M3JSB/M3JB/M3TB

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学Ｔ

４章　数列（２）

問題

【1】 $\boxed{1}$

(1)　I. $n = 1$ のとき，左辺は 1，右辺は 2 だから，証明すべき不等式は確かに成り立つ．

II. $n = k$ のとき，与式が成り立つと仮定すると，

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} \ \cdots\cdots\cdots \text{(IH)}$$

(IH) の両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ を加えると，

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

ここで，

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \ \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示せば十分である．

$$\left(2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 - (2\sqrt{k})^2$$

$$= 4(k+1) - 4 + \frac{1}{k+1} - 4k$$

$$= \frac{1}{k+1} \ > \ 0$$

であるから

$$\left(2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 > \left(2\sqrt{k}\right)^2$$

$$2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k} \qquad \left(\begin{array}{l} k \geqq 1 \text{ のとき} \\ 2\sqrt{k+1} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} > 0,\ 2\sqrt{k} > 0 \text{ より．} \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$$

よって，①が成り立つ．従って

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$$

となり，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上 I，II より，任意の自然数 n について，不等式

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

が成立する．（証明終）

(2)　I. $n = 1$ のとき，左辺の値は 4，右辺の値は 3 で示すべき不等式が成り立つ．

II. $n = 2$ のとき，左辺の値は 8，右辺の値は 7 で，やはり成り立つ．

III. $n = k$ ($k \geqq 2$ の自然数) のとき，与式が成り立つと仮定すると，

$$2^{k+1} > k^2 + k + 1 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

② の両辺に 2 をかけると,

$2^{k+2} > 2k^2 + 2k + 2$

よって

$2k^2 + 2k + 2 > (k+1)^2 + (k+1) + 1$ ………③

が成り立つことを示せば十分である．以下，これを示す.

③の左辺から右辺を引けば

$$(2k^2 + 2k + 2) - \{(k+1)^2 + (k+1) + 1\} = k^2 - k - 1 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$k \geqq 2$ のとき,

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geqq 1 > 0$$

よって，$k \geqq 2$ のとき, 確かに③が成り立つから

$2^{k+2} > (k+1)^2 + (k+1) + 1$

となり，$n = k + 1$ のときも示すべき不等式が成り立つ.

以上 I, II, III より，任意の自然数 n について，不等式

$2^{n+1} > n^2 + n + 1$

が成立する.（証明終）

$\boxed{2}$ n に関する数学的帰納法により前半を示す.

I. $n = 1$ のとき，左辺は $a + 1$，右辺は $a + 1 \cdot a^0 = a + 1$ より，示すべき不等式は等号で成立.

II. $n = k$ で成立を仮定する：

(IH$_1$) ： $(a+1)^k \geqq a^k + ka^{k-1}$

(IH$_1$) の両辺に $a + 1$ (> 0) をかけて,

$$\begin{aligned}(a+1)^{k+1} &\geqq a^k(a+1) + (a+1)ka^{k-1} \\ &= a^{k+1} + a^k + ka^k + ka^{k-1} \\ &= a^{k+1} + (k+1)a^k + ka^{k-1} \\ &> a^{k+1} + (k+1)a^k\end{aligned}$$

$\therefore$ $(a+1)^{k+1} \geqq a^{k+1} + (k+1)a^k$

よって $n = k + 1$ のときも成立.

以上 I, II より，任意の正整数 n について，示すべき不等式が成り立つ.（証明終）

次に，やはり n に関する数学的帰納法により後半を示す.

I. $n = 1$ のとき，左辺は $1! = 1$，右辺は $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$ だから，等号で成立.

II. $n = k$ で成立を仮定する:

(IH$_2$) ： $k! \leqq 2\left(\dfrac{k}{2}\right)^k$

(IH$_2$) の両辺に $k + 1$ をかけると

$(k+1)! \leqq 2\left(\dfrac{k}{2}\right)^k (k+1) = \dfrac{k+1}{2^k} \cdot 2k^k$ ………④

ここで，(1) で得た不等式が，任意の正数 a で成り立つことに着目すれば，特に

$a=k$ でも成り立つから

$$(k+1)^k \geqq k^k + k\cdot k^{k-1} = k^k + k^k = 2k^k \Longleftrightarrow 2k^k \leqq (k+1)^k$$

この両辺に $\dfrac{k+1}{2^k}(>0)$ をかけて

$$2k^k\cdot\frac{k+1}{2^k} \leqq \frac{k+1}{2^k}(k+1)^k \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

④と⑤から

$$(k+1)! \leqq \frac{k+1}{2^k}\cdot(k+1)^k = \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

つまり $(k+1)! \leqq 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$ が成り立つから，$n=k+1$ のときも，示すべき不等式が成り立つ.

以上 I, II より，任意の正整数 n について，示すべき不等式が成り立つことが示された.

（証明終）

【2】初めの数項を書き出すと, 次のようになる:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1, & a_2, & a_3 & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & \cdots \\ 1, & 2, & 3, & \frac{9}{2}, & 6, & 8, & 10, & \cdots \end{array}$$

これから, 奇数番目の項, 偶数番目の項をそれぞれ取り出すと

$$1=\frac{1\cdot2}{2},\quad 3=\frac{2\cdot3}{2},\quad 6=\frac{12}{2}=\frac{3\cdot4}{2},\quad 10=\frac{20}{2}=\frac{4\cdot5}{2},\quad \cdots$$

$$2=\frac{2^2}{2},\quad \frac{9}{2}=\frac{3^2}{2},\quad 8=\frac{4^2}{2},\quad \cdots$$

これらより

$$a_{2n-1}=\frac{n(n+1)}{2},\quad a_{2n}=\frac{(n+1)^2}{2}$$

であることが推定される．この推定が任意の正整数 n について正しいことを，n についての数学的帰納法で証明する.

$n=1$ のときは確かに正しいので, $n=k\ (\geqq 1)$ のとき正しいと仮定する:

$$\text{(IH)}:\ a_{2k-1}=\frac{k(k+1)}{2},\quad a_{2k}=\frac{(k+1)^2}{2}$$

題意より, a_{2k-1}，a_{2k}，a_{2k+1} は等差数列をなすので

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)-1} = a_{2k+1} &= a_{2k}+(a_{2k}-a_{2k-1}) \\ &= 2a_{2k}-a_{2k-1} \\ &= (k+1)^2-\frac{k(k+1)}{2} \quad (\because\ \text{(IH)} より) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

また同様に a_{2k}，a_{2k+1}，a_{2k+2} は等比数列をなすので

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} = a_{2k+2} &= a_{2k+1}\times\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \\ &= \frac{{a_{2k+1}}^2}{a_{2k}} \\ &= \frac{\{(k+1)(k+2)\}^2\cdot 2}{4(k+1)^2} \quad (\because\ \text{(IH)} より) \\ &= \frac{(k+2)^2}{2} \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも推定は正しい.

従って, 任意の正整数 n について推定が正しいことが示されたから

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(n+2)^2}{8} & (\text{ただし } n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{(n+1)(n+3)}{8} & (\text{ただし } n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \qquad (答)$$

【3】(1) 与式は任意の自然数 n に対して成り立つので, n を $n+1$ としても成り立つ：

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \quad \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$$

定義式の両辺に $1+\sqrt{2}$ をかければ,

$$\begin{aligned} \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} &= \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

ここで, $a_n,\ b_n,\ a_{n+1},\ b_{n+1}$ は有理数, $\sqrt{2}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad (答)$$

(2) I. $n=1$ のときは, $a_1 = b_1 = 1$ より

$$a_1 - b_1\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$$

となり成立.

II. $n = k\ (\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定する. すなわち,

$$(\mathrm{IH})\ :\ a_k - b_k\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^k$$

が成り立っているとする. (IH) の両辺に $1-\sqrt{2}$ をかければ,

$$\begin{aligned} \left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(a_k - b_k\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) \\ &= (a_k + 2b_k) - (a_k + b_k)\sqrt{2} \\ &= a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2} \quad (\because \quad (1) \text{ より}) \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より, 任意の正整数 n に対して $a_n - b_n\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ が成り立つ. (証明終)

(3) (1), (2) をまとめると, 任意の自然数 n に対して, 次の式が成り立つ.

$$\begin{cases} a_n + b_n\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^n \\ a_n - b_n\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^n \end{cases}$$

辺々加えて

$$2a_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\} \qquad (答)$$

辺々引いて

$$2\sqrt{2}b_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

$$\therefore b_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right\} \qquad (答)$$

【4】(1)　(b) において，$n=1$ とすると

$$a_1a_2=2a_1a_1 \quad \therefore a_2=2 \qquad \text{(答)}$$

(b) において，$n=2$ とすると

$$a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1) \iff 2+2a_3=8 \quad \therefore a_3=3 \qquad \text{(答)}$$

(2)　$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$ より

$$a_n=n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と推定される．この推定が任意の正整数 n に関して正しいことを，n に関する帰納法により証明する．

m を 2 以上のある自然数として，$k \leqq m$ であるすべての自然数 k に対して $a_k=k$ であると仮定する．このとき，(b) より

$$\sum_{k=1}^{m-1} k(k+1)+ma_{m+1}=2\sum_{k=1}^{m} k(m+1-k)$$

ここで

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sum_{k=1}^{m-1}\left(k^2+k\right)+ma_{m+1}\\&=\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m+ma_{m+1}\\&=\frac{1}{3}(m-1)m(m+1)+ma_{m+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=2\sum_{k=1}^{m}\left\{(m+1)k-k^2\right\}\\&=m(m+1)^2-\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)\\&=\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)\end{aligned}$$

であるから

$$ma_{m+1}=\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)-\frac{1}{3}(m-1)m(m+1)=m(m+1)$$

よって

$$a_{m+1}=m+1$$

が成り立ち，$n=m+1$ に対しても推定は正しい．

定義と (1) より，$n=1,\ 2$ のとき成り立つから，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して

$$a_n=n$$

が成り立つことが示された．（証明終）

添削課題

【1】数学的帰納法を利用して $a_n < 3n^2$ $\cdots\cdots\cdots$① が成り立つことを証明する.

(i) $n=1$ のとき，$a_1 = 2 < 3\cdot 1^2$. よって ① は成り立つ.

(ii) k は自然数として，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ に対して ① が成り立つと仮定すると,

$a_j < 3j^2 (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$

$n=k+1$ のときを考えて,

$$a_{k+1} < 2(k+1)^2 + \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k} a_j$$

すなわち

$$a_{k+1} < 2(k+1)^2 + \frac{1}{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &< 2(k+1)^2 + \frac{1}{k+1}(3\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + 3\cdot k^2) \\ &= 2(k+1)^2 + \frac{3}{k+1}\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) = 2(k+1)^2 + \frac{1}{2}k(2k+1) \\ &= 3k^2 + \frac{9}{2}k + 2 \end{aligned}$$

また,

$$3(k+1)^2 - \left(3k^2 + \frac{9}{2}k + 2\right) = \frac{3}{2}k + 1 > 0$$

であるから

$$3k^2 + \frac{9}{2}k + 2 < 3(k+1)^2$$

ゆえに

$$a_{k+1} < 3(k+1)^2$$

したがって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ. (i)，(ii) から，すべての正の整数 n について

$$a_n < 3n^2$$

が成り立つ. (証明終)

問題

【1】$\boxed{1}$

(1) 11 個の玉のうち, 6 個, 5 個がそれぞれ同じものであるから, これら 11 個の玉を 1 列に並べる並べ方の総数は,

$\dfrac{11!}{6!5!} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$ (通り)　　(答)

また, このうち左右対称であるものは, 中央が白玉であり, 左右にはそれぞれ 3 個の赤玉と 2 個の白玉がある．このとき左右どちらか一方の並び方が決まれば, 他方の並び方も決まる.

よって, 左右対称であるものの総数は,

$\dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ (通り)　　(答)

(2) 1 個しかない黒玉を固定して考える．このとき 4 個の白玉と 6 個の赤玉を並べる並べ方の総数は, (1) と同様に考えて,

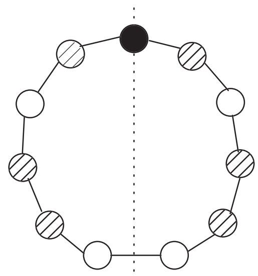
$\dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ (通り)

また, このうち, 図 1 のように裏返したときに自分自身に一致するものの個数は, (1) と同様に考えて,

$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$(通り)

これが「対称な」ネックレスの個数である.

図 1



一方,「対称でない」ネックレスの個数は,

$\dfrac{210 - 10}{2} = 100$(個)

以上より, 求めるネックレスの総数は,

$10 + 100 = 110$ (通り)　　(答)

$\boxed{2}$

(1) 条件から, 同じ色で塗れるのは対面どうしの場合だけである．ある 3 色を選んだとき (回転して同じになる塗り方は同じものとみなすから), その塗り方は,

1 通り

また, 5 色から 3 色を選ぶ選び方は,

${}_5C_3$通り

したがって, 求める方法は,

$1 \cdot {}_5C_3 = 10$(通り)　　(答)

(2) 条件から, 使う色の数は最低 3 色である.

(i) 3 色を使うとき, (1) の結果そのもので, 10 通り.

(ii) 4 色を使うとき, まず 2 色を選んで, その 2 色で 2 組の対面を塗る. そして残りの 2 面を, 残った 2 色で塗るようにする. よって,

(5 色から 4 色の選び方)·(4 色から 2 組の対面に使う 2 色の選び方)

$= {}_5C_4 \cdot {}_4C_2 = 30$(通り)

(iii) 5 色全部を使うとき

まず 1 組を同じ色に塗る. この 1 色の選び方は,

5 通り.

残りの 4 つの面を 4 色で塗る方法は数珠 (じゅず) 順列 (necklace permutation) となるから,

$\dfrac{(4-1)!}{2} = 3$(通り)

よって, この場合の数は,

$5 \times 3 = 15$(通り)

以上の (i), (ii), (iii) を合わせて,

$10 + 30 + 15 = 55$(通り)　　(答)

【2】 $\boxed{1}$

(1) 2 人を A, B とする. 各カードについて A に与えるか B に与えるかの 2 通りの場合があるから, 2^n 通りの分け方がある. この中からすべてのカードが 1 人に分けられる場合を除いて

$2^n - 2$(通り)　　(答)

(2) (1) と同様に考えて, 全部で 3^n 通りの分け方がある. このうち, 3 人のうち 2 人に分ける分け方が $(2^n - 2) \times 3$ 通り, 誰か 1 人にのみすべてのカードが渡る場合が 3 通りある. そこで, これらを除いて

$3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$(通り)　　(答)

$\boxed{2}$

(1) 次のような, ◯ と仕切りの並べ方を考える.

◯　◯　◯　$\cdots$　◯

　↑　↑　↑　$\cdots$　↑

20 個の ◯ を並べたときにできる間の 19 箇所に 3 つの仕切りを入れると考えればよいので,

${}_{19}C_3 = 969$ (個)　　(答)

(2) 今度も同様であるが, 仕切りが隣接していてもよいことに着目する.

◯　| |　◯　|　◯　$\cdots$　◯

20 個の ◯ と 3 つの仕切りを任意に並べる並べ方なので,

${}_{23}C_3 = 1771$ (個)　　(答)

【3】(1) $b_i = a_i + i - 1$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ とすると

$$1 \leqq b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 \leqq 8$$

となる．ここで題意をみたす $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数と $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ の個数は一致する．

よって，求める個数は

$${}_8\mathrm{C}_5 = 56 \text{ (個)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $c_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ とすると

$$c_1 \geqq 1, \ c_5 \leqq 4, \ c_i \leqq c_{i+1} \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

となるから，これは (1) と同じ条件になる．

よって，求める個数は

56 (個)　　(答)

(3) $n \geqq 2$ のとき，n 桁の自然数の各桁の数字を最高位から $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする．このとき

(a) $a_1 \geqq 1$

(b) $a_i \geqq 0$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$

(c) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq r$

をみたす整数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の個数を求めればよい．

よって $d_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすると

$$d_1 \geqq 1, \ d_n \leqq r, \ d_i \leqq d_{i+1} \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

となるから，(2) と同様に考え，求める個数は

$${}_{n+r-1}\mathrm{C}_n = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \text{ (個)} \qquad \text{(答)}$$

これは $n = 1$ のときもみたす．

【4】(1) 求める確率 p_n は，白球 15 個と赤球 4 個の計 19 個の球を 1 列に並べるとき，

- 1 個目から $n-1$ 個目までに赤球が 2 個，白球が $n-3$ 個並び，
- n 個目が赤球であり，
- かつ $n+1$ 個目から，19 個目までに 1 個が赤球，$18-n$ 個が白球

となる確率に等しい．19 個の球の並べ方の総数は，

$$\frac{19!}{15!4!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3876 \text{(通り)}$$

だけある．そして，題意をみたす並べ方の数は，

$$\frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-3)!} \cdot 1 \cdot \frac{(19-n)!}{(18-n)!} = \frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{2} \text{(通り)}$$

であるから，求める確率は

$$p_n = \frac{\dfrac{(n-1)(n-2)(19-n)}{2}}{3876} = \frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{7752} \qquad \text{(答)}$$

(2) 最大値を求めるから，$p_n > 0$ となる範囲で考える．$3 \leqq n \leqq 17$ のとき，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\dfrac{n(n-1)(18-n)}{7752}}{\dfrac{(n-1)(n-2)(19-n)}{7752}}$$

$$= \frac{n(18-n)}{(n-2)(19-n)}$$

従って

$$\begin{aligned} p_{n+1} > p_n &\iff \frac{n(18-n)}{(n-2)(19-n)} > 1 \\ &\iff -n^2 + 18n > -n^2 + 21n - 38 \\ &\iff n < \frac{38}{3} = 12 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases} 3 \leqq n \leqq 12 \text{ のとき} \quad p_n < p_{n+1} \\ 13 \leqq n \leqq 17 \text{ のとき} \quad p_n > p_{n+1} \end{cases}$$

すなわち，

$$0 = p_1 = p_2 < p_3 < \cdots < p_{13} > p_{14} > \cdots > p_{18}$$

となり，p_n を最大にする n の値は，

$n = 13$　　(答)

添削課題

【1】(1) 甲が C まで行く経路は，8 区画のうち右へ進む 4 区画の選び方の

$${}_8\mathrm{C}_4 = \mathbf{70(通り)} \qquad (答)$$

であって，そのうち道路 EF を通るのは

$\mathrm{A} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F} \to \mathrm{C}$

のように通る場合であり

$\mathrm{A} \to \mathrm{E}$, $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ はそれぞれ 1(通り)，$\mathrm{F} \to \mathrm{C}$ は${}_5\mathrm{C}_2 = 10$(通り)

だから，道路 EF を通るのは

$$1 \cdot 1 \cdot 10 = \mathbf{10(通り)} \qquad (答)$$

道路 GH を通るのは

$\mathrm{A} \to \mathrm{G} \to \mathrm{H} \to \mathrm{C}$

のように通る場合であり

$\mathrm{A} \to \mathrm{G}$ は${}_4\mathrm{C}_2 = 6$(通り)，$\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ は 1(通り)，$\mathrm{H} \to \mathrm{C}$ は${}_3\mathrm{C}_1 = 3$(通り)

だから，道路 GH を通るのは

$6 \cdot 1 \cdot 3 = 18$(通り)

である．よって，道路 GH を通らないのは

$$70 - 18 = \mathbf{52}(通り) \qquad (答)$$

(2) C と D の中点を I とすると， E，F，G，H，I のうちどの点で甲，乙が初めて出会うかで場合分けすればよい．

(i) E で出会う場合

$\mathrm{A} \to \mathrm{E} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \to \mathrm{E} \to \mathrm{D}$ のように通るものはともに

$$1 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 = 15(通り)$$

ゆえに，15^2(通り)

(ii) F ではじめて出会う場合

$\mathrm{A} \to \mathrm{F} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \to \mathrm{F} \to \mathrm{D}$ のように通るものはともに

$${}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 30(通り)$$

$\mathrm{A} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F} \to \mathrm{D}$ のように通るものはともに

$$1 \cdot 1 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 10(通り)$$

F を通るものの総数から E ですでに出会ったものの数を引けばよいから，

$$30^2 - 10^2(通り)$$

(iii) G ではじめて出会う場合

$\mathrm{A} \to \mathrm{G} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \to \mathrm{G} \to \mathrm{D}$ のように通るものはともに

$${}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 36(通り)$$

$\mathrm{A} \to \mathrm{F} \to \mathrm{G} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \to \mathrm{F} \to \mathrm{G} \to \mathrm{D}$ のように通るものはともに

$${}_3\mathrm{C}_2 \cdot 1 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 18(通り)$$

ゆえに，$36^2 - 18^2$(通り)

(iv) H ではじめて出会う場合

$\mathrm{A} \to \mathrm{H} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \to \mathrm{H} \to \mathrm{D}$ のように通るものはともに

$${}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 = 30(通り)$$

$A \to G \to H \to C$, $B \to G \to H \to D$ のように通るものはともに

$${}_4C_2 \cdot 1 \cdot {}_3C_1 = 18(\text{通り})$$

ゆえに，$30^2 - 18^2$(通り)

(v) I ではじめて出会う場合

$A \to I \to C$, $B \to I \to D$ のように通るものはともに

$${}_6C_2 \cdot 1 = 15(\text{通り})$$

$A \to H \to I \to C$, $B \to H \to I \to D$ のように通るものはともに

$${}_5C_2 \cdot 1 \cdot 1 = 10(\text{通り})$$

ゆえに，$15^2 - 10^2$(通り)

よって，求める経路の組の総数は

$$
\begin{aligned}
&15^2 + (30^2 - 10^2) + (36^2 - 18^2) + (30^2 - 18^2) + (15^2 - 10^2)\\
=&36^2 + 2 \cdot (30^2 + 15^2 - 18^2 - 10^2)\\
=&36^2 + 2 \cdot \{(30+10)(30-10) - (18+15)(18-15)\}\\
=&\mathbf{2698}(\text{通り}) \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$