問題

【1】(1)
$$\begin{cases} x^2 + x + k = 0 & \cdots ① \\ x^2 + 2x + k^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると，① が実数解をもつ条件は，

$$D_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot k \geqq 0$$
$$\therefore\ k \leqq \frac{1}{4} \quad \cdots ③$$

また，② の判別式を D_2 とすると，② が実数解をもつ条件は，

$$\frac{D_2}{4} = 1^2 - 1 \cdot k^2 \geqq 0$$
$$k^2 - 1 \leqq 0$$
$$(k+1)(k-1) \leqq 0$$
$$\therefore\ -1 \leqq k \leqq 1 \quad \cdots ④$$

① と② がどちらも実数解をもつような k の範囲は，③ かつ ④ であるので，

$$\boldsymbol{-1 \leqq k \leqq \frac{1}{4}}$$

(2)
$$\begin{cases} x^2 + 2ax - 3a + 10 = 0 & \cdots ① \\ 2x^2 - ax + a^2 - 7a = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると， ① が実数解をもたない条件は，

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \cdot (-3a + 10) < 0$$
$$a^2 + 3a - 10 < 0$$
$$(a+5)(a-2) < 0$$
$$\therefore\ -5 < a < 2 \quad \cdots ③$$

また， ② の判別式を D_2 とすると， ② が実数解をもたない条件は，

$$D_2 = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 7a) < 0$$
$$a^2 - 8a^2 + 56a < 0$$
$$-7a^2 + 56a < 0$$
$$a^2 - 8a > 0$$
$$a(a-8) > 0$$
$$\therefore\ a < 0,\ 8 < a \quad \cdots ④$$

① と ② がどちらも実数解をもたない a の範囲は ③ かつ ④ であるから，

$$\boldsymbol{-5 < a < 0}$$

(3)
$$\begin{cases} x^2-2ax+a+6=0 & \cdots ① \\ x^2+(a+2)x+\dfrac{1}{2}a^2+a-1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると， ① が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} = (-a)^2-(a+6) &> 0 \\ a^2-a-6 &> 0 \\ (a-3)(a+2) &> 0 \\ \therefore\ a<-2,\ 3<a & \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

また， ②より，$2x^2+2(a+2)x+a^2+2a-2=0\ \cdots ②'$
とし，②$'$ の判別式を D_2 とすると，② が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} = (a+2)^2-2\left(a^2+2a-2\right) &> 0 \\ a^2+4a+4-2a^2-4a+4 &> 0 \\ -a^2+8 &> 0 \\ a^2-8 &< 0 \\ (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2}) &< 0 \\ \therefore\ -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2} & \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

① と ② がそれぞれ異なる 2 つの実数解をもつような
a の範囲は ③ かつ ④ であるから,

$$\boldsymbol{-2\sqrt{2}<a<-2}$$

(4)
$$\begin{cases} x^2+ax+3-a=0 & \cdots ① \\ x^2+(3-a)x+a=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると， ① が実数解をもつ条件は,

$$\begin{aligned} D_1 = a^2-4\cdot 1\cdot(3-a) &\geqq 0 \\ a^2+4a-12 &\geqq 0 \\ (a+6)(a-2) &\geqq 0 \\ \therefore\ a\leqq -6,\quad 2\leqq a & \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

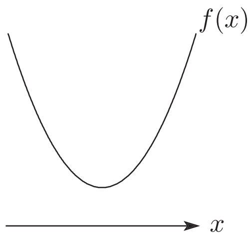
また， ② の判別式を D_2 とすると， ② が実数解をもつ条件は,

$$\begin{aligned} D_2 = (3-a)^2-4\cdot 1\cdot a &\geqq 0 \\ 9-6a+a^2-4a &\geqq 0 \\ a^2-10a+9 &\geqq 0 \\ (a-1)(a-9) &\geqq 0 \\ \therefore\ a\leqq 1,\quad 9\leqq a & \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

① と ② の少なくとも一方が解をもつような
a の範囲は ③ または ④ であるから,

$$\boldsymbol{a\leqq 1,\ 2\leqq a}$$

【2】(1) $x^2-4x+k>0$ が常に成り立つということは，$f(x)=x^2-4x+k$ のグラフが常に x 軸の上方にあるということである．このとき，$f(x)=x^2-4x+k$ のグラフは下に凸であるから，x 軸と共有点をもたない．



$x^2-4x+k=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$$

つまり $\frac{D}{4}<0$ となるような k の値の範囲を求めればよいので，

$$4-k<0$$
$$-k<-4$$
$$\therefore\ \boldsymbol{k>4}$$

＜別解＞

$$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2-4+k$$

より，最小値は，$-4+k$

これが x 軸の上方にあればよいから，

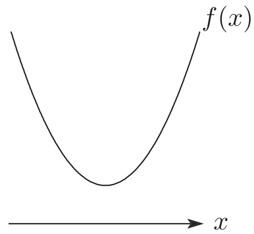
$$-4+k>0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{k>4}$$

(2)
$$(k-1)x^2+4(k-1)x+4>0 \quad \cdots(*)$$

$k=1$ のとき，$4>0$ となり，$(*)$ は，常に成り立つ．

$k\fallingdotseq 1$ のとき，$(*)$ が常に成り立つためには，

$f(x)=(k-1)x^2+4(k-1)x+4$ のグラフが常に x 軸の上方にあるということである．



すなわち，$f(x)$ が下に凸のグラフになり，かつ x 軸と共有点をもたなければよい．

$f(x)$ が下に凸のグラフになるとき，

$$k-1>0 \qquad \therefore\ k>1 \quad \cdots①$$

また，$(k-1)x^2+4(k-1)x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{2(k-1)\}^2-(k-1)\cdot 4\\&=4k^2-8k+4-4k+4\\&=4k^2-12k+8\end{aligned}$$

$\frac{D}{4}<0$ となるような k の値の範囲を求めればよいので，

$$4k^2-12k+8<0$$
$$k^2-3k+2<0$$
$$(k-1)(k-2)<0$$
$$\therefore\ 1<k<2 \quad \cdots②$$

①，② より，$1<k<2$

以上より，$\boldsymbol{1\leqq k<2}$

(3) $$f(x)=x^2-2kx+3k=(x-k)^2-k^2+3k$$

より，軸が $x=k$ だから， $1 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)=x^2-2kx+3k$ のグラフを用いて最小値を考えると

(i) $k<1$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2-2k\cdot 1+3k \\ &= 1+k \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} 1+k &> 0 \\ k &> -1 \end{aligned}$$

したがって，$-1<k<1$

(ii) $1 \leqq k < 3$ のとき，最小値は，

$$f(k)=-k^2+3k$$

これより，

$$\begin{aligned} -k^2+3k &> 0 \\ k^2-3k &< 0 \\ k(k-3) &< 0 \\ 0<k &< 3 \end{aligned}$$

したがって，$1 \leqq k < 3$

(iii) $k \geqq 3$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2-2k\cdot 3+3k \\ &= 9-6k+3k \\ &= 9-3k \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} 9-3k &> 0 \\ -3k &> -9 \\ k &< 3 \end{aligned}$$

しかし，$k \geqq 3$，$k<3$ を同時に満たす解はない．

以上より，$\boldsymbol{-1<k<3}$

(4) $$f(x)=x^2-2kx+2k+3=(x-k)^2-k^2+2k+3$$

より，軸が $x=k$ だから，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)=x^2-2kx+2k+3$ のグラフを用いて最小値を考えると

(i) $k<0$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2-2k\cdot 0+2k+3 \\ &= 2k+3 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} 2k+3 &> 0 \\ 2k &> -3 \\ k &> -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって，$-\dfrac{3}{2}<k<0$

(ii) $0 \leqq k < 4$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(k) &= k^2-2k\cdot k+2k+3 \\ &= -k^2+2k+3 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} -k^2+2k+3 &> 0 \\ k^2-2k-3 &< 0 \\ (k-3)(k+1) &< 0 \\ -1<k &< 3 \end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq k < 3$

(iii) $k \geqq 4$ のとき，最小値は

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2 - 2k \cdot 4 + 2k + 3 \\ &= 16 - 8k + 2k + 3 \\ &= -6k + 19 \end{aligned}$$

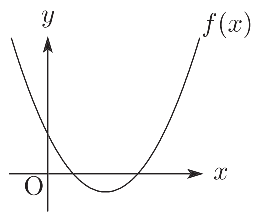
これより，

$$\begin{aligned} -6k + 19 &> 0 \\ -6k &> -19 \\ k &< \frac{19}{6} \end{aligned}$$

したがって，$k \geqq 4$, $k < \dfrac{19}{6}$ を同時に満たす解はない．

以上より，$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2} < k < 3}$

【3】(1) $$x^2 + kx + k + 2 = 0 \quad \cdots (*)$$



$f(x) = x^2 + kx + k + 2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + kx + k + 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k + 2 \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解がともに正の実数であるとき，求める条件は，

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標} < 0 & \cdots ① \\ \text{軸} > 0 & \cdots ② \\ f(0) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

である．① より，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}k^2 + k + 2 &< 0 \\ k^2 - 4k - 8 &> 0 \\ k < 2 - 2\sqrt{3},\ 2 + 2\sqrt{3} &< k \end{aligned}$$

② より，

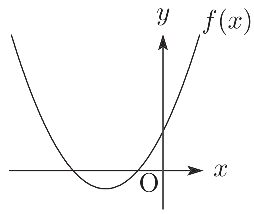
$$-\frac{1}{2}k > 0 \qquad \therefore\ k < 0$$

③ より，

$$k + 2 > 0 \qquad \therefore\ k > -2$$

以上より，$\boldsymbol{-2 < k < 2 - 2\sqrt{3}}$

(2) $$x^2-(k-10)x+k+14=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2-(k-10)x+k+14$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-(k-10)x+k+14\\&=\left\{x-\frac{k-10}{2}\right\}^2-\frac{(k-10)^2}{4}+k+14\\&=\left\{x-\frac{k-10}{2}\right\}^2-\frac{k^2}{4}+6k-11\end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解がともに負の実数であるとき，求める条件は，

$$\begin{cases}\text{頂点の } y \text{ 座標} < 0 & \cdots ① \\ \text{軸} < 0 & \cdots ② \\ f(0) > 0 & \cdots ③\end{cases}$$

である．① より，

$$\begin{aligned}-\frac{k^2}{4}+6k-11&<0\\k^2-24k+44&>0\\(k-2)(k-22)&>0\\k<2,\ 22&<k\end{aligned}$$

② より，

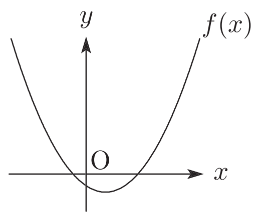
$$\frac{k-10}{2}<0 \qquad \therefore\ k<10$$

③ より，

$$k+14>0 \qquad \therefore\ k>-14$$

以上より，$\boldsymbol{-14<k<2}$

(3) $$x^2-kx+k^2-4=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2-kx+k^2-4$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-kx+k^2-4\\&=\left(x-\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{4}k^2+k^2-4\\&=\left(x-\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{3}{4}k^2-4\end{aligned}$$

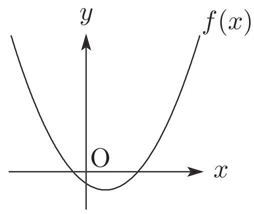
$(*)$ の 2 つの解が異符号であるとき，求める条件は，

$$\begin{cases}f(0)<0 \text{ ならば，頂点の } y \text{ 座標} < 0 \text{ はみたされる} & \cdots ① \\ \text{軸はどこでもよい} & \cdots ② \\ f(0)<0 & \cdots ③\end{cases}$$

すなわち $f(0)<0$ のみである．よって，

$$\begin{aligned}k^2-4&<0\\(k+2)(k-2)&<0\\\therefore\ \boldsymbol{-2<k}&\boldsymbol{<2}\end{aligned}$$

(4) $$x^2-(k+1)x+k^2-2k-2=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2-(k+1)x+k^2-2k-2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-(k+1)x+k^2-2k-2 \\ &=\left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{(k+1)^2}{4}+k^2-2k-2 \\ &=\left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k-\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解が異符号であるとき，求める条件は，

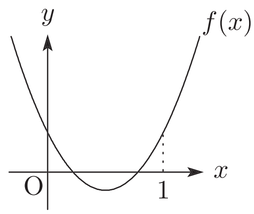
$$\begin{cases} f(0)<0 \text{ ならば，頂点の } y \text{ 座標} <0 \text{ はみたされる} & \cdots① \\ \text{軸はどこでもよい} & \cdots② \\ f(0)<0 & \cdots③ \end{cases}$$

すなわち $f(0)<0$ のみである．よって，

$$k^2-2k-2<0$$

$$\boldsymbol{1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}}$$

(5) $$4x^2-2kx+1=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=4x^2-2kx+1$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=4x^2-2kx+1 \\ &=4\left(x^2-\frac{1}{2}kx\right)+1 \\ &=4\left(x-\frac{1}{4}k\right)^2-\frac{1}{4}k^2+1 \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解がともに $0<x<1$ の範囲にあるとき，求める条件は，

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標} <0 & \cdots① \\ 0<\dfrac{1}{4}k<1 & \cdots② \\ f(0)>0,\ f(1)>0 & \cdots③ \end{cases}$$

である．① より，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}k^2+1&<0 \\ k^2-4&>0 \\ (k+2)(k-2)&>0 \\ k<-2,\ 2&<k \end{aligned}$$

② より，$0<\dfrac{1}{4}k<1$ $\qquad \therefore\ 0<k<4$

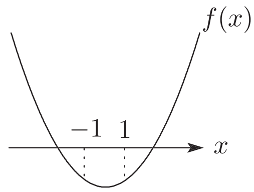
③ より，$f(0)=1>0$

また，

$$\begin{aligned} f(1)=4-2k+1&>0 \\ -2k+5&>0 \\ -2k&>-5 \qquad \therefore\ k<\frac{5}{2} \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{2<k<\dfrac{5}{2}}$

(6) $$x^2+(k^2-1)x+k-2=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2+(k^2-1)x+k-2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+(k^2-1)x+k-2\\ &=\left(x+\frac{k^2-1}{2}\right)^2-\frac{(k^2-1)^2}{4}+k-2 \end{aligned}$$

$(*)$ が 1 より大きい解と -1 より小さな解を 1 つずつもつとき，求める条件は，

$$f(1)<0 \text{ かつ } f(-1)<0$$

である．

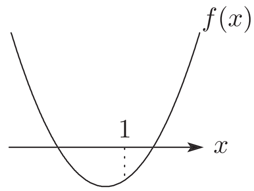
$$\begin{aligned} f(1)=1^2+(k^2-1)\cdot 1+k-2&<0\\ k^2+k-2&<0\\ (k+2)(k-1)&<0\\ -2<k&<1 \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} f(-1)=(-1)^2+(k^2-1)\cdot(-1)+k-2&<0\\ -k^2+k&<0\\ k^2-k&>0\\ k(k-1)&>0\\ k<0,\ 1&<k \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{-2<k<0}$

(7) $$x^2+2(k-1)x+k^2-3k-1=0 \ \cdots(*)$$



$f(x)=x^2+2(k-1)x+k^2-3k-1$ とおくと，

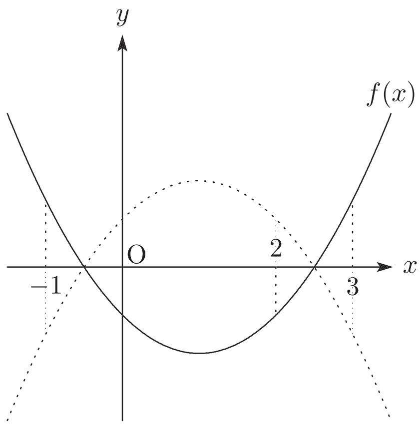
$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+2(k-1)x+k^2-3k-1\\ &=\{x+(k-1)\}^2-(k-1)^2+k^2-3k-1\\ &=\{x+(k-1)\}^2-k-2 \end{aligned}$$

$(*)$ の 1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さいとき，求める条件は，

$$\begin{aligned} f(1)&<0\\ k^2-k-2&<0\\ (k-2)(k+1)&<0\\ -1<k&<2 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{-1<k<2}$

【4】 $kx^2-(k+1)x-4=0 \cdots(*)$



$f(x)=kx^2-(k+1)x-4$ とおくと，$(*)$ の 1 つの解が -1 と 0 の間に，他の解が 2 と 3 の間にあるとき，求める条件は，

$$f(-1)\cdot f(0)<0 \quad \text{かつ} \quad f(2)\cdot f(3)<0$$

よって，

$$\begin{aligned}
f(-1)&=k\cdot(-1)^2-(k+1)\cdot(-1)-4\\
&=k+k+1-4\\
&=2k-3\\
f(0)&=k\cdot 0^2-(k+1)\cdot 0-4\\
&=-4\\
f(2)&=k\cdot 2^2-(k+1)\cdot 2-4\\
&=4k-2k-2-4\\
&=2k-6\\
f(3)&=k\cdot 3^2-(k+1)\cdot 3-4\\
&=9k-3k-3-4\\
&=6k-7
\end{aligned}$$

$f(-1)\cdot f(0)<0$ より，

$$\begin{aligned}
(2k-3)\cdot(-4)&<0\\
-8k&<-12\\
k&>\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$f(2)\cdot f(3)<0$ より，

$$\begin{aligned}
(2k-6)(6k-7)&<0\\
\frac{7}{6}<k&<3
\end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{\frac{3}{2}<k<3}$

添削課題

【1】 $f(x)=x^2-2(m+2)x+m^2-1$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-2(m+2)x+m^2-1 \\ &=\{x-(m+2)\}^2-4m-5 \end{aligned}$$

放物線 $y=f(x)$ の軸は，$x=m+2$

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2-1)=4m+5$$

また，

$$\begin{aligned} f(1)&=1-2(m+2)+m^2-1 \\ &=m^2-2m-4 \end{aligned}$$

(1) $f(x)=0$ の 2 解がともに 1 より大となるための条件は

$$\begin{cases} D \geqq 0 & \cdots ① \\ \text{軸} > 1 & \cdots ② \\ f(1) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より，$-\dfrac{5}{4} \leqq m$

②より，$-1 < m$

③より，$m < 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} < m$

①〜③をともにみたす m は，$\boldsymbol{1+\sqrt{5} < m}$

(2) $f(x)=0$ の 2 解がともに 1 より小さくなるための条件は

$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ \text{軸} < 1 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

すなわち

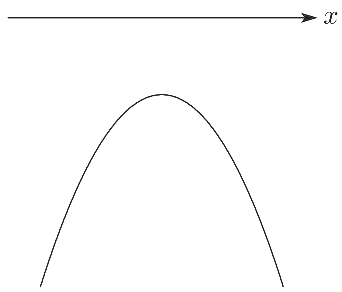
$$\begin{cases} -\dfrac{5}{4} \leqq m \\ m < -1 \\ m < 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} < m \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{5}{4} \leqq m < 1-\sqrt{5}}$

(3) $f(x)=0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつための条件は，$f(1)<0$

$\therefore\ \boldsymbol{1-\sqrt{5} < m < 1+\sqrt{5}}$

【2】(1) $f(x)=ax^2+2a(1-a)x+4a$ とおく.



(i) $a=0$ のとき
x の値にかかわらず $f(x)=0$ となり，不適.

(ii) $a \fallingdotseq 0$ のとき
$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになればよいから

$$\begin{cases} a<0 & \cdots(\text{ア}) \\ f(x)=0 \text{ の判別式 } D<0 & \cdots(\text{イ}) \end{cases}$$

(イ) より，

$$\frac{D}{4}=a^2(1-a)^2-4a^2<0$$

両辺を $a^2(>0)$ で割って，

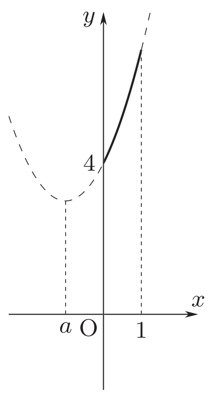
$$(1-a)^2-4<0$$
$$(a+1)(a-3)<0$$
$$\therefore\ -1<a<3$$

(ア)(イ) をともに満たす a は，$-1<a<0$

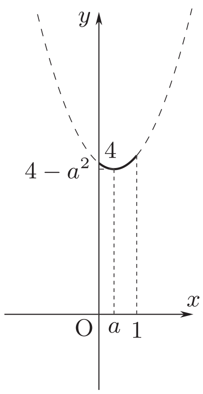
(i)(ii) より，$\boldsymbol{-1<a<0}$

(2) $f(x)=x^2-2ax+4$ とおく.
$f(x)=(x-a)^2+4-a^2$ だから，$y=f(x)$ は，軸が $x=a$ の放物線で，定点 $(0,\ 4)$ を通る.

(i) $a<0$ のとき，下の図のように $0<x<1$ で，常に $f(x)>0$ となる.

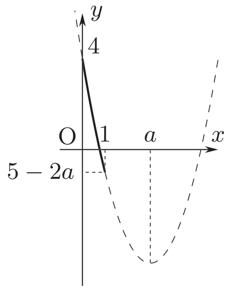


(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$4-a^2 \geqq 3>0$ だから，常に $f(x)>0$ となる.



(iii) $1<a$ のとき，$0<x<1$ で，常に $f(x)>0$ となるためには，$f(1) \geqq 0$ となればよいから，

$$1-2a+4 \geqq 0$$
$$\therefore\ 1<a \leqq \frac{5}{2}$$



(i)～(iii) より，$\boldsymbol{a \leqq \frac{5}{2}}$

【3】 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$ とおく.

題意をみたす条件は

$$\begin{cases} f(0)>0 \ \cdots ① \\ f(1)<0 \ \cdots ② \\ f(2)>0 \ \cdots ③ \end{cases}$$

①より,

$$k^2-k-2>0$$
$$(k+1)(k-2)>0$$
$$\therefore \quad k<-1,\ 2<k$$

②より,

$$7-k-13+k^2-k-2<0$$
$$k^2-2k-8<0$$
$$(k+2)(k-4)<0$$
$$\therefore \quad -2<k<4$$

③より,

$$28-2k-26+k^2-k-2>0$$
$$k^2-3k>0$$
$$k(k-3)>0$$
$$\therefore \quad k<0,\ 3<k$$

①〜③をともに満たす k は, $\boldsymbol{-2<k<-1,\ 3<k<4}$

７章　集合と論理（１）ー集合・命題と論証ー

問題

【1】(1) $\boldsymbol{P = \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots\}}$

$\boldsymbol{P = \{3x + 2 \mid x}$ **は整数,** $\boldsymbol{x \geqq 0\}}$

(2) $\boldsymbol{Q}$ **は書けない**

$\boldsymbol{Q = \{x \mid 3 \leqq x \leqq 5\}}$

(3) $\boldsymbol{R = \{-1,\ 3\}}$

$\boldsymbol{R = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}}$

【2】$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$, $C = \{2,\ 6,\ 10\}$,
$D = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$ より

(1) $\boldsymbol{A}$ **と** $\boldsymbol{B}$ **に包含関係はない**

(2) $\boldsymbol{C \subset B}$

(3) $\boldsymbol{C \subset D}$

(4) $\boldsymbol{B = D}$

【3】(1)
$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18\}$$
$$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

よって，$\boldsymbol{A \subset B}$

(2)
$$A = \{1,\ 2\}$$
$$B = \{1,\ 2,\ 4\}$$

よって，$\boldsymbol{A \subset B}$

(3)
$$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$$
$$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$$

よって，$\boldsymbol{A \supset B}$

【4】(1) $A \cap B = \boldsymbol{\{x \mid 6 < x < 8\}}$

(2) $A \cup B = \boldsymbol{\{x \mid x > 3\}}$

(3) $A \cap B \cap C = \boldsymbol{\{x \mid 6 < x < 7\}}$

(4) $A \cup B \cup C = \boldsymbol{\{x \mid x > 1\}}$

(5) $B \cup C = \{x \mid x > 1\}$ なので,

$A \cap (B \cup C) = \boldsymbol{\{x \mid 3 < x < 8\}}$

(6) $B \cap C = \{x \mid 6 < x < 7\}$ なので,

$A \cup (B \cap C) = \boldsymbol{\{x \mid 3 < x < 8\}}$

【5】(1) $A \cap B =$ **{ 男子生徒でバス通学者 }**

(2) $A \cup B =$ **{ 男子生徒かバス通学者 }**

(3) $\overline{A} =$ **{ 女子生徒 }**

(4) $\overline{B} =$ **{ 徒歩の通学者 }**

(5) $A \cap \overline{B}$

$=$ **{ 男子生徒で徒歩通学の生徒 }**

(6) $\overline{A} \cap B =$ **{ 女子生徒でバス通学者 }**

(7) $\overline{A} \cup B =$ **{ 女子生徒かバス通学者 }**

(8) $A \cup \overline{B}$

$=$ **{ 男子生徒か徒歩通学の生徒 }**

【6】(1) $\boldsymbol{A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}}$ (2) $\boldsymbol{A \cap B = \{1,\ 6\}}$

(3) $\overline{A} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$,
$\overline{B} = \{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$ より,

$$\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{B} = \{5,\ 7\}}$$

(4) $\boldsymbol{\overline{A} \cup \overline{B} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}}$

【7】(1)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{B}\right) &= n(U) - n(B) \\ &= 200 - 22 \\ &= \mathbf{178} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 33 + 22 - 44 \\ &= \mathbf{11} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) &= n\left(\overline{A \cap B}\right) \\ &= n(U) - n(A \cap B) \\ &= 200 - 11 \\ &= \mathbf{189} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= n\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 200 - 44 \\ &= \mathbf{156} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) &= n\left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}\right) \\ &= n\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 22 - 11 \\ &= \mathbf{11} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{\overline{A} \cap B}\right) &= n\left(\overline{\overline{A}} \cup \overline{B}\right) \\ &= n\left(A \cup \overline{B}\right) \\ &= n(U) - n(\overline{A} \cap B) \\ &= 200 - 11 \\ &= \mathbf{189} \end{aligned}$$

【8】(1) 問題 I が解けた人を A, 問題 II が解けた人を B, クラス全体を U とすると,

$$n(U) = 50,\ n(A) = 38,\ n(B) = 25,\ n(A \cap B) = 20$$

より,

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 38 + 25 - 20 \\ &= \mathbf{43\ (人)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A \cup B}\right) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 50 - 43 \\ &= \mathbf{7\ (人)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A} \cap B\right) + n(A \cap \overline{B}) &= n(B) - n(A \cap B) + n(A) - n(A \cap B) \\ &= 25 - 20 + 38 - 20 \\ &= \mathbf{23\ (人)} \end{aligned}$$

【9】(1) $50 \div 2 = 25$ より，$n(A) = \mathbf{25}$

$50 \div 3 = 16 \cdots 2$ より，$n(B) = \mathbf{16}$

$50 \div 5 = 10$ より，$n(C) = \mathbf{10}$

(2) $50 \div 6 = 8 \cdots 2$ より，$n(A \cap B) = \mathbf{8}$

$50 \div 15 = 3 \cdots 5$ より，$n(B \cap C) = \mathbf{3}$

$50 \div 10 = 5$ より，$n(C \cap A) = \mathbf{5}$

(3) $50 \div 30 = 1 \cdots 20$ より，$n(A \cap B \cap C) = \mathbf{1}$

(4)
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = {} & n(A) + n(B) + n(C) \\ & - n(B \cap C) - n(C \cap A) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

より，

$$n(A \cup B \cup C) = 25 + 16 + 10 - 3 - 5 - 8 + 1 = \mathbf{36}$$

【10】
$$\begin{aligned} & n(A) = 84,\ n(B) = 60,\ n(C) = 45,\ n(U) = 120 \\ & n(A \cap B) = 46,\ n(B \cap C) = 28,\ n(C \cap A) = 36 \\ & n(A \cap B \cap C) = 20 \end{aligned}$$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
より，

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= 84 + 60 + 45 - 46 - 28 - 36 + 20 \\ &= 209 - 110 \\ &= 99 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} n(U) - n(A \cup B \cup C) &= 120 - 99 \\ &= \mathbf{21\ (人)} \end{aligned}$$

【11】(1) **偽**

反例：$x = -2$

(2) **偽**

反例：$x = -3$

(3) **偽**

反例：$a = 1,\ b = 0$

(4) **偽**

反例：$n = 1$

(5) **偽**

反例：9

(6) **偽**

反例：$x = -4,\ y = 3$

【12】(1)　（ア）
【参考】
$x \leqq 1 \Rightarrow x < 1$ 偽，反例：$x = 1$
$x < 1 \Rightarrow x \leqq 1$ 真

(2)　（イ）
【参考】
$x > 2 \Rightarrow x^2 > 2x$ 真
$x^2 > 2x \Rightarrow x > 2$ 偽，反例：$x = -1$

(3)　（ア）
【参考】
$a \geqq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 0$ 偽，反例：$a = 1$
$\sqrt{a^2} = 0 \Rightarrow a \geqq 0$ 真

(4)　（エ）
【参考】
$x > 0 \Rightarrow x \fallingdotseq 5$ 偽，反例：$x = 5$
$x \fallingdotseq 5 \Rightarrow x > 0$ 偽，反例：$x = 0$

(5)　（ア）
【参考】
$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 偽，反例:$a = 2,\ b = 0$
$a = 0 \Rightarrow ab = 0$ 真

(6)　（エ）
【参考】
$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ 偽，反例：$x = 0$
$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2x$ 偽，反例：$x = -2$

(7)　（イ）
【参考】
$x > 1,\ y > 1 \Rightarrow x + y > 2,\ xy > 1$ 真
$x + y > 2,\ xy > 1 \Rightarrow x > 1, y > 1$ 偽，
反例：$x = 1.5,\ y = 1$

(8)　（ウ）
【参考】
$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3$ 真
$x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ 真

【13】(1) $\boldsymbol{xy \fallingdotseq 0}$ **または** $\boldsymbol{x + y \fallingdotseq 0}$
(2) $\boldsymbol{x \geqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y < 0}$
(3) $\boldsymbol{x \fallingdotseq 1}$ **かつ** $\boldsymbol{x \fallingdotseq -2}$
(4) $\boldsymbol{x \geqq 1}$ **かつ** $\boldsymbol{7 > x}$
(5) $\boldsymbol{x \leqq 1}$ **または** $\boldsymbol{x \geqq 6}$
(6) $\boldsymbol{x < -4}$ **または** $\boldsymbol{x > 2}$
(7) $\boldsymbol{x,\ y}$ **の少なくとも一方が無理数**
(8) **整数** $\boldsymbol{x,\ y}$ **について，** $\boldsymbol{x,\ y}$ **はともに奇数**

【14】(1) **ある** $\boldsymbol{x}$ **について** $\boldsymbol{x^2 < 0}$ **である**
(2) **すべての** $\boldsymbol{x}$ **について** $\boldsymbol{x \geqq -1}$ **である**
(3) **ある** $\boldsymbol{x}$ **に対して** $\boldsymbol{-x^2 + 4x - 6 \geqq 0}$ **である**
(4) **すべての** $\boldsymbol{x}$ **について** $\boldsymbol{x^2 + x + 1 > 0}$ **である**
(5) **すべての** $\boldsymbol{x}$ **について** $\boldsymbol{x - 1 \leqq 0}$ **を満たす**
(6) $\boldsymbol{x > 1}$ **を満たすある** $\boldsymbol{x}$ **に対して** $\boldsymbol{x^2 \leqq 1}$ **である**

【15】(1) （逆） $\boldsymbol{x^2 \neq 1}$ ならば，$\boldsymbol{x \neq 1}$　真

（裏） $\boldsymbol{x = 1}$ ならば，$\boldsymbol{x^2 = 1}$　真

（対偶） $\boldsymbol{x^2 = 1}$ ならば，$\boldsymbol{x = 1}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1}$

(2) （逆） $\boldsymbol{x + y < 2}$ ならば，$\boldsymbol{x < 1}$ または $\boldsymbol{y < 1}$　真

（裏） $\boldsymbol{x \geqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \geqq 1}$ ならば，$\boldsymbol{x + y \geqq 2}$　真

（対偶） $\boldsymbol{x + y \geqq 2}$ ならば，$\boldsymbol{x \geqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \geqq 1}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = 4,\ y = -1}$

(3) （逆） $\boldsymbol{x + y \geqq 3}$ ならば，$\boldsymbol{x \geqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \geqq 2}$　偽，反例 $\boldsymbol{x = 4,\ y = -1}$

（裏） $\boldsymbol{x < 1}$ または $\boldsymbol{y < 2}$ ならば，$\boldsymbol{x + y < 3}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1,\ y = 3}$

（対偶） $\boldsymbol{x + y < 3}$ ならば，$\boldsymbol{x < 1}$ または $\boldsymbol{y < 2}$　真

(4) （逆） $\boldsymbol{x^2 + x - 2 < 0}$ ならば，$\boldsymbol{0 < x < 1}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1}$

（裏） $\boldsymbol{x \leqq 0}$ または $\boldsymbol{1 \leqq x}$ ならば，$\boldsymbol{x^2 + x - 2 \geqq 0}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1}$

（対偶） $\boldsymbol{x^2 + x - 2 \geqq 0}$ ならば，$\boldsymbol{x \leqq 0}$ または $\boldsymbol{1 \leqq x}$　真

(5) （逆）$ab > 0$ ならば，$a,\ b$ がともに正　偽，反例：$a < 0,\ b < 0$

（裏）$a,\ b$ の少なくとも一方が 0 以下であるとき，$ab \leqq 0$　偽，
反例：$a = -1,\ b = -2$

（対偶）$ab \leqq 0$ ならば，$a,\ b$ の少なくとも一方が 0 以下　真

(6) （逆）ある数が 6 の倍数ならば，2 の倍数かつ 3 の倍数　真

（裏）ある数が 2 の倍数でない，もしくは 3 の倍数ではないならば，
6 の倍数ではない　真

（対偶）ある数が 6 の倍数ではないならば，2 の倍数ではない，
もしくは 3 の倍数ではない　真

【16】(1) $\boldsymbol{\phi,\ \{2\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{4,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 6\}}$

(2) $\boldsymbol{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}}$

(3) $\boldsymbol{\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 4\}}$
$\boldsymbol{\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}}$

(4) $A = \{x \mid x$ は 10 の約数 $\} = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ なので，
$\boldsymbol{\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{5\},\ \{10\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 5\},\ \{1,\ 10\},\ \{2,\ 5\},\ \{2,\ 10\}}$
$\boldsymbol{\{5,\ 10\},\ \{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 10\},\ \{2,\ 5,\ 10\},\ \{1,\ 5,\ 10\},\ \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}}$

【17】(1) $n \in B$ とすると

$$n = 14x = 7 \cdot 2x$$

x は整数だから，$2x$ も整数である．
よって

$$n \in A$$

したがって

$$B \subset A$$

(2) $n \in A$ とすると

$$n = 4x - 2 = 2(x-1)$$

x は整数だから，$x-1$ も整数である．
よって

$$n \in B$$

したがって

$$A \subset B$$

(3) $n \in A$ とすると

$$n = 6x = 6(x-1) + 6$$

x は整数だから $x-1$ も整数である．
よって

$$n \in B$$

したがって，$A \subset B$ である．
逆に，$n \in B$ とすると

$$n = 6x + 6 = 6(x+1)$$

x は整数だから，$x+1$ も整数である．
よって

$$n \in A$$

したがって，$B \subset A$ である．
ゆえに，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が
成り立つので

$$A = B$$

(4) $n \in A$ とすると

$$n = 5x + 1 = 5(x+1) - 4$$

x は整数だから，$x+1$ も整数である．
よって

$$n \in B$$

したがって，$A \subset B$.
逆に，$n \in B$ とすると

$$n = 5x - 4 = 5(x-1) + 1$$

x は整数だから，$x-1$ も整数である．
よって

$$n \in A$$

したがって，$B \subset A$.
ゆえに，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が
成り立つので

$$A = B$$

【18】

$$A=\{2,\ 3,\ a^2+a+3\}$$
$$B=\{2,\ 2a+3,\ a^2-3\}$$

$A\cap B=\{2,\ 5\}$ になるためには，$3\notin B$ の上で，

$$a^2+a+3=5\ \cdots ①$$

かつ

$$2a+3=5\quad もしくは\quad a^2-3=5\quad \cdots ②$$

①より

$$\begin{aligned} a^2+a+3&=5\\ a^2+a-2&=0\\ (a+2)(a-1)&=0\\ a&=-2,\ 1 \end{aligned}$$

②より

$$\begin{aligned} 2a+3&=5\\ 2a&=2\\ a&=1 \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} a^2-3&=5\\ a^2&=8\\ a&=\pm2\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって①，②をみたすのは

$$a=1$$

$a=1$ を代入して

$$A=\{2,\ 3,\ 5\}$$
$$B=\{2,\ 5,\ -2\}$$

なので

$$A\cup B=\mathbf{\{-2,\ 2,\ 3,\ 5\}}$$

【19】 $A=\left\{2,\ 4,\ 2a^2-3a+1\right\}$

$B=\left\{-4,\ a,\ 2a-1,\ a^2+2a\right\}$

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ になるためには

$$2a^2-3a+1=3\ \cdots①$$

かつ

$a,\ 2a-1,\ a^2+2a$ のどれかが $2,\ 3$ $\cdots$②

①より

$$\begin{aligned}2a^2-3a+1&=3\\2a^2-3a-2&=0\\(2a+1)(a-2)&=0\\a&=-\frac{1}{2},\ 2\end{aligned}$$

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$B=\left\{-4,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{3}{4}\right\}$$

これは，②に適していない．$a=2$ のとき

$$B=\{-4,\ 2,\ 3,\ 8\}$$

これは，②に適している．
よって，$a=2$．このとき

$$A=\{2,\ 4,\ 3\}$$
$$B=\{-4,\ 2,\ 3,\ 8\}$$

より

$$A\cup B=\boldsymbol{\{-4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\}}$$

M1JK

高 1 東大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	