M2JC

本科 1 期 5 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 東大理系数学Ⅲ

問題

【1】(1)　(i)

$$\begin{aligned}\{cf(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= cf'(x)\end{aligned}$$

〔証明終〕

(ii)

$$\begin{aligned}\{f(x)+g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

〔証明終〕

(2)　(i)

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n}{h} \qquad (\because \text{二項定理})\\ &= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^{n-1})\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

〔証明終〕

(ii)

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \qquad (\because \text{和}\to\text{積への変形})\\ &= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\\ &= (-1)\sin x\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

〔証明終〕

【2】 (1)

$$\begin{aligned} y' &= (4x^3+1)'(2x^2+1) + (4x^3+1)(2x^2+1)' \\ &= 12x^2(2x^2+1) + (4x^3+1)4x \\ &= 40x^4 + 12x^2 + 4x \end{aligned}$$

(2)

$$y' = \frac{(x^2+2x-1)'}{2\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

(3)

$$\begin{aligned} y' &= 2\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}\right)' \\ &= 2\cos\frac{x}{2}\cdot\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)' \\ &= -\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$y' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}$$

(5)

$$y' = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x\log x}$$

【3】(1)　$y^2-3xy+x^2=5$ の両辺を x で微分して

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}-3\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)+2x=0$$
$$(2y-3x)\frac{dy}{dx}=3y-2x$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3y-2x}{2y-3x}$$

(2)　$y=e^{-x}\sin x$ のとき

$$\begin{aligned}y'&=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(-\sin x+\cos x)\\ y''&=-e^{-x}(-\sin x+\cos x)+e^{-x}(-\cos x-\sin x)\\ &=e^{-x}(-2\cos x)\end{aligned}$$

より

$$y''+ay'+by=0\quad(a,\ b:\text{定数})$$

とおくと

$$e^{-x}(-2\cos x)+ae^{-x}(-\sin x+\cos x)+be^{-x}\sin x=0$$

$e^{-x}>0$ より

$$(-a+b)\sin x+(a-2)\cos x=0\quad\cdots\cdots①$$

① が任意の x で成り立つので

$x=0$ として，$a-2=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ として，$-a+b=0$

したがって

$$a=b=2$$

逆に，$a=b=2$ のとき，① は任意の x で成立する．

以上から，

$$(a,\ b)=(2,\ 2)$$

【4】与えられた $f(x) = x^3 - \left|x^2 - 1\right| + 2$ の形から右側微分係数と左側微分係数に分けて計算する．

まず，右側微分係数を求めると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+0}\frac{\left\{x^3-(x^2-1)+2\right\}-3}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1+0} x^2\\ &= 1 \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

次に，左側微分係数を求めると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1-0}\frac{\left\{x^3+(x^2-1)+2\right\}-3}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1-0}(x^2+2x+2)\\ &= 5 \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって，① と ② の値が一致しないので，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ は存在しない．

すなわち，$f(x)$ は $x=1$ において微分可能ではない．

【5】$h(x)=f(x)g(x)$ のとき

$$h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す.

(I) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\ (\text{右辺}) &= \sum_{k=0}^{1} {}_1\mathrm{C}_k f^{(1-k)}(x)g^{(k)}(x)\\ &= {}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)+{}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

より ① が成立する.

(II) $n=l$ (l は 1 以上の整数) のとき成り立つとすると

$$h^{(l)}(x)=\sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

このとき

$$\begin{aligned}&h^{(l+1)}(x)\\ &= \left\{h^{(l)}(x)\right\}'\\ &= \left\{\sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x)\right\}'\\ &= \sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k \left(\left\{f^{(l-k)}(x)\right\}' g^{(k)}(x)+f^{(l-k)}(x)\left\{g^{(k)}(x)\right\}'\right)\\ &= \sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k \left\{f^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(l-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right\}\\ &= {}_l\mathrm{C}_0 f^{(l+1)}(x)g^{(0)}(x)+{}_l\mathrm{C}_1 f^{(l)}(x)g^{(1)}(x)+\cdots+{}_l\mathrm{C}_l f^{(1)}(x)g^{(l)}(x)\\ &\qquad +{}_l\mathrm{C}_0 f^{(l)}(x)g^{(1)}(x)+{}_l\mathrm{C}_1 f^{(l-1)}(x)g^{(2)}(x)+\cdots+{}_l\mathrm{C}_l f^{(0)}(x)g^{(l+1)}(x)\\ &= {}_l\mathrm{C}_0 f^{(l+1)}(x)g^{(0)}(x)+({}_l\mathrm{C}_1+{}_l\mathrm{C}_0)f^{(l)}(x)g^{(1)}(x)+({}_l\mathrm{C}_2+{}_l\mathrm{C}_1)f^{(l-1)}(x)g^{(2)}(x)\\ &\qquad +\cdots+({}_l\mathrm{C}_l+{}_l\mathrm{C}_{l-1})f^{(1)}(x)g^{(l)}(x)+{}_l\mathrm{C}_l f^{(0)}(x)g^{(l+1)}(x)\end{aligned}$$

ここで, ${}_l\mathrm{C}_0={}_{l+1}\mathrm{C}_0$, ${}_l\mathrm{C}_l={}_{l+1}\mathrm{C}_{l+1}$, ${}_l\mathrm{C}_k+{}_l\mathrm{C}_{k-1}={}_{l+1}\mathrm{C}_k$ に注意すると

$$h^{(l+1)}(x)=\sum_{k=0}^{l+1} {}_{l+1}\mathrm{C}_k f^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

よって, $n=k+1$ で成立する.

以上, (I)(II) から ① が示された. 〔証明終〕

添削課題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(5-4x)'(2x+3)-(5-4x)(2x+3)'}{(2x+3)^2}\\
&= \frac{-4(2x+3)-(5-4x)\cdot 2}{(2x+3)^2}\\
&= \frac{-22}{(2x+3)^2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin^2 x)'\cos^3 x+\sin^2 x(\cos^3 x)'\\
&= 2\sin x\cos x\cdot\cos^3 x+\sin^2 x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)\\
&= \sin x\cos^2 x(5\cos^2 x-3)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
y' &= \tan^2 x(\tan x)'-\frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}\\
&= \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
y' &= (x)'\log x+x(\log x)'-1\\
&= \log x+x\cdot\frac{1}{x}-1\\
&= \log x
\end{aligned}
$$

(5)　$y=(\sqrt{x})^x$　$(x>0)$ の対数をとって

$$\log y=\log(\sqrt{x})^x=x\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}x\log x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}(\log x+1)$$

よって

$$y'=\frac{y}{2}(\log x+1)=\frac{(\sqrt{x})^x}{2}(\log x+1)$$

問題

【1】(1)　(i) $y' = 3x^2 - 1$ より，曲線上の点 $(0,\ 0)$ における接線は

$$y = -x$$

また，$(0,\ 0)$ における法線は

$$y = x$$

(ii) $y' = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ より，曲線上の点 $(1,\ e^{-1})$ における接線は

$$y = 0 \cdot (x-1) + e^{-1} \qquad \therefore \quad y = e^{-1}$$

また，$(1,\ e^{-1})$ における法線は y 軸に平行となり

$$x = 1$$

(iii) $y' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = -\tan x$ より，曲線上の点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \log\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線は

$$y = (-1)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \log\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad y = -x + \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，曲線上の点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \log\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における法線は

$$y = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \log\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad y = x - \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2) 接点の x 座標を t とおくと，$x = t$ において $y = x$ と $y = a^x$ は接するので

$$t = a^t \quad \cdots ①$$

また，$x = t$ における $y = a^x$ の接線の傾きが $y = x$ の傾きに一致するので

$$a^t \log a = 1 \quad \cdots ②$$

①，② より

$$t \log a = 1 \qquad \cdots ③$$

①，③ より

$$\log t = \log a^t = t \log a = 1 \qquad \therefore \quad t = e \quad \cdots ④$$

よって，③，④ より

$$\log a = \frac{1}{e} = \log e^{\frac{1}{e}} \qquad \therefore \quad a = e^{\frac{1}{e}}$$

また，このときの接点の座標は

$$(e,\ e)$$

【2】(1) $y=8x^3-12x^2+3$ より $y'=24x^2-24x=24x(x-1)$ であり，増減表は下のようになる．

x		0		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって

$$\begin{cases} \text{極大値 } 3 & (x=0 \text{ のとき}) \\ \text{極小値 } -1 & (x=1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= |x|(x^2-x-1) \\ &= \begin{cases} x^3-x^2-x & (x \geqq 0) \\ -(x^3-x^2-x) & (x<0) \end{cases} \end{aligned}$$

より

$$y'=\begin{cases} 3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1) & (x>0) \\ -(3x^2-2x-1)=-(3x+1)(x-1) & (x<0) \end{cases}$$

増減表は下のようになる．

x		$-\frac{1}{3}$		0		1	
y'	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって

$$\begin{cases} \text{極大値 } 0 & (x=0) \\ \text{極小値} \begin{cases} -\dfrac{5}{27} & \left(x=-\dfrac{1}{3}\right) \\ -1 & (x=1) \end{cases} \end{cases}$$

≪注≫

$x=0$ において，y' は存在しない (グラフが尖っている) が極値になることに注意すること．

(3) $y=\dfrac{-3x+7}{x^2-2x+2}$ より

$$y'=\frac{-3(x^2-2x+2)-(-3x+7)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{(3x-2)(x-4)}{(x^2-2x+2)^2}$$

増減表は下のようになる．

x		$\frac{2}{3}$		4	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって

$$\begin{cases} \text{極大値 } \dfrac{9}{2} & \left(x=\dfrac{2}{3}\right) \\ \text{極小値 } -\dfrac{1}{2} & (x=4) \end{cases}$$

(4) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ より，

$$\begin{aligned} y' &= \cos x+\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x \\ &= \cos 2x+\cos x \\ &= 2\cos^2 x+\cos x-1 \\ &= (2\cos x-1)(\cos x+1) \end{aligned}$$

ここで $1+\cos x \geqq 0$ より，y' の符号が変化するのは

$$2\cos x-1=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos x=\frac{1}{2}$$

のときで，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減表は下のようになる．

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5}{3}\pi$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって

$$\begin{cases} \text{極大値 } \dfrac{3\sqrt{3}}{4} & \left(x=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right) \\ \text{極小値 } -\dfrac{3\sqrt{3}}{4} & \left(x=\dfrac{5\pi}{3}+2n\pi\right) \end{cases} \quad (n=0, \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

(5) $y=e^{\frac{1}{x}}$ より，$y'=e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}<0$ である．

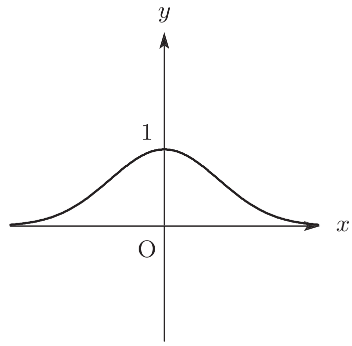
よって，y は単調減少なので，極値はなし．

【3】(1) $y=e^{-x^2}$ は偶関数より，グラフは y 軸対称なので $x \geqq 0$ において調べる．

$y'=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2} \leqq 0$ より $x \geqq 0$ において単調減少し

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

以上から，右図のようになる．



(2) $y=\dfrac{\log x}{x}$ の定義域は $x>0$ である．

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

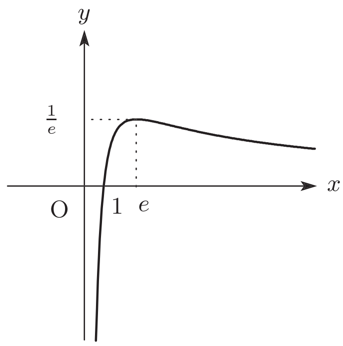
$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}-t\log t=-\infty$$

より，増減表は次のようになる．

x	0		e		∞
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

以上から，右図のようになる．



(3) $y^2=x^2(x+1) \geqq 0$ より，$x+1 \geqq 0$ つまり $x \geqq -1$ である．このもとで

$$y^2=x^2(x+1) \quad \Longleftrightarrow \quad y=\pm x\sqrt{x+1}$$

よって，$y=x\sqrt{x+1}$ $(x \geqq -1)$ と $y=-x\sqrt{x+1}$ $(x \geqq -1)$ のグラフをあわせたものを描けばよい．2 つのグラフは x 軸対称である．

$y=x\sqrt{x+1}$ において

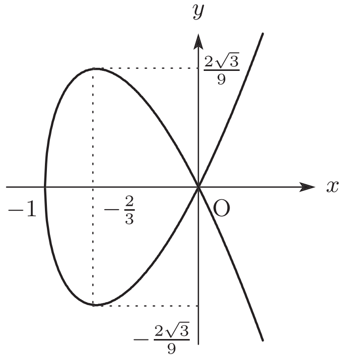
$$y'=\sqrt{x+1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x\sqrt{x+1}=\infty$$

より，増減表は次のようになる．

x	-1		$-\frac{2}{3}$		∞
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	∞

以上から，右図のようになる．



【4】(1) $f(x)=e^x-ax$ から，$f'(x)=e^x-a=0$ となるのは，$a>0$ より，$x=\log a$ のときであるから，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(\log a)=a-a\log a$

よって

$$\begin{cases} \text{極大値 なし} \\ \text{極小値 } a(1-\log a) \quad (x=\log a\text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) $g(x)=e^x-\dfrac{a}{2}x^2$ から，$g'(x)=e^x-ax$ である．

$g(x)$ が極値をもつ条件は，$g'(x)=0$ となる x があって，その前後で $g'(x)$ の符号が変わることである．

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ax)=\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-ax)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-a\cdot\frac{x}{e^x}\right)=\infty \quad \left(\because\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\right)$$

(1) から，$g'(x)$ の最小値は $f(x)$ の最小値に等しく，$a(1-\log a)$ であるから，求める条件は

$$a(1-\log a)<0$$

$a>0$ から

$$\log a>1 \qquad \therefore\quad a>e$$

≪別解≫ $g'(x)=e^x-ax=0$ となる x について考える．$g'(0)\fallingdotseq 0$ より

$$\frac{e^x}{x}=a \quad (\text{ただし}, x\fallingdotseq 0)$$

となる x について考えればよいことになる．

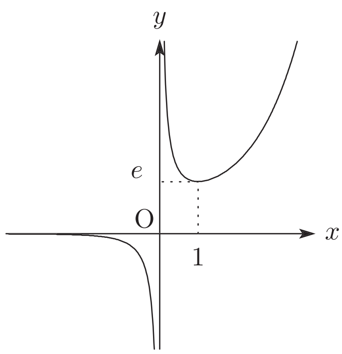
$$h(x)=\frac{e^x}{x} \quad (\text{ただし}, x\fallingdotseq 0)$$

とすると

$$h'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

であるから，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	/	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	/	$\searrow$	e	$\nearrow$



よって，$y=h(x)$ の概形は右図のようになり，求める条件は

$y=h(x)$ と $y=a$ とが異なる 2 点で交わる a の値の範囲

であり，$a>0$ であるから

$$a>e$$

【5】(1) $y' = \dfrac{1}{x}$ より，$\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}(b,\ \log b)$ における $C : y = \log x$ の法線はそれぞれ

$$y = -a(x-a) + \log a = -ax + a^2 + \log a$$
$$y = -b(x-b) + \log b = -bx + b^2 + \log b$$

よって，2 式を連立して

$$(b-a)x = b^2 - a^2 + \log b - \log a$$

$a \fallingdotseq b$ より

$$x = b + a + \frac{\log b - \log a}{b-a}$$

これが P の x 座標であり，y 座標は

$$y = -a\left(b + a + \frac{\log b - \log a}{b-a}\right) + a^2 + \log a = -ab + \frac{b\log a - a\log b}{b-a}$$

ここで，導関数の定義から

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{b\to a}\frac{\log b - \log a}{b-a} = (\log x)'|_{x=a} = \frac{1}{a} \\ \displaystyle\lim_{b\to a}\frac{b\log a - a\log b}{b-a} = \lim_{b\to a}\left\{\log a - a\cdot\frac{\log b - \log a}{b-a}\right\} = \log a - a\cdot\frac{1}{a} = \log a - 1 \end{cases}$$

であるから，Q の座標は

$$\left(2a + \frac{1}{a},\ -a^2 + \log a - 1\right)$$

(2)

$$l^2 = \mathrm{AQ}^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2+1\right)^2 = \frac{1}{a^2}(a^2+1)^2 + (a^2+1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{a^2} + 1\right)(a^2+1)^2 = \frac{(a^2+1)^3}{a^2}$$

より

$$l = \frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{a} \quad (a > 0)$$

(3) $l^2 = \dfrac{(a^2+1)^3}{a^2}$ を最小にする a の値を求めればよい．

$a^2 = t(>0)$ とし，$f(t) = \dfrac{(t+1)^3}{t}$ を考えると

$$f'(t) = \frac{3(t+1)^2\cdot t - (t+1)^3\cdot 1}{t^2} = \frac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}$$

より

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$t = \dfrac{1}{2}$ で $f(t)$ は最小となるから，求める a の値は

$$a^2 = \frac{1}{2},\ a > 0 \qquad \therefore\quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

添削課題

【1】(1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ は奇関数よりグラフは原点対称なので $x \geqq 0$ において調べる.

$$y'=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$$

より, 増減表は次のようになる.

x	0		1		∞
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

以上から, 図 1 のようになる.

(2) $y=e^{-x}\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ より

$$y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5}{4}\pi$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\dfrac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0

以上から, 図 2 のようになる.

図 1

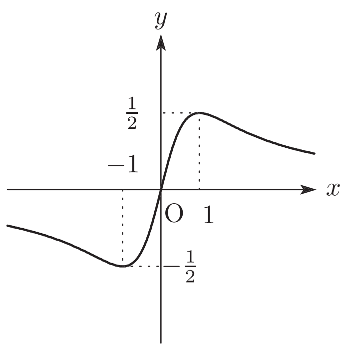
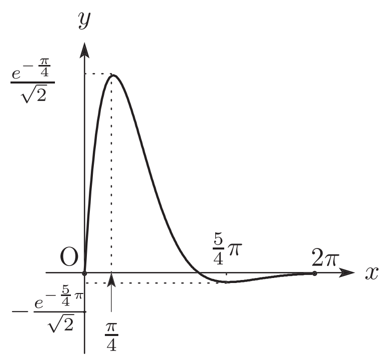


図 2



６章　微分法（３）

問題

【1】(1) $y=x^3+3x^2+5$ より

$$y'=3x^2+6x,\quad y''=6x+6=6(x+1)$$

よって，凹凸表は

x		-1	
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

$\therefore$　変曲点 $(-1,\ 7)$

(2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ より

$$y'=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

よって，凹凸表は

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

となり，

$$\text{変曲点}\ \left(\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ (\text{複号同順}),\quad (0,\ 0)$$

(3) $y=e^{-x^2}$ より

$$y'=-2xe^{-x^2},\quad y''=-2\left\{e^{-x^2}+x\cdot\left(-2xe^{-x^2}\right)\right\}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

よって，凹凸表は

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\therefore$　変曲点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

(4) $y=e^{-x}\sin x$ より

$$y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=(\cos x-\sin x)e^{-x}$$

$$\begin{aligned}y''&=(-\sin x-\cos x)e^{-x}+(\cos x-\sin x)\left(-e^{-x}\right)\\&=-2e^{-x}\cos x\end{aligned}$$

ここで $2e^{-x}>0$ より y'' の符号は $-\cos x$ の符号に一致する．

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ においては

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

となり，3 角関数の周期性を考えて $y=e^{-x}\sin x$ の凹凸は

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}+2n\pi < x < \frac{\pi}{2}+2n\pi & \Longrightarrow \quad \text{上に凸} \\ \frac{\pi}{2}+2n\pi < x < \frac{3}{2}\pi+2n\pi & \Longrightarrow \quad \text{下に凸} \end{cases} \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

また変曲点は

$$\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right),\quad \left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi,\ -e^{-\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)}\right)$$

(5) $y=x^x\ (x>0)$ の対数をとって

$$\log y = x\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\log x + x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$
$$\therefore\quad y'=y(\log x+1)=x^x(\log x+1)$$

さらに x で微分して

$$\begin{aligned} y'' &= y'(\log x+1)+y\cdot\frac{1}{x} \\ &= x^x(\log x+1)^2+x^x\cdot\frac{1}{x} \\ &= x^x\left\{(\log x+1)^2+\frac{1}{x}\right\} \end{aligned}$$

よって，$x>0$ において $y''>0$ よりつねに下に凸．変曲点はなし．

【2】(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$ より

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+0} y = +\infty, \quad \lim_{x\to-0} y = -\infty \end{cases}$$

よって，求める漸近線は $y = x$，$x = 0$ (y 軸) である.

(2) $y = \dfrac{5x^3 - x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1} = 5x - 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$ より

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{y - (5x-1)\} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2+1} = 0$$

また，x をある定数に限りなく近づけて y が発散することはないので，y 軸に平行な漸近線は存在しない.

よって，求める漸近線は $y = 5x - 1$ である.

(3) $y = x + \sqrt{x}$ ($x \geqq 0$) は (2) と同様に考えて y 軸に平行な漸近線をもたない．次に直線 $y = ax + b$ (a, b : 定数) を漸近線にもつとすると

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(y - x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty$$

これは b が定数であることに矛盾．以上から $y = x + \sqrt{x}$ は漸近線をもたない.

(4) $y = \dfrac{\log x}{x}$ ($x > 0$) より

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+0} y = -\infty \end{cases}$$

よって，求める漸近線は　$y = 0$ (x 軸)，$x = 0$ (y 軸) である.

(5) $y = \sqrt[3]{2x^3 - x + 4}$ は (2) と同様にして，y 軸に平行な漸近線をもたない.

次に直線 $y = ax + b$ (a, b : 定数) を漸近線にもつとすると

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3-x+4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(y - \sqrt[3]{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3-x+4} - \sqrt[3]{2}x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x^3-x+4) - 2x^3}{\left(\sqrt[3]{2x^3-x+4}\right)^2 + \sqrt[3]{2x^3-x+4}\cdot\sqrt[3]{2}x + \left(\sqrt[3]{2}x\right)^2} \\ &\qquad (\because\ (A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3 \text{ の利用}) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}\cdot\sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上から，求める漸近線は $y = \sqrt[3]{2}x$ である.

【3】(1) $y=xe^{-x}$ より

$$y'=e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$$
$$y''=(-1)e^{-x}+(1-x)\left(-e^{-x}\right)=(x-2)e^{-x}$$

なので，増減凹凸表は

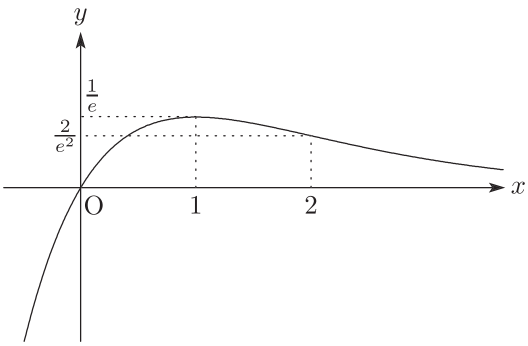
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↘

$\therefore$　極大値 $\dfrac{1}{e}$ $(x=1)$，　変曲点 $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

また

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}y=-\infty$$

以上から



(2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $(x\fallingdotseq\pm1)$ より

$$y'=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$
$$y''=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2-x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

なので

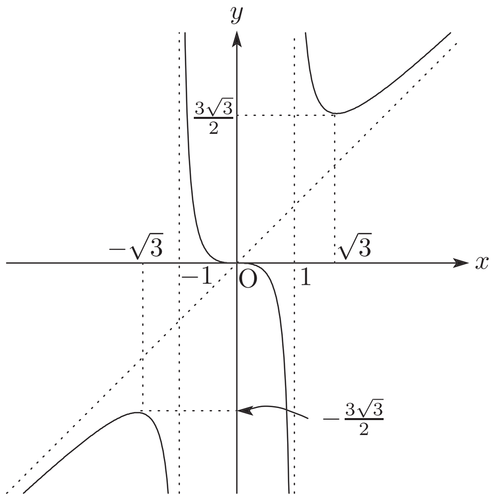
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗		↘	$\times$	↘		↘	$\times$	↘		↗

$\therefore$　極大値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=-\sqrt{3})$，　極小値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=\sqrt{3})$，　変曲点 $(0,\ 0)$

また

$$\lim_{x\to\infty}y=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}y=-\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-0}y=-\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}y=\infty,$$
$$\lim_{x\to1-0}y=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}y=\infty$$

以上から



(3) $y = e^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$ より

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \cdot x^2 - e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x}{x^4} = \frac{(1+2x)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

なので

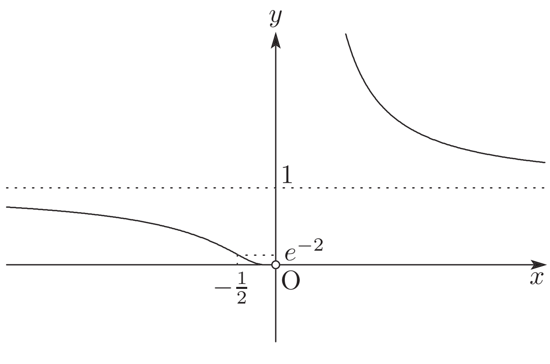
x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
y	↘		↘		↘

$\therefore$ 変曲点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{e^2}\right)$

また

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = 1, \quad \lim_{x\to-0} y = 0, \quad \lim_{x\to+0} y = \infty$$

以上から



【4】$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \fallingdotseq 0)$ より

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d, \quad y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

ここで 4 次曲線が変曲点をもたないとは y'' が符号変化をしないことである．y'' が x の 2 次関数であることに注意して，その条件は，2 次方程式

$$y'' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6ax^2 + 3bx + c = 0$$

の判別式 D について，$D \leqq 0$ となることである．

よって，求める必要十分条件は

$$(3b)^2 - 4 \cdot 6a \cdot c \leqq 0 \qquad\qquad \therefore \quad 3b^2 - 8ac \leqq 0$$

【5】(1) $f(x) = x + \cos x - (\cos x)\log(1+\sin x)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \sin x - (-\sin x)\log(1+\sin x) - (\cos x)\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x} \\ &= 1 - \sin x + \sin x\log(1+\sin x) - \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} \\ &= 1 - \sin x + \sin x\log(1+\sin x) - (1-\sin x) \\ &= \sin x\log(1+\sin x) \\ f''(x) &= \cos x\log(1+\sin x) + \sin x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x} \\ &= \cos x\left\{\log(1+\sin x) + \frac{\sin x}{1+\sin x}\right\} \end{aligned}$$

(2) $0 < x < \pi$ において，$\log(1+\sin x) > 0$，$\dfrac{\sin x}{1+\sin x} > 0$ より

$$f''(x) = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$$

であり，この前後で $f''(x)$ は正から負へ符号変化する．よって

$$変曲点 \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

また

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\ =&\frac{\pi}{2} - x + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\log\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} + x + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\log\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\} \\ =&\frac{\pi}{2} - x + \sin x - \sin x\log(1+\cos x) + \frac{\pi}{2} + x - \sin x + \sin x\log(1+\cos x) \\ =&\pi \end{aligned}$$

より，すべての x に対して

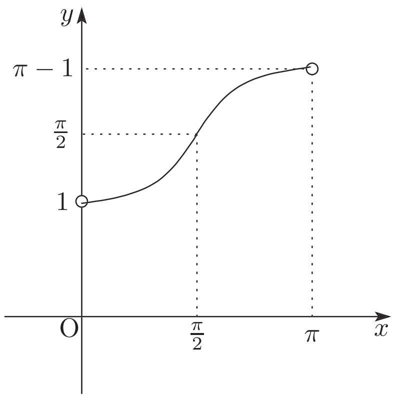
$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

が成立する．よって，$y = f(x)$ は変曲点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に関して点対称である．

(3) (1)，(2) より

x	(0)		$\frac{\pi}{2}$		(π)
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(1)	⤴	$\frac{\pi}{2}$	⤴	$(\pi-1)$

よって，(2) の対称性と合わせると右図のようになる．



添削課題

【1】(1) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ より

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot x\sqrt{x}-(x-1)\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^3}=\frac{3-x}{4x^2\sqrt{x}}$$

なので

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$\times$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$\times$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\times$	↘		↗		↗

よって

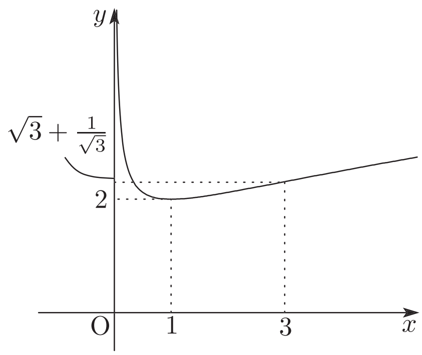
極小値 $2\ (x=1)$

変曲点 $\left(3,\ \sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

また

$$\lim_{x\to\infty}y=\infty,\quad \lim_{x\to+0}y=\infty$$

以上より，グラフは右図のようになる.



(2)

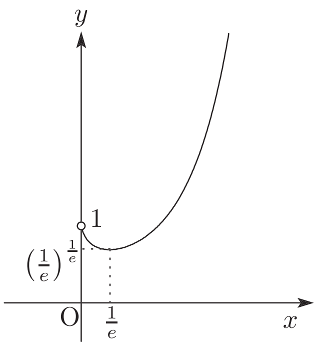
$$y'=x^x(\log x+1),\quad y''=x^x\left\{(\log x+1)^2+\frac{1}{x}\right\}$$

より

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y		↘		↗

極小値 $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ $\left(x=\dfrac{1}{e}\right)$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}x\log x=0$ から $\displaystyle\lim_{x\to+0}y=1$ である.
以上から



問題

【1】

(1) $f(x)=\sqrt{x}\quad(x>0)$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad(\text{答})$$

(2) $f(x)=e^x$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x\qquad(\text{答})$$

【2】

(1)
$$y'=(x^2)'\sqrt{1-x}+x^2\left(\sqrt{1-x}\right)'=2x\sqrt{1-x}+x^2\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$
$$=\frac{x(4-5x)}{2\sqrt{1-x}}\qquad(\text{答})$$

(2)
$$y'=\frac{(x)'\sqrt{2x+1}-x(\sqrt{2x+1})'}{(\sqrt{2x+1})^2}=\frac{\sqrt{2x+1}-x\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$
$$=\frac{x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}\qquad(\text{答})$$

(3)
$$y'=-\frac{(1+x^6)'}{(1+x^6)^2}=-\frac{6x^5}{(1+x^6)^2}\qquad(\text{答})$$

(4)
$$y'=(\tan^3x)'\sin^2x+\tan^3x(\sin^2x)'$$
$$=3\tan^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}\cdot\sin^2x+\tan^3x\cdot 2\sin x\cos x$$
$$=3\tan^4x+\tan^3x\sin 2x=\tan^3x(3\tan x+\sin 2x)\qquad(\text{答})$$

(5)
$$y'=(x^2)'e^{-x}+x^2(e^{-x})'=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})=(2x-x^2)e^{-x}\qquad(\text{答})$$

(6)
$$y'=e^{\cos 3x}(\cos 3x)'=e^{\cos 3x}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3=-3e^{\cos 3x}\cdot\sin 3x\qquad(\text{答})$$

(7)
$$y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x\qquad(\text{答})$$

(8) $y=\log_x(\log x)=\dfrac{\log(\log x)}{\log x}$ （底を e に変換）より

$$y'=\frac{\{\log(\log x)\}'\log x-\log(\log x)\cdot(\log x)'}{(\log x)^2}=\frac{\frac{\frac{1}{x}}{\log x}\cdot\log x-\log(\log x)\cdot\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$
$$=\frac{1-\log(\log x)}{x(\log x)^2}\qquad(\text{答})$$

(9) $y=(\sqrt[3]{x})^x\ (x>0)$ の両辺正であるから，両辺の対数をとると

$$\log y=\log(\sqrt[3]{x})^x=\frac{x}{3}\log x$$

x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\log x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}(\log x+1)$$

よって

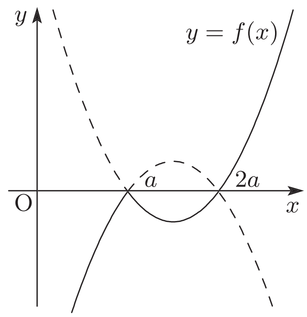
$$y'=\frac{y}{3}(\log x+1)=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{x})^x(\log x+1)\qquad(\text{答})$$

【3】

(1) $a>0$，$g(x)=x-2a$ より

$$f(x)=|x-a|(x-2a)=\begin{cases}(x-a)(x-2a) & (x \geqq a)\\ -(x-a)(x-2a) & (x<a)\end{cases}$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図.



(2) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるための条件は

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \cdots\cdots ①$$

が有限確定値として存在すること

である．ここで

$$f(x)=|x-a|g(x)\ (g(x)\text{ は連続}),\quad f(a)=0$$

より

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a+0}\frac{|x-a|g(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x \to a+0}\frac{(x-a)g(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x \to a+0}g(x)=g(a) \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a-0}\frac{|x-a|g(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x \to a-0}\frac{-(x-a)g(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x \to a-0}-g(x)=-g(a) \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

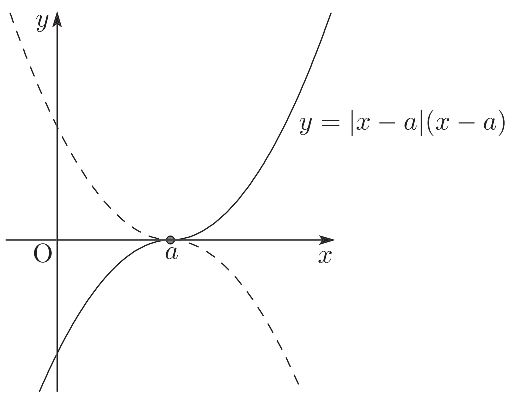
よって，① が存在する条件は，② と ③ が一致することであるから

$$g(a)=-g(a) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{g(a)=0} \qquad \text{(答)}$$

(3) $g(x)=x-a$ のとき，(2) の条件をみたし，そのとき

一例： $\boldsymbol{f(x)=|x-a|(x-a)}$ (答)

これを図示すると



【4】

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ より

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，$f(x)$ の増減は右表のようになり

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$\text{極大値}: f(e)=\frac{1}{e} \qquad (\text{答})$$

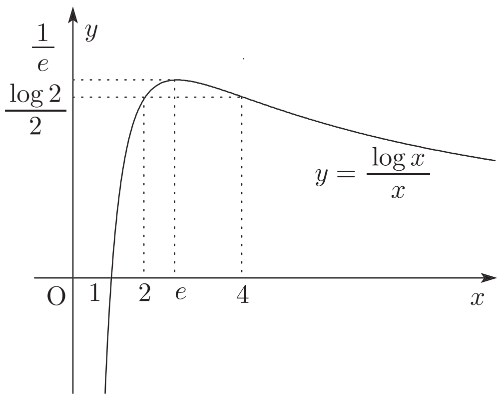
をもつ.

(2) $a>0$，$b>0$ のとき

$$\begin{aligned} a^b=b^a &\iff \log a^b = \log b^a \\ &\iff b\log a = a\log b \\ &\iff \frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b} \\ &\iff f(a) = f(b) \end{aligned}$$

であるから，自然数 a，b で $a<b$ かつ $f(a)=f(b)$ となるものを求めればよい.

(1) の増減と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$ から，グラフは下図.



よって，自然数 a は $1<a<e$ をみたすことが必要であるから，$a=2$

このとき $f(2)=f(b)$ $(2<b)$ をみたす自然数 b は $b=4$ であり，$f(x)$ は $e<x$ で単調減少であるから $b=4$ が唯一の値である.

以上より，求めるものは

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(2,\ 4)} \qquad (\text{答})$$

(3) (1) の増減と $3<\pi$ より，$f(3)>f(\pi)$ が成立する．よって

$$\begin{aligned} &\frac{\log 3}{3} > \frac{\log \pi}{\pi} \\ \iff &\pi\log 3 > 3\log\pi \\ \iff &\log 3^\pi > \log \pi^3 \\ \iff &3^\pi > \pi^3 \qquad (\because\ \text{底 } e>1) \end{aligned}$$

となるから，3^π の方が大きい.　　(答)

添削課題

【1】

(1) $y=e^x$ の $(a,\ e^a)$ における接線の方程式は，$y'=e^x$ より

$$y=e^a(x-a)+e^a \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=e^a x+(1-a)e^a} \qquad \cdots\cdots ① \qquad (答)$$

(2) $y=\log x$ の $(s,\ \log s)$ における接線の方程式は，$y'=\dfrac{1}{x}$ より，

$$y=\frac{1}{s}(x-s)+\log s=\frac{1}{s}x-1+\log s \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，① と ② は一致するから，

$$\begin{cases} e^a = \dfrac{1}{s} & \cdots\cdots ③ \\ (1-a)e^a = -1+\log s & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③ より，$s=e^{-a}$ であるから，④ に代入して

$$(1-a)e^a=-1+\log e^{-a}=-1-a$$

よって，a のみたす関係式は

$$\boldsymbol{(1-a)e^a+1+a=0} \qquad \cdots\cdots ⑤ \qquad (答)$$

(3) ⑤ の左辺を $f(a)$ とおくと，$f(a)=(1-a)e^a+1+a$ より

$$f'(a)=-e^a+(1-a)e^a+1=1-ae^a$$

よって，$a \leqq 0$ のとき $f'(a)>0$

また，$a>0$ のとき $f'(a)$ は減少し，$f'(1)<0$ であるから，$f'(a)=0$ をみたす a が 0 と 1 の間にただ 1 つ存在する．それを $\alpha\ (0<\alpha<1)$ とおくと

a		α	
$f'(a)$	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\nearrow$		$\searrow$

および

$$\begin{cases} f(-2) = 3e^{-2}-1<0 \\ f(-1) = 2e^{-1}>0 \\ f(1) = 2>0 \\ f(2) = -e^2+3<0 \end{cases}$$

より，$f(a)=0$ (⑤) をみたす a は $-2<a<-1$ と $1<a<2$ の範囲にただ 1 つずつ存在する．

（証明終）

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	