M2T

本科 1 期 5 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 難関大数学

問題

【1】(1) $f(x)=x^4-9x^2+4x+12$ とおく．

$f(-1)=0,\ f(2)=0$ より，$f(x)$ は $(x+1)(x-2)$ を因数にもつ．よって，

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)(x^2+x-6) = (x+1)(x-2)(x+3)(x-2) \\ &= (x+1)(x+3)(x-2)^2 \end{aligned}$$

$\therefore\quad x=-3,\ -1,\ 2$　　(答)

(2) $f(x)=2x^3+3x^2+7x+3$ とおく．

(1) と同様に，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ より，

$$f(x)=(2x+1)(x^2+x+3)$$

$\therefore\quad x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$　　(答)

【2】条件より

$$f(x) = x^3 - (a+2)x + 2(a-2)$$

とおくと

$$f(2) = 8 - 2(a+2) + 2(a-2) = 0$$

となるので，因数定理より

$$\begin{aligned} & x^3 - (a+2)x + 2(a-2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)\left\{x^2 + 2x - (a-2)\right\} = 0 \end{aligned}$$

このとき，題意をみたすためには

(i)　$x^2 + 2x - (a-2) = 0$ が $x = 2$ を解にもつ
(ii)　$x^2 + 2x - (a-2) = 0$ が重解をもつ

のいずれかであればよいので

(i) のとき
$g(x) = x^2 + 2x - (a-2)$ とおくと，因数定理より

$$g(2) = 4 + 4 - (a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 10$$

(ii) のとき
$x^2 + 2x - (a-2) = 0$ の判別式を D とすると

$$D/4 = 1 + (a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

よって，(i)，(ii) より

$a = 1,\ 10$　　(答)

【3】(1) $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$, $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ である．

問題の条件からそれぞれの割り算の商を $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ とおくと

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)-x+10 \\ \qquad\;\, =(x-2)(x-3)Q_2(x)+2x+1 \end{cases}$$

である．これより，$f(1)=9$, $f(2)=5$ を得る．

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$$

とおく．これより

$$\begin{cases} a+b=9 \\ 2a+b=5 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-4,\ b=13$$

よって，求める余りは

$$-4x+13 \qquad (\text{答})$$

(2) $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q_4(x)+px^2+qx+r$
とおく．$f(1)=9$, $f(2)=5$, $f(3)=7$ であるから

$$\begin{cases} p+q+r=9 \\ 4p+2q+r=5 \\ 9p+3q+r=7 \end{cases} \qquad \therefore \quad p=3,\ q=-13,\ r=19$$

よって，求める余りは

$$3x^2-13x+19 \qquad (\text{答})$$

(3) (2) より

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q_4(x)+3x^2-13x+19$$

これが題意をみたす $f(x)$ の形である．
$Q_4(x)=0$ なら最高次の係数は 3 で不適．
$Q_4(x)=1$ なら最高次の係数は 1 で題意に適す．
よって，求める $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)(x-2)(x-3)+3x^2-13x+19 \\ &=x^3-3x^2-2x+13 \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

【4】整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，$x+2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，条件より

$$\begin{cases} P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+(4x-5) \\ P(x)=(x+2)Q_2(x)-4 \end{cases}$$

となるので

$$\begin{cases} P(1)=-1 & \cdots ① \\ P(-2)=-4 & \cdots ② \end{cases}$$

(1) 剰余の定理を用いると，①より

$$P(1)=-1 \qquad (答)$$

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったとき商を $Q_3(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_3(x)+(ax+b)$$

となるので，①，② より

$$\begin{cases} P(1)=a+b=-1 \\ P(-2)=-2a+b=-4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

よって，求める余りは

$$x-2 \qquad (答)$$

(3) $Q_1(x)$ を $x+2$ で割ったときの商を $Q_4(x)$，余りを a とおくと

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)^2\{(x+2)Q_4(x)+a\}+(4x-5) \\ &=(x-1)^2(x+2)Q_4(x)+\left\{a(x-1)^2+(4x-5)\right\} \end{aligned}$$

となるので，②より

$$P(-2)=9a-13=-4 \quad \Leftrightarrow \quad a=1$$

よって，求める余りは

$$(x-1)^2+(4x-5)=x^2+2x-4 \qquad (答)$$

【5】(1) 剰余の定理より

$$\begin{cases} P(1)=9 \\ P(-1)=1 \\ P(-2)=3 \end{cases} \quad \cdots ①$$

一方, 商を $Q(x)$, 余りを ax^2+bx+c とおくと

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

と書ける. $x=1,\ -1,\ -2$ を代入すると

$$\begin{cases} P(1)=a+b+c \\ P(-1)=a-b+c \\ P(-2)=4a-2b+c \end{cases} \quad \cdots ②$$

①, ②より

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ a-b+c=1 \\ 4a-2b+c=3 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=2,\ b=4,\ c=3$$

よって, 余りは

$2x^2+4x+3$　　(答)

(2) $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ とおくと, $f(-1)=0$ だから, $f(x)$ は $x+1$ という因数をもつので

$$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$$　　(答)

(3) $x^3+2y^3-3xy^2$ を x の関数とみて, $P(x)$ とおくと

$$P(y)=y^3+2y^3-3y\cdot y^2=0$$

だから, $P(x)$ は $x-y$ という因数をもつので

$$P(x)=(x-y)(x^2+xy-2y^2)=(x-y)^2(x+2y)$$　　(答)

【6】$P(x)$ は 3 次の係数が 1 の 3 次式なので, $(x+1)^2$ で割った商は 1 次の係数が 1 の 1 次式であり

$$P(x)=(x+1)^2(x+a) \quad \cdots ①$$

と書ける. このとき, $P(x)$ を $x-1$ で割った余りは

$$P(1)=4(1+a)$$

であり, これが x^2+x-2 で割った余りにも一致するから, $Q(x)$ を整式として

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+x-2)Q(x)+4(1+a) \\ &= (x+2)(x-1)Q(x)+4(1+a) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

と書ける. すると, ①, ②よりそれぞれ

$$P(-2)=-2+a, \quad P(-2)=4(1+a)$$

を得るから

$$-2+a=4(1+a) \qquad \therefore \quad a=-2$$

となり

$$P(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$$

次に, $A=x-1$ とおけば

$$P(x)=(A+2)^2(A-1)=A^3+3A^2-4$$

なので

$$\begin{aligned} \{P(x)\}^2 &= \{A^2(A+3)-4\}^2 \\ &= A^4(A+3)^2-8A^2(A+3)+16 \\ &= A^2\{A^2(A+3)^2-8(A+3)\}+16 \end{aligned}$$

したがって, $\{P(x)\}^2$ を $(x-1)^2$ すなわち A^2 で割った余りは 16 である. (答)

５章　複素数と方程式

問題

【1】条件より

$$
\begin{aligned}
& (1+i)x^2+(a-i)x+2(1-ai)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2+ax+2)+(x^2-x-2a)i=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x^2+ax+2=0 & \cdots① \\ x^2-x-2a=0 & \cdots② \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで，②より

$$a=\frac{1}{2}(x^2-x) \qquad \cdots②'$$

となるので，①に代入すると

$$
\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{2}x(x^2-x)+2=0 \quad & \Leftrightarrow \quad x^3+x^2+4=0 \\
& \Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2-x+2)=0 \\
& \Leftrightarrow \quad x=-2,\ \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}
\end{aligned}
$$

となり，x は実数だから

$x=-2$　　(答)

このとき，②$'$ より

$a=3$　　(答)

【2】解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$　　(答)

次に

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot(-1)=6$　　(答)

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot(-1)\cdot 2=14$　　(答)

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=6^2-2\cdot(-1)^2=34$　　(答)

【3】 $1+i$ が方程式の1つの解であることから

$$2(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)-6=0 \quad \cdots①$$

ここで

$$\begin{aligned}&(1+i)^2=2i\\&(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=2i-2\end{aligned}$$

であるから，①は

$$\begin{aligned}&2(2i-2)+2ai+b(1+i)-6=0\\&\therefore\quad (b-10)+(2a+b+4)i=0\end{aligned}$$

$b-10,\ 2a+b+4$ はともに実数だから

$$\begin{cases} b-10=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=-7,\ b=10 \qquad \text{(答)}$$

このとき，与えられた方程式は

$$2x^3-7x^2+10x-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x-3)(x^2-2x+2)=0 \quad \cdots②$$

よって

$$x=\frac{3}{2},\ 1\pm i$$

ゆえに，残りの解は $\dfrac{3}{2}$ と $1-i$ である．　(答)

【4】 (1) ω は $x^3=1$ の虚数解より

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

条件より，ω は $x^2+x+1=0$ をみたすので

$$\omega^2+\omega+1=0 \qquad \text{(答)}$$

(2) ω は $x^3=1$ をみたすので

$$\omega^3=1$$

よって

$$\begin{aligned}\omega^{30}+\omega^{20}+\omega^{10}&=(\omega^3)^{10}+(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega\\&=1+\omega^2+\omega\\&=0 \quad (\because\ (1)) \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) 与式を変形すると

$$\begin{aligned}&1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\cdots+\omega^{100}\\=&(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{96}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{99}(1+\omega)\\=&1+\omega \quad (\because\ (1),\ \omega^3=1)\\=&1+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\\=&\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 & \cdots① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 & \cdots② \\ \alpha\beta\gamma=1 & \cdots③ \end{cases}$$

(1) ①, ②より

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= 0-2\times 3=-6 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) ①より

$$\alpha+\beta=-\gamma, \quad \beta+\gamma=-\alpha, \quad \gamma+\alpha=-\beta$$

であるから, ③を用いると

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= (-\gamma)(-\alpha)(-\beta) \\ &= -\alpha\beta\gamma=-1 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 因数分解の公式より

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

①, ②, ③を用いると

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma \\ &= 0\times(-6-3)+3\times 1=3 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 解の定義から

$$\alpha^3+3\alpha-1=0 \qquad \therefore \quad \alpha^3=-3\alpha+1$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha^5 = \alpha^3\cdot\alpha^2 &= (-3\alpha+1)\cdot\alpha^2 \\ &= -3\alpha^3+\alpha^2 \\ &= -3(-3\alpha+1)+\alpha^2 \\ &= \alpha^2+9\alpha-3 \end{aligned}$$

β, γ についても同様になるから

$$\begin{aligned} \alpha^5+\beta^5+\gamma^5 &= (\alpha^2+9\alpha-3)+(\beta^2+9\beta-3)+(\gamma^2+9\gamma-3) \\ &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+9(\alpha+\beta+\gamma)-9 \\ &= -6+9\times 0-9=-15 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(注)　(3) もこの方法が有効である.

【6】解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \quad \alpha\beta\gamma=-1$$

ここで

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=3$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=0$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

よって, 求める方程式は

$$x^3-3x^2+1=0 \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1)　$(\text{左辺}) = a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) - (a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2)\\ &= a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2\end{aligned}$$

よって，(左辺) = (右辺) となり，与式は成立する．　〔証明終〕

(2) $b = 1 - a$ だから

$$(\text{左辺}) = a^2 + (1-a)^2 + 1 = 2(a^2 - a + 1)$$
$$(\text{右辺}) = 2\{a + (1-a) - a(1-a)\} = 2(a^2 - a + 1)$$

よって，(左辺) = (右辺) となり，与式は成立する．　〔証明終〕

＜別解＞

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (a+b)^2 - 2ab + 1\\ &= 1^2 - 2ab + 1 \quad (\because\ a+b=1)\\ &= 2(1-ab)\\ (\text{右辺}) &= 2(1-ab) \quad (\because\ a+b=1)\end{aligned}$$

(3) $c = -(a+b)$ だから

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) + b\left(-\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a}\right) - (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\\ &= \frac{a}{b} - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a} - 1 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 1\\ &= -\frac{a+b}{a+b} - 2\\ &= -3\end{aligned}$$

よって，(左辺) = (右辺) となり，与式は成立する．　〔証明終〕

＜別解＞

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}\\ &= \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a}\\ &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a}\\ &= -3\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

【2】$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=k$ とおくと

$$a=k(b+c),\quad b=k(c+a),\quad c=k(a+b)$$

これらの式の辺々を加えると

$$a+b+c=k(b+c)+k(c+a)+k(a+b)=2k(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\quad (a+b+c)(2k-1)=0\quad \cdots ①$$

ここで，$a+b+c=0$ のとき

$$k=\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-a}=-1$$

$a+b+c\fallingdotseq 0$ のとき

$$2k-1=0\qquad \therefore\quad k=\frac{1}{2}$$

よって

-1　または　$\dfrac{1}{2}$　　(答)

【3】(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= 2(ac+bd)-(ac+ad+bc+bd)\\
&= ac+bd-ad-bc\\
&= a(c-d)-b(c-d)\\
&= (a-b)(c-d) \geqq 0 \quad (\because\ a-b \leqq 0,\ c-d \leqq 0)
\end{aligned}
$$

よって，$(a+b)(c+d) \leqq 2(ac+bd)$ である．

等号成立は，$a=b$，$c=d$ のとき．　〔証明終〕

(2) $a>b>0$ より，$(a-b)^2>0$，$a+b>0$ であるから

$$
\begin{aligned}
(a^3+b^3)-ab(a+b) &= (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\\
&= (a+b)(a^2-2ab+b^2)\\
&= (a+b)(a-b)^2>0
\end{aligned}
$$

よって，$a^3+b^3>ab(a+b)$　〔証明終〕

(3) $a>b>0$ より，$\sqrt{ab}>0$ だから

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= (a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)\\
&= 2\sqrt{ab}-2b\\
&= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})
\end{aligned}
$$

ここで，$a>b>0$ より

$$\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$$

よって，$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ となり，$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ である．

ここで，$\sqrt{a-b}>0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ だから

$$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$$　〔証明終〕

【4】(1) $|a|<1$, $|b|<1$ より，$a-1<0$, $b-1<0$ だから

$$\begin{aligned}(ab+1)-(a+b) &= ab-a-b+1\\ &= a(b-1)-(b-1)\\ &= (a-1)(b-1)>0\end{aligned}$$

よって，$ab+1>a+b$　〔証明終〕

(2) $|ab|<1$ だから，(1) より

$$\begin{aligned}abc+2 &= \{(ab)c+1\}+1\\ &> (ab+c)+1\\ &= (ab+1)+c\\ &> a+b+c\end{aligned}$$

よって，$abc+2>a+b+c$　〔証明終〕

【5】(1)

$$b > 0, \quad x + a > 0 \quad \cdots ①$$

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \left(x + \frac{b^2}{x+a}\right) - (2b - a)$$

①より，相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}(x+a) + \frac{b^2}{x+a} &\geqq 2\sqrt{(x+a)\cdot\frac{b^2}{x+a}} \\ &= 2b \\ \therefore \quad (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &\geqq 2b - 2b = 0\end{aligned}$$

等号成立は

$$\begin{aligned}x + a &= \frac{b^2}{x+a} \\ (x+a)^2 &= b^2 \\ x + a &= b \quad (\because ①) \\ \therefore \quad x &= b - a \text{ のとき}\end{aligned}$$

よって，与式は成立し，$x = b - a$ のときに等号が成り立つ．　〔証明終〕

(2) 与式の左辺を変形して

$$(\text{左辺}) = \left(x + \frac{4}{x+1}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

ここで，(1) において $a = 1$, $b = 2$ のとき

$$x + \frac{4}{x+1} \geqq 4 - 1 = 3$$

また，相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}y + \frac{1}{y} &\geqq 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} = 2 \\ \therefore \quad (\text{左辺}) &\geqq 3 \cdot 2 = 6\end{aligned}$$

等号成立は

$$\begin{aligned}x = 2 - 1 = 1 \quad &\text{かつ} \quad y = \frac{1}{y} \\ \text{つまり} \quad x = 1, \ \ &y = 1 \text{ のとき}\end{aligned}$$

よって，与式は成立し，$x = y = 1$ のときに等号が成り立つ．　〔証明終〕

添削課題

【1】(1) $x+\dfrac{16}{x} \geqq 2\sqrt{x\times\dfrac{16}{x}}=2\sqrt{16}=8$

ゆえに，$x+\dfrac{16}{x} \geqq 8$ だから，求める最小値は，8 ($x=4$ のとき)　　(答)

(2) $$x+\frac{16}{x+2}=(x+2)+\frac{16}{x+2}-2$$
$$\geqq 2\sqrt{(x+2)\times\frac{16}{x+2}}-2$$
$$=2\sqrt{16}-2$$
$$=8-2=6$$

ゆえに，求める最小値は，6 ($x=2$ のとき)　　(答)

(3) $x>0$，$x^2+16>0$ より，(1) を用いると

$$\frac{x}{x^2+16}=\frac{1}{\dfrac{x^2+16}{x}}=\frac{1}{x+\dfrac{16}{x}} \leqq \frac{1}{8}$$

ゆえに，$\dfrac{x}{x^2+16} \leqq \dfrac{1}{8}$ だから，求める最大値は，$\dfrac{1}{8}$ ($x=4$ のとき)　　(答)

7章　3角比と平面図形

問題

【1】(1) 条件より

$$A = 180^\circ - (15^\circ + 120^\circ) = 45^\circ$$

となるので，正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \quad c = \frac{2}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

このとき，余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$6 = 4 + b^2 - 4b \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 + 2b - 2 = 0$$

$$\therefore \quad b = -1 \pm \sqrt{3}$$

となり，$b > 0$ より

$$b = -1 + \sqrt{3}$$

したがって

$$A = 45^\circ,\ b = -1 + \sqrt{3},\ c = \sqrt{6} \qquad \text{(答)}$$

(2) 正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore \quad a = 2R\sin A = 2\sqrt{2}\sin 120^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

また

$$\frac{b}{\sin B} = 2R$$

$$\sin B = \frac{b}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad B = 30^\circ \quad (\because\ A = 120^\circ)$$

これより

$$C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

このとき，△ABC は $b = c$ の 2 等辺 3 角形となるので

$$c = \sqrt{2}$$

したがって

$$B = 30^\circ,\ C = 30^\circ,\ a = \sqrt{6},\ c = \sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

(3) 正弦定理より

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad B = 30^\circ \quad (\because\ A = 60^\circ)$$

これより

$$C = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

このとき，正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore \quad c = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2$$

したがって

$$B = 30^\circ,\ C = 90^\circ,\ c = 2$$ (答)

【2】正弦定理　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$　より

$$\sin A:\sin B:\sin C=\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=4:5:6$$

となるので，$\mathrm{BC}=4k$，$\mathrm{CA}=5k$，$\mathrm{AB}=6k$ $(k>0)$ とすると，余弦定理より

$$\begin{aligned}
\cos A &= \frac{36k^2+25k^2-16k^2}{2\cdot 6k\cdot 5k} \\
&= \frac{3}{4} \\
\cos B &= \frac{36k^2+16k^2-25k^2}{2\cdot 6k\cdot 4k} \\
&= \frac{9}{16} \\
\cos C &= \frac{16k^2+25k^2-36k^2}{2\cdot 4k\cdot 5k} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

これより

$$\cos A:\cos B:\cos C=12:9:2$$

であるから

$$\begin{aligned}
\tan A:\tan B:\tan C &= \frac{\sin A}{\cos A}:\frac{\sin B}{\cos B}:\frac{\sin C}{\cos C} \\
&= \frac{4}{12}:\frac{5}{9}:\frac{6}{2} \\
&= 3:5:27 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【3】(1) 余弦定理より，$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ だから

$$\begin{aligned} & a = 2b\cos C \\ \Leftrightarrow\quad & a - 2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 - (a^2+b^2-c^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & b^2 = c^2 \qquad \therefore\quad b = c \end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の 2 等辺 3 角形である．　　(答)

(2) 正弦定理より

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\ \Leftrightarrow\quad & \sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R} \end{aligned}$$

これらを $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ に代入して

$$a^2 = b^2 + c^2$$

よって，$A = 90^\circ$ の直角 3 角形である．　　(答)

(3) 余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

となるので，これと与式を比較して

$$-2bc\cos A = bc \qquad \therefore\quad \cos A = -\frac{1}{2}$$

よって，$A = 120^\circ$ の 3 角形である．　　(答)

【4】(1) 条件より

$$\angle \mathrm{BCD} = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ \times 2) = 120^\circ$$

となるので，$\triangle$BCD において，余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 120^\circ = 19$$

$$\therefore \quad \mathrm{BD} = \sqrt{19} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{CDA} = 90^\circ$$

だから

「4 角形 ABCD は，円に内接している」

このとき

「AC は, $\triangle$BCD の外接円の直径」

となるので，正弦定理より

$$\mathrm{AC} = \frac{\sqrt{19}}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{57}}{3} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

「$\triangle$ABC, $\triangle$ACD は，ともに直角 3 角形」

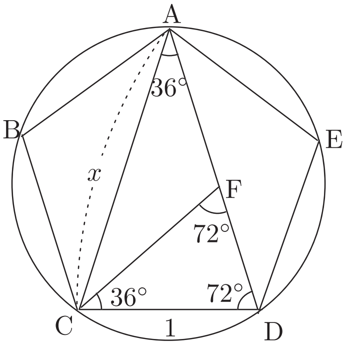
だから

$$\begin{cases} \mathrm{AB} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{57}}{3}\right)^2 - 2^2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \\ \mathrm{AD} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{57}}{3}\right)^2 - 3^2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

となるので

$$\begin{aligned} (4\text{ 角形 ABCD}) &= \triangle \mathrm{ABC} + \triangle \mathrm{ACD} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{37\sqrt{3}}{6} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【5】(1) 右図の 3 角形 ACD において，AC $= x$ とする．



$\angle$FCD $= 36^\circ$ をみたすように，辺 AD 上の点 F をとる．

$$\triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{CDF}, \quad \mathrm{CD} = \mathrm{CF} = \mathrm{AF} = 1$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{AC} : \mathrm{CD} &= \mathrm{CD} : \mathrm{DF} \\ x : 1 &= 1 : (x-1) \end{aligned}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ より

$$\mathrm{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 辺 AC の中点を M とする．

$$\mathrm{FM}^2 = \mathrm{AF}^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\therefore \quad \mathrm{FM} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

これより

$$\sin 36^\circ = \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{AF}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{(答)}$$

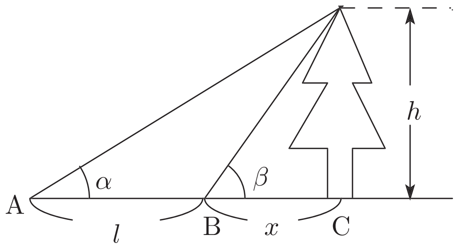
(3) 正 5 角形の外接円の半径を R とすると，$\triangle$ACD において，正弦定理より

$$\frac{1}{\sin 36^\circ} = 2R \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 木の根元を C とし，$\mathrm{BC}=x$ とすると

$$\tan\beta=\frac{h}{x}\qquad\therefore\quad x=\frac{h}{\tan\beta}$$
$$\tan\alpha=\frac{h}{x+l}\qquad\therefore\quad x=\frac{h}{\tan\alpha}-l$$

この 2 式から x を消去すると



$$\frac{h}{\tan\beta}=\frac{h}{\tan\alpha}-l$$
$$h\left(\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha}\right)=-l$$
$$h\left(\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\beta\tan\alpha}\right)=-l$$
$$\therefore\quad h=l\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}\right)\qquad\text{(答)}$$

(2) 上の式に $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $l=4$ を代入して

$$\begin{aligned}h&=4\left(\frac{\tan45^\circ\tan60^\circ}{\tan60^\circ-\tan45^\circ}\right)\\&=4\times\frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\\&=\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}\\&=2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\\&=6+2\sqrt{3}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

M2T
高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	