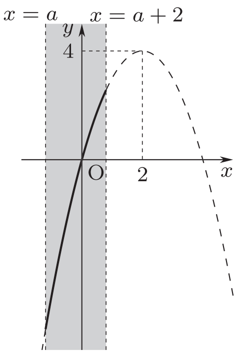
$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) \\ &= a^2 - 2a \end{aligned}$$

以上より $$m(a) = \begin{cases} \boldsymbol{a^2 - 1} & (\boldsymbol{a < 0}) \\ \boldsymbol{-1} & (\boldsymbol{0 \leqq a < 1}) \\ \boldsymbol{a^2 - 2a} & (\boldsymbol{1 \leqq a}) \end{cases}$$

(2) $$f(x) = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$$

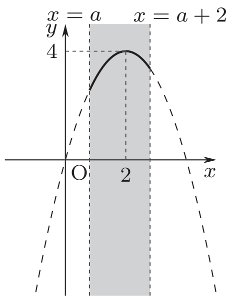
となり，上に凸なグラフで，頂点は $(2,\ 4)$ である．

(i) $a+2<2$
つまり $a<0$ のとき



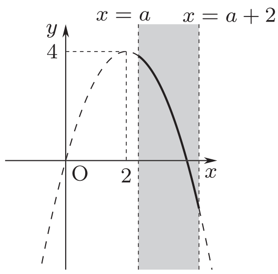
$M(a)$
$=f(a+2)$
$=-(a+2)^2 + 4(a+2)$
$=-a^2 + 4$

(ii) $a<2 \leqq a+2$
つまり $0 \leqq a < 2$ のとき



$$M(a) = f(2) = 4$$

(iii) $a \geqq 2$ のとき



$M(a)$
$=f(a)$
$=-a^2 + 4a$

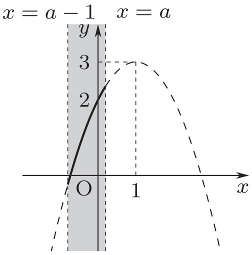
以上より $$M(a) = \begin{cases} \boldsymbol{-a^2 + 4} & (\boldsymbol{a < 0}) \\ \boldsymbol{4} & (\boldsymbol{0 \leqq a < 2}) \\ \boldsymbol{-a^2 + 4a} & (\boldsymbol{2 \leqq a}) \end{cases}$$

(3) $$f(x) = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$$

となり，上に凸なグラフで，頂点は (1, 3) である．

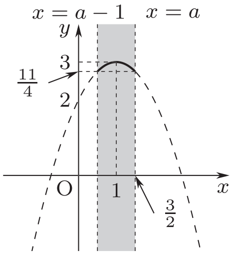
$a-1 \leqq x \leqq a$ の真ん中は，$\dfrac{(a-1)+a}{2} = \dfrac{2a-1}{2}$

(i) $\dfrac{2a-1}{2} < 1$ つまり，$a < \dfrac{3}{2}$ のとき



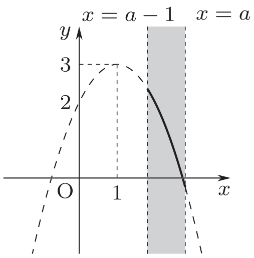
$$\begin{aligned} m(a) &= f(a-1) \\ &= -(a-1)^2 \\ &\qquad + 2(a-1) + 2 \\ &= -a^2 + 4a - 1 \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{2a-1}{2} = 1$ つまり $a = \dfrac{3}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} m(a) &= f\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\qquad + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + 2 \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

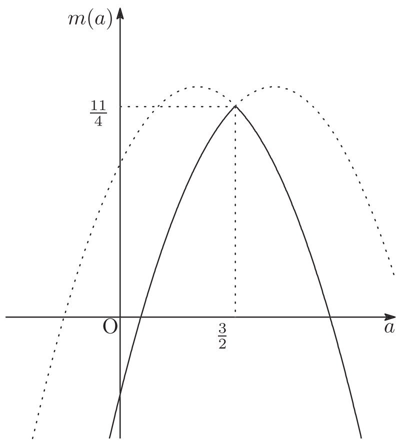
(iii) $\dfrac{2a-1}{2} > 1$ つまり $a > \dfrac{3}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) \\ &= -a^2 + 2a + 2 \end{aligned}$$

以上より，

$$m(a) = \begin{cases} \boldsymbol{-a^2 + 4a - 1} & \left(\boldsymbol{a < \dfrac{3}{2}}\right) \\ \boldsymbol{\dfrac{11}{4}} & \left(\boldsymbol{a = \dfrac{3}{2}}\right) \\ \boldsymbol{-a^2 + 2a + 2} & \left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2} < a}\right) \end{cases}$$

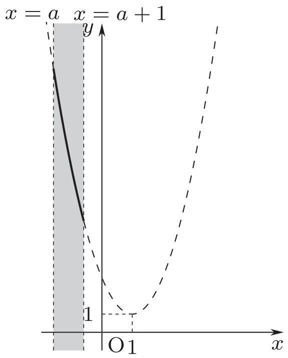


(4) $$f(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1$$

となり，下に凸なグラフで，頂点は $(1,\ 1)$ である．

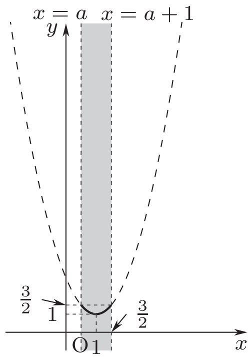
$a \leqq x \leqq a+1$ の真ん中は，$\dfrac{a+(a+1)}{2} = \dfrac{2a+1}{2}$

(i) $\dfrac{2a+1}{2} < 1$ つまり $a < \dfrac{1}{2}$ のとき



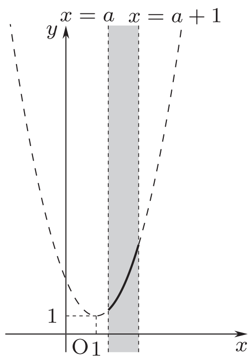
$$\begin{aligned} M(a) &= f(a) \\ &= 2a^2 - 4a + 3 \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{2a+1}{2} = 1$ つまり $a = \dfrac{1}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} M(a) &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

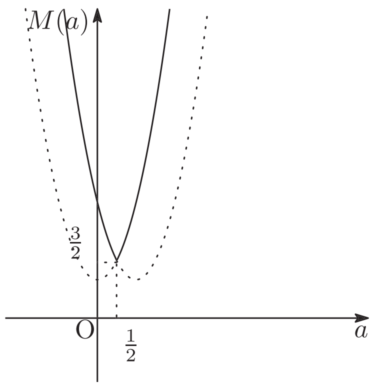
(iii) $\dfrac{2a+1}{2} > 1$ つまり $a > \dfrac{1}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} M(a) &= f(a+1) \\ &= 2(a+1)^2 - 4(a+1) + 3 \\ &= 2a^2 + 1 \end{aligned}$$

以上より，

$$M(a) = \begin{cases} \boldsymbol{2a^2 - 4a + 3} & \left(\boldsymbol{a < \dfrac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{\dfrac{3}{2}} & \left(\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{2a^2 + 1} & \left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < a}\right) \end{cases}$$



問題

【1】(1) $y=x^2+7x+2,\ y=2x-1$ から y を消去して,

$$x^2+7x+2=2x-1$$
$$x^2+5x+3=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$D=5^2-4\cdot 1\cdot 3=13$$

$D>0$ なので，共有点は **2** 個.

(2) $y=-x^2+5x-12,\ y=3x-4$ から y を消去して,

$$-x^2+5x-12=3x-4$$
$$x^2-2x+8=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 8=-7$$

$\frac{D}{4}<0$ だから，共有点は **0** 個.

(3) $y=2x^2-x+\frac{3}{2},\ y=-\frac{3}{2}x+1$ から y を消去して,

$$2x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}x+1$$
$$4x^2-2x+3=-3x+2$$
$$4x^2+x+1=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$D=1^2-4\cdot 4\cdot 1=-15$$

$D<0$ だから，共有点は **0** 個.

(4) $y=-x^2-\frac{3}{2}x+1,\ y=-2x+\frac{5}{4}$ から y を消去して,

$$-x^2-\frac{3}{2}x+1=-2x+\frac{5}{4}$$
$$-4x^2-6x+4=-8x+5$$
$$4x^2-2x+1=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\cdot 1=-3$$

$\frac{D}{4}<0$ だから，共有点は **0** 個.

(5) $y=2x^2-2x,\ y=2x-2$ から y を消去して,

$$2x^2-2x=2x-2$$
$$2x^2-4x+2=0$$
$$x^2-2x+1=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 1=0$$

$\frac{D}{4}=0$ だから，共有点は **1** 個.

(6) $y=-\frac{2}{3}x^2+2x+3,\ y=-\frac{1}{3}x+2$ から y を消去して,

$$-\frac{2}{3}x^2+2x+3=-\frac{1}{3}x+2$$
$$-2x^2+6x+9=-x+6$$
$$2x^2-7x-3=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$D=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=73$$

$D>0$ だから，共有点は **2** 個.

【2】(1) $y=x^2+k$, $y=2x-3$ から y を消去すると,

$$x^2+k=2x-3$$
$$x^2-2x+k+3=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k+3)=-k-2$$

よって,

(i) $\dfrac{D}{4}=-k-2>0$ すなわち $k<-2$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\dfrac{D}{4}=-k-2=0$ すなわち $k=-2$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\dfrac{D}{4}=-k-2<0$ すなわち $k>-2$ のとき，共有点は 0 個

したがって,

$k<-2$ のとき, 共有点は 2 個
$k=-2$ のとき, 共有点は 1 個
$k>-2$ のとき, 共有点は 0 個

(2) $y=x^2+2x-2$, $y=-2x+k$ から y を消去すると,

$$x^2+2x-2=-2x+k$$
$$x^2+4x-2-k=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-2-k)=k+6$$

よって,

(i) $\dfrac{D}{4}=k+6>0$ すなわち $k>-6$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\dfrac{D}{4}=k+6=0$ すなわち $k=-6$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\dfrac{D}{4}=k+6<0$ すなわち $k<-6$ のとき，共有点は 0 個

したがって,

$k>-6$ のとき, 共有点は 2 個
$k=-6$ のとき, 共有点は 1 個
$k<-6$ のとき, 共有点は 0 個

(3) $y=x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$y=x-k$ から y を消去すると，

$$
\begin{aligned}
x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}&=x-k\\
x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}+k&=0\\
2x^2-5x+1+2k&=0
\end{aligned}
$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot(1+2k)=-16k+17$$

よって，

(i) $D=-16k+17>0$ すなわち $k<\dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $D=-16k+17=0$ すなわち $k=\dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $D=-16k+17<0$ すなわち $k>\dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 0 個

したがって，

$k<\dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 2 個

$k=\dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 1 個

$k>\dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 0 個

(4) $y=-6x^2+4x-2$，$y=6x+2k$ から y を消去すると，

$$
\begin{aligned}
-6x^2+4x-2&=6x+2k\\
6x^2+2x+2k+2&=0\\
3x^2+x+k+1&=0
\end{aligned}
$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=1^2-4\cdot3\cdot(k+1)=-12k-11$$

よって，

(i) $D=-12k-11>0$ すなわち $k<-\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $D=-12k-11=0$ すなわち $k=-\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $D=-12k-11<0$ すなわち $k>-\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 0 個

したがって，

$k<-\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 2 個

$k=-\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 1 個

$k>-\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 0 個

【3】(1) $y=-x^2+4x+2$, $y=2x+k$ から y を消去すると,

$$-x^2+4x+2=2x+k$$
$$x^2-2x+k-2=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k-2)=-k+3$$

2 次関数が直線と接するとき，$\dfrac{D}{4}=0$ となるから,

$$-k+3=0 \qquad \therefore\ k=3$$

よって，$k=3$ を $y=2x+k$ に代入すると,

$$y=2x+3$$

$y=2x+3$, $y=-x^2+4x+2$ から y を消去すると,

$$-x^2+4x+2=2x+3$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

これを $y=2x+3$ に代入すると，$y=5$

したがって，$\boldsymbol{k=3}$**，接点：(1，5)**

(2) $y=x^2-6x+5$, $y=-x+k$ から y を消去すると,

$$x^2-6x+5=-x+k$$
$$x^2-5x+5-k=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(5-k)=4k+5$$

2 次関数が直線と接するとき，$D=0$ となるから,

$$4k+5=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{5}{4}$$

よって，$k=-\dfrac{5}{4}$ を $y=-x+k$ に代入すると,

$$y=-x-\frac{5}{4}$$

$y=-x-\dfrac{5}{4}$, $y=x^2-6x+5$ から y を消去すると,

$$x^2-6x+5=-x-\frac{5}{4}$$
$$4x^2-24x+20=-4x-5$$
$$4x^2-20x+25=0$$
$$(2x-5)^2=0$$
$$x=\frac{5}{2}$$

これを $y=-x-\dfrac{5}{4}$ に代入すると，$y=-\dfrac{15}{4}$

したがって，$\boldsymbol{k=-\dfrac{5}{4}}$**，接点：**$\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{15}{4}\right)}$

(3) $y=x^2+2kx+2,\ y=4x-2$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2+2kx+2&=4x-2\\ x^2+(2k-4)x+4&=0\\ x^2+2(k-2)x+4&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\cdot 4=k^2-4k$$

2 次関数が直線と接するとき，$\dfrac{D}{4}=0$ となるから，

$$\begin{aligned} k^2-4k&=0\\ k(k-4)&=0\\ k&=0,\ 4 \end{aligned}$$

よって，$k=0$ を $y=x^2+2kx+2$ に代入すると，

$$y=x^2+2$$

$y=x^2+2,\ y=4x-2$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2+2&=4x-2\\ x^2-4x+4&=0\\ (x-2)^2&=0\\ x&=2 \end{aligned}$$

これを $y=4x-2$ に代入すると，$y=6$
また，$k=4$ を $y=x^2+2kx+2$ に代入すると，

$$y=x^2+8x+2$$

$y=x^2+8x+2,\ y=4x-2$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2+8x+2&=4x-2\\ x^2+4x+4&=0\\ (x+2)^2&=0\\ x&=-2 \end{aligned}$$

これを $y=4x-2$ に代入すると，$y=-10$
したがって，

$k=0$ のとき，接点：$(2,\ 6)$
$k=4$ のとき，接点：$(-2,\ -10)$

(4) $y=x^2+3x+2,\ y=kx+1$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2+3x+2&=kx+1\\ x^2+(3-k)x+1&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=(3-k)^2-4\cdot 1\cdot 1=k^2-6k+5$$

2 次関数が直線と接するとき，$D = 0$ となるから，

$$\begin{aligned} k^2 - 6k + 5 &= 0 \\ (k-1)(k-5) &= 0 \\ k &= 1,\ 5 \end{aligned}$$

よって，$k = 1$ を $y = kx + 1$ に代入すると，

$$y = x + 1$$

$y = x^2 + 3x + 2,\ y = x + 1$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x + 1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

これを $y = x + 1$ に代入すると，$y = 0$
また，$k = 5$ を $y = kx + 1$ に代入すると，

$$y = 5x + 1$$

$y = x^2 + 3x + 2,\ y = 5x + 1$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= 5x + 1 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

これを $y = 5x + 1$ に代入すると，$y = 6$
したがって，

$\boldsymbol{k = 1}$ のとき, 接点：$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$
$\boldsymbol{k = 5}$ のとき, 接点：$\boldsymbol{(1,\ 6)}$

【4】(1)

$$9x^2-9x+2>0$$
$$(3x-1)(3x-2)>0$$

より，$\boldsymbol{x<\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}<x}$

(2)

$$-x^2+4x+5<0$$
$$x^2-4x-5>0$$
$$(x+1)(x-5)>0$$

より，$\boldsymbol{x<-1,\ 5<x}$

(3)

$$4x^2+16x+15\leqq 0$$
$$(2x+3)(2x+5)\leqq 0$$

より，$\boldsymbol{-\frac{5}{2}\leqq x\leqq -\frac{3}{2}}$

(4)

$$x^2-4\sqrt{3}x+12<0$$
$$\left(x-2\sqrt{3}\right)^2<0$$

より，解なし

(5)

$$3x^2+2x-1>0$$
$$(3x-1)(x+1)>0$$

より，$\boldsymbol{x<-1,\ \frac{1}{3}<x}$

(6)

$$2x^2+x-15\leqq 0$$
$$(2x-5)(x+3)\leqq 0$$

より，$\boldsymbol{-3\leqq x\leqq \frac{5}{2}}$

(7)

$$-4x^2+4x-3<0$$
$$4x^2-4x+3>0$$
$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2>0$$

より，すべての数

(8)

$$9x^2-24x+16>0$$
$$(3x-4)^2>0$$

より，$\boldsymbol{x=\frac{4}{3}}$ を除くすべての数

(9)

$$x^2-5x+6<0$$
$$(x-2)(x-3)<0$$

より，$\boldsymbol{2<x<3}$

(10)

$$-x^2+10x-25\leqq 0$$
$$x^2-10x+25\geqq 0$$
$$(x-5)^2\geqq 0$$

より，すべての数

(11)

$$x^2-8x+16\geqq 0$$
$$(x-4)^2\geqq 0$$

より，すべての数

(12)

$$4x^2-4x+1\leqq 0$$
$$(2x-1)^2\leqq 0$$

より，$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$

【5】(1) $3x-2 \geqq 5x-6$ より，

$$-2x \geqq -4$$
$$x \leqq 2 \quad \cdots ①$$

$2x^2+5x-3>0$ より，

$$(2x-1)(x+3)>0$$
$$x<-3,\ \frac{1}{2}<x \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\boldsymbol{x<-3,\ \frac{1}{2}<x \leqq 2}$$

(2) $x^2-9x+14>0$ より，

$$(x-2)(x-7)>0$$
$$x<2,\ 7<x \quad \cdots ①$$

$x^2-6x+15 \leqq 0$ より，

$$x^2-6x+15 \leqq 0$$
$$(x-3)^2+6 \leqq 0$$

よって，解なし $\cdots$②

①，②より，**解なし**

(3) $2x^2-5x<0$ より，

$$x(2x-5)<0$$
$$0<x<\frac{5}{2} \quad \cdots ①$$

$2x^2-7x+5 \geqq 0$ より，

$$(2x-5)(x-1) \geqq 0$$
$$x \leqq 1,\ \frac{5}{2} \leqq x \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\boldsymbol{0<x \leqq 1}$$

(4) $2x^2+x-6 \leqq 0$ より，

$$(2x-3)(x+2) \leqq 0$$
$$-2 \leqq x \leqq \frac{3}{2} \quad \cdots ①$$

$3x^2-2x-1>0$ より，

$$(3x+1)(x-1)>0$$
$$x<-\frac{1}{3},\ 1<x \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\boldsymbol{-2 \leqq x<-\frac{1}{3},\ 1<x \leqq \frac{3}{2}}$$

(5) $2x^2+3x-2 \geqq 0$ より，

$$(2x-1)(x+2) \geqq 0$$
$$x \leqq -2,\ \frac{1}{2} \leqq x \ \cdots ①$$

$3x^2+5x-2 \leqq 0$ より，

$$(3x-1)(x+2) \leqq 0$$
$$-2 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \ \cdots ②$$

①，②より，$\boldsymbol{x=-2}$

(6) $5x^2+38x+21>0$ より，

$$(5x+3)(x+7)>0$$
$$x<-7,\ -\frac{3}{5}<x \ \cdots ①$$

$x^2-2x-11 \leqq 0$ より
$x^2-2x-11=0$ とすると，
解の公式より　　$x=1\pm 2\sqrt{3}$
よって，

$$1-2\sqrt{3} \leqq x \leqq 1+2\sqrt{3} \ \cdots ②$$

ここで，$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ より，

$$3<\sqrt{12}<4$$
$$\therefore\ -3<1-2\sqrt{3}<-2$$

であるから，①，②より，

$$\boldsymbol{-\frac{3}{5}<x \leqq 1+2\sqrt{3}}$$

【6】(1) $6x^2-x-1>0$ より

$$(3x+1)(2x-1)>0$$

よって

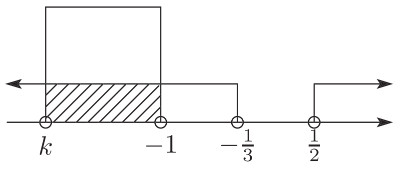
$$x<-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}<x \ \cdots ①$$

$x^2+(1-k)x-k<0$ より

$$(x-k)(x+1)<0$$

(i) $k<-1$ のとき

$$k<x<-1$$



これと①より，整数の共通解は
$-3,\ -2$ であればよいことが分かる．
したがって

$$-4 \leqq k<-3$$

(ii) $k=-1$ のとき

$$(x+1)^2<0$$

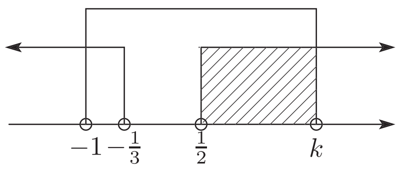
となり，解なし．
したがって，不適．

(iii) $k > -1$ のとき

$$-1 < x < k$$

これと①より，整数の共通解は
1, 2 であればよいことが分かる．
したがって

$$2 < k \leqq 3$$



以上より，

$$\boldsymbol{-4 \leqq k < -3,\ \ 2 < k \leqq 3}$$　　（答）

(2) $2x^2 + x - 3 > 0$ より

$$(2x+3)(x-1) > 0$$

よって，

$$x < -\frac{3}{2},\ 1 < x\ \cdots ①$$

$x^2 - (k-3)x - 2k + 2 < 0$ より

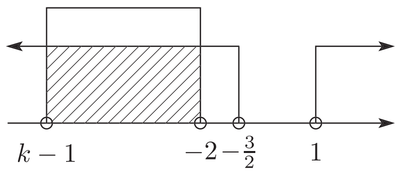
$$(x - k + 1)(x + 2) < 0$$

(i) $k - 1 < -2$，つまり $k < -1$ のとき

$$k - 1 < x < -2$$

これと ① から整数の共通解は
-3 であればよいことが分かる．
したがって

$$-4 \leqq k - 1 < -3$$
$$-3 \leqq k < -2$$



(ii) $k - 1 = -2$，つまり $k = -1$ のとき

$$(x+2)^2 < 0$$

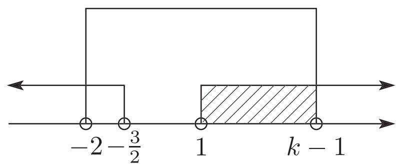
となり，解なし．
したがって，不適．

(iii) $-2 < k - 1$，つまり $k > -1$ のとき

$$-2 < x < k - 1$$

これと ① から整数の共通解は
2 であればよいことが分かる．
したがって

$$2 < k - 1 \leqq 3$$
$$3 < k \leqq 4$$



したがって，

$$\boldsymbol{-3 \leqq k < -2,\ 3 < k \leqq 4}$$　　（答）