M3MA

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学Ｍ

４章－１　数列（２）

問題

【1】(1) 与式を

$$a_{n+1} = ta_n + \frac{n}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと

$$a_{n+2} = ta_{n+1} + \frac{n+1}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

であり，② − ① より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = t(a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{3}$$

よって，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1} = tb_n + \frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}\cdots\cdots ③$$

また，① より

$$b_1 = a_2 - a_1 = ta_1 + \frac{1}{3} - a_1 = \frac{1}{3}$$

(2) $t \fallingdotseq 1$ より

$$\alpha = t\alpha + \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ④$$

をみたす α が存在し

$$\alpha = \frac{1}{3(1-t)}$$

すると，③ − ④ より

$$b_{n+1} - \alpha = t(b_n - \alpha)$$

と変形できるので

$$b_n - \alpha = t^{n-1}(b_1 - \alpha) = t^{n-1}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3(1-t)}\right\}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{3(1-t)} - \frac{t^n}{3(1-t)} = \boldsymbol{\frac{1-t^n}{3(1-t)}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-t^k}{3(1-t)} = \frac{n-1}{3(1-t)} - \frac{1}{3(1-t)}\sum_{k=1}^{n-1}t^k$$

$$= \frac{n-1}{3(1-t)} - \frac{1}{3(1-t)} \cdot t \cdot \frac{1-t^{n-1}}{1-t}$$

$$= \boldsymbol{\frac{n-1}{3(1-t)} - \frac{t(1-t^{n-1})}{3(1-t)^2}} \qquad \text{(答)}$$

であり，$n = 1$ のときも成立する．

【2】方程式

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \qquad \therefore \quad (t-1)(t-2) = 0$$

の解が

$$t = 1,\ 2$$

なので，与えられた漸化式は

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n$$

と2通りに変形できる．したがって

$$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}(a_2-a_1)=2^n \ \cdots\cdots \ ①$$

$$a_{n+1}-2a_n=a_2-2a_1=-1 \ \cdots\cdots \ ②$$

よって，① − ② より

$$\boldsymbol{a_n=2^n+1} \qquad (答)$$

【3】(1) 与えられた漸化式を

$$2a_n=S_n+n^2-4n+3 \ \cdots\cdots \ ①$$

とおく．$n=1$ のとき，$S_1=a_1$ より

$$2a_1=a_1+1-4+3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_1=0} \qquad (答)$$

また，① において $n=2$ とすると

$$2a_2=a_1+a_2+4-8+3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_2=-1} \qquad (答)$$

(2) ① より

$$2a_{n+1}=S_{n+1}+(n+1)^2-4(n+1)+3$$

$$\therefore \quad 2a_{n+1}=S_{n+1}+n^2-2n \ \cdots\cdots \ ②$$

であるから，② − ① より

$$2a_{n+1}-2a_n=a_{n+1}+2n-3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+1}=2a_n+2n-3} \qquad (答) \ \cdots\cdots \ ④$$

次に

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+2n-1 \ \cdots\cdots \ ⑤$$

であるから，⑤ − ④ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+2$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n+2$ とおくと

$$b_{n+1}-2=2(b_n-2)+2$$

$$\therefore \quad b_{n+1}=2b_n$$

なので

$$b_n=2^{n-1}(a_2-a_1+2)=2^{n-1}(-1+2)=\boldsymbol{2^{n-1}} \qquad (答)$$

(3) (2) より

$$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}-2$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}-2)=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-2(n-1)$$

$$=2^{n-1}-1-2n+2=\boldsymbol{2^{n-1}-2n+1} \qquad (答)$$

であり，$n=1$ のときも成立する．

４章－２　関数の極限

問題

【1】(1) (i) 分子を有理化して

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+13)-4^2}{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+4}=\mathbf{\frac{1}{8}}\qquad(答)$$

(ii) (i) と同様に有理化して

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+x+1)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\mathbf{\frac{1}{4}}\qquad(答)$$

(iii) $x\to\infty$ を考えるので，$x>0$ としてよく

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\mathbf{1}\qquad(答)$$

＜補足＞

$x\to-\infty$ の場合，$x<0$ であるから，$x=-\sqrt{x^2}$ として計算することになる．

(iv) $x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{(-t)^2+(-t)+1}}{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)=\mathbf{-1}\qquad(答)$$

(v) $x\to1-0$ のとき $x-1\to-0$ なので

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=\boldsymbol{-\infty}\qquad(答)$$

(vi) $x\to-1+0$ のとき，$x-2\to-3+0$，$x^2-2x-3\to-0$ なので，分母の 0 への近づき方に注意すると

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x-2}{x^2-2x-3}=\boldsymbol{\infty}\qquad(答)$$

(2) (i) 分母・分子に $(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-2x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})$ をそれぞれかけると

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-2x}}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-2x})(-2x^2+x)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})(-x^2+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-2x})(2x-1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x^2})(x-2)}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}}\qquad(答)$$

(ii) 分母・分子に $(\sqrt[3]{x^3+ax^2})^2+\sqrt[3]{(x^3+ax^2)(x^3-ax^2)}+(\sqrt[3]{x^3-ax^2})^2$ をかけて

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+ax^2}-\sqrt[3]{x^3-ax^2})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+ax^2-(x^3-ax^2)}{(\sqrt[3]{x^3+ax^2})^2+\sqrt[3]{(x^3+ax^2)(x^3-ax^2)}+(\sqrt[3]{x^3-ax^2})^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\dfrac{(\sqrt[3]{x^3+ax^2})^2}{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{x^6-a^2x^4}}{x^2}+\dfrac{(\sqrt[3]{x^3-ax^2})^2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\dfrac{a^2}{x^2}}+\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{a}{x}}\right)^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}\qquad \text{(答)}$$

(iii) $x^2-4=(x-2)(x+2),\ x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ より

$$\lim_{x\to2}(\log|x^2-4|-\log|x^3-8|)=\lim_{x\to2}\log\left|\frac{x+2}{x^2+2x+4}\right|$$

$$=\boldsymbol{-\log 3}\qquad \text{(答)}$$

【2】(1) (i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$ より

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ より

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot\frac{9}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\boldsymbol{\frac{9}{4}}\qquad \text{(答)}$$

<別解> 3 倍角の公式より

$$1-\cos 3x=-4\cos^3 x+3\cos x+1=(1-\cos x)(4\cos^2 x+4\cos x+1)$$

であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(4\cos^2 x+4\cos x+1)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^2 x)(4\cos^2 x+4\cos x+1)}{2x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{4\cos^2 x+4\cos x+1}{2(1+\cos x)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{9}{4}}\qquad \text{(答)}$$

(iii) $\displaystyle\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 2x}=\frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\sin 2x}$ であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\sin 2x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(iv) $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to0$ で

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t}-3}\sin t\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{1-3t}\right)=\boldsymbol{1}\qquad \text{(答)}$$

(2) (i) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ および対数関数の連続性より

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{x}=1$$

$x=\log(t+1)$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t+1-1}{\log(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(t+1)}=\mathbf{1}\qquad\text{(答)}$$

(ii) ■解答 1　$t=-\dfrac{x}{2}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to-\infty$ であり

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}\qquad\text{(答)}$$

■解答 2　$u=-\dfrac{2}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $u\to-0$ であり

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{u\to-0}(1+u)^{-\frac{2}{u}}$$

$$=\lim_{u\to-0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}\qquad\text{(答)}$$

(iii) (i) より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$$

であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 2\right)=\mathbf{2}\qquad\text{(答)}$$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ および対数関数の連続性より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}\cdot\frac{1}{\log a}=\frac{1}{\log a}$$

$x=\log_a(t+1)$ とおくと，$x\to 0$ のとき $t\to 0$ であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\log a$$

となるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)\log_a(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x-1}{x}\cdot\frac{\log_a(1+x)}{x}\right\}=\mathbf{1}\qquad\text{(答)}$$

【3】(1) $x\to 1$，$x\to 2$ のとき，分母 $\to 0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$，　$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)$ がともに有限な値であるためには

$$\lim_{x\to 1}(x^3+ax^2+bx-2)=a+b-1=0\ \cdots\cdots\ ①$$

$$\lim_{x\to 2}(x^3+ax^2+bx-2)=4a+2b+6=0\ \cdots\cdots\ ②$$

が必要である．よって，①，②より

$\boldsymbol{a=-4,\ b=5}$　　(答)

このとき

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx-2}{x^2-3x+2}=x-1$$

であるから $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=1$ となり，確かに有限な値に収束する．

(2) $x\to 2$ のとき，分母 $\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x+7}+b)=0$$

$\therefore\quad 3a+b=0$ すなわち $b=-3a$

が必要で，このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+7}-3a}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(x+7-3^2)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\&=\frac{a}{6}=1\end{aligned}$$

であり，有限な値に収束する．したがって

$\boldsymbol{a=6,\ b=-18}$　　(答)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{4x^2-12x+1}-(ax+b)\right\}=0$ なので

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left\{\sqrt{4x^2-12x+1}-(ax+b)\right\}=0$$

$$\therefore\quad\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$$

$\therefore\quad 2-a=0$ すなわち $a=2$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{4x^2-12x+1}-2x\right\}&=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-12x+1-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-12x+1}+2x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-12x+1}{\sqrt{4x^2-12x+1}+2x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-12+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}\\&=-3=b\end{aligned}$$

よって

$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$　　(答)

【4】$m(a)$ は曲線 $y=x^2$ と $y=a\sin x$ の原点以外の交点の x 座標であるから，$0<m(a)<\pi$ で

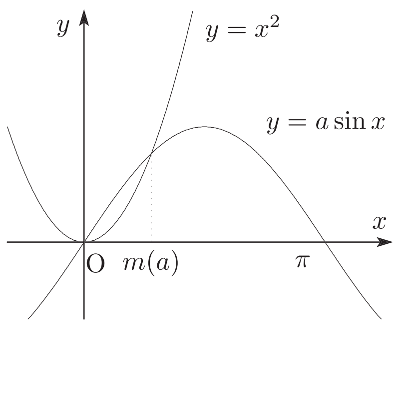
$\{m(a)\}^2=a\sin m(a)$ ……①

また $\sin m(a)\leqq 1$ より $a\sin m(a)\leqq a$ であるから

$0<\{m(a)\}^2\leqq a$　　$\therefore\quad 0<m(a)\leqq\sqrt{a}$

$\displaystyle\lim_{a\to+0}\sqrt{a}=0$ なので，はさみうちの原理より

$\displaystyle\lim_{a\to+0}m(a)=0$　　(証終)



次に $m(a)>0$ なので，①より

$$\frac{m(a)}{a}=\frac{\sin m(a)}{m(a)}$$

$\displaystyle\lim_{a\to+0}m(a)=0$ より

$$\lim_{a\to+0}\frac{m(a)}{a}=\lim_{m(a)\to0}\frac{\sin m(a)}{m(a)}=\boldsymbol{1}\qquad(答)$$

５章－１　数列（３）

問題

【1】与えられた漸化式を

$$a_{n+1}=2-\frac{a_n}{2a_n-1}\quad\cdots①$$

とおくと，$a_1=2$ より，a_2，a_3，a_4 に対して

$$a_2=2-\frac{a_1}{2a_1-1}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$a_3=2-\frac{a_2}{2a_2-1}=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$

$$a_4=2-\frac{a_3}{2a_3-1}=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$$

となり，$a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(I) $n=1$ のとき，$a_1=2=\dfrac{2\cdot 1}{2\cdot 1-1}$ より成立する．

(II) $n=k$ のとき，$a_k=\dfrac{2k}{2k-1}$ が成り立つとすると，① より

$$a_{k+1}=2-\frac{a_k}{2a_k-1}=2-\frac{\dfrac{2k}{2k-1}}{2\cdot\dfrac{2k}{2k-1}-1}$$

$$=2-\frac{2k}{2k+1}=\frac{2k+2}{2k+1}=\frac{2(k+1)}{2(k+1)-1}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

以上より

$$a_n=\boldsymbol{\frac{2n}{2n-1}}\qquad(答)$$

であることが示された．

【2】(1) $f(n)=n^7-n$ とおく．

(I) $n=1$ のとき

$$f(1)=1^7-1=0$$

であるから，$f(1)$ は 7 の倍数である．

(II) $n=k$ のとき，$f(n)$ が 7 の倍数であると仮定すると

$$k^7-k=7M\quad(M\text{ は整数})$$

と表せて

$$\begin{aligned}f(k+1)&=(k+1)^7-(k+1)\\&=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1-k-1\\&=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+6k\\&=7M+k+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+6k\\&=7(M+k^6+3k^5+5k^4+5k^3+3k^2+k)\end{aligned}$$

となり，$f(k+1)$ も 7 の倍数である．

以上より，すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数である．　（証終）

(2) (i) $n=1,\ 2,\ \cdots$ として $2^n,\ 10n^2$ を計算すると

n	1	2	3	4	$\cdots$	9	10	11	$\cdots$
2^n	2	4	8	16	$\cdots$	512	1024	2048	$\cdots$
$10n^2$	10	40	90	160	$\cdots$	810	1000	1210	$\cdots$

であるから，$2^n < 10n^2$ をみたす最大の自然数 n_0 は

$\boldsymbol{n_0 = 9}$ (**答**)

であると予想できる．

(ii) $n > 9$ すなわち $n = 10,\ 11,\ \cdots$ において

$2^n > 10n^2 \cdots\cdots ①$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(I) $n = 10$ のとき

$2^{10} = 1024,\ 10 \cdot 10^2 = 1000$

であるから，① は成立する．

(II) $n = k\ (k \geqq 10)$ のとき，① の成立を仮定すると

$2^k > 10k^2$

であり，両辺に 2 をかけると

$2^{k+1} > 20k^2 \cdots\cdots ②$

ここで，$10(k+1)^2$ と $20k^2$ の大小を比較する．

$$\begin{aligned}20k^2 - 10(k+1)^2 &= 20k^2 - 10(k^2+2k+1)\\ &= 10k^2 - 20k - 10\\ &= 10\left\{(k-1)^2 - 2\right\}\end{aligned}$$

ここで，$k \geqq 10$ より $(k-1)^2 - 2 > 0$ が成立し

$20k^2 - 10(k+1)^2 > 0$

$\therefore\quad 20k^2 > 10(k+1)^2 \ \cdots\cdots\ ③$

よって，②, ③ より

$2^{k+1} > 10(k+1)^2$

であり，$n = k+1$ のときも成立する．

以上より，$n > 9$ のとき不等式 $2^n > 10n^2$ が成立する． （証終）

【3】 $a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2 = a_n a_{n+1}\ \cdots (*)$

とし，$(*)$ が成り立つことを数学的帰納法により示す．

(I) $n=2$ のとき，$a_3 = a_1 + a_2 = 2$ より，$(*)$ の両辺に代入すると，

(左辺) $= a_1{}^2 + a_2{}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

(右辺) $= a_2 a_3 = 1 \cdot 2 = 2$

より成立する．

(II) $n = k$ のとき，$(*)$ に $n = k$ を代入した

$a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_k{}^2 = a_k a_{k+1}\ \cdots (**)$

が成り立つとする．$(**)$ の両辺に a_{k+1}^2 を加えると

$a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_k{}^2 + a_{k+1}^2 = a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2$

$$= a_{k+1}(a_k + a_{k+1})$$
$$= a_{k+1}a_{k+2}$$

よって，$n = k + 1$ のときも成立.

以上より，2 以上の整数 n に対して $(*)$ が成り立つことが示された.　(証終)

問題

【1】(1) 積の微分法より

$$y' = 12x^2(1+2x^2) + (1+4x^3)\cdot 4x = \boldsymbol{4x(10x^3+3x+1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 積の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= (x^3-3x^2+5)'(x^3+2x^2) + (x^3-3x^2+5)(x^3+2x^2)' \\ &= (3x^2-6x)(x^3+2x^2) + (x^3-3x^2+5)(3x^2+4x) \\ &= \boldsymbol{6x^5-5x^4-24x^3+15x^2+20x} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 商の微分法より

$$y' = \frac{2(x^2+1)-(2x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \boldsymbol{\frac{-2(x^2+3x-1)}{(x^2+1)^2}} \qquad \text{(答)}$$

(4) 商の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\{(x+1)(x-2)\}'(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)\{(x-1)(x+2)\}'}{(x-1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{(x-2+x+1)(x-1)(x+2)-(x+2+x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x-1)(x+2)-(2x+1)(x+1)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^3+x^2-5x+2-(2x^3-x^2-5x-2)}{(x-1)^2(x+2)^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{2(x^2+2)}{(x-1)^2(x+2)^2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5) 合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= 3(1+2x+x^3)^2(1+2x+x^3)' \\ &= \boldsymbol{3(3x^2+2)(1+2x+x^3)^2} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(6) $y=(2x-3)^{-3}$ なので，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= -3(2x-3)^{-4}(2x-3)' \\ &= \boldsymbol{\frac{-6}{(2x-3)^4}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(7) $(\cos 2x)' = (-\sin 2x)(2x)' = -2\sin 2x$ より

$$y' = \boldsymbol{\cos x - 2\sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \text{(答)}$$

(8) 積の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x)'\cos 3x + \sin 2x(\cos 3x)' \\ &= \boldsymbol{2\cos 2x\cos 3x - 3\sin 2x\sin 3x} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(9) 積の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= (x)'\log 2x + x(\log 2x)' \\ &= \log 2x + x\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)' \\ &= \boldsymbol{\log 2x + 1} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(10) $\left\{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ であるから

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \qquad \text{(答)}$$

(11) 積の微分法より

$$y' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$
$$= \boldsymbol{(1-x)e^{-x}} \qquad \text{(答)}$$

(12) 積の微分法より

$$y' = (x^2)'e^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})'$$
$$= 2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-x^2)'$$
$$= \boldsymbol{2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}} \qquad \text{(答)}$$

(13) 両辺の自然対数をとって

$$\log y = x \log x$$

この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

$$\therefore \quad y' = \boldsymbol{x^x(\log x + 1)} \qquad \text{(答)}$$

(14) 両辺の自然対数をとって

$$\log y = \log\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x} = \log x \log\left(\frac{1}{x}\right) = -(\log x)^2$$

よって，両辺を x で微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{y'}{y} = -2(\log x)\cdot(\log x)' = -\frac{2}{x}\log x$$

よって

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\log x} \cdot \left(-\frac{2}{x}\log x\right) = \boldsymbol{-2\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x+1}\log x} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$$y'' = ae^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) + be^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)$$
$$= \boldsymbol{(a^2 - b^2)e^{ax}\sin bx + 2abe^{ax}\cos bx} \qquad (答)$$

(2) $y' = ay + be^{ax}\cos bx$ より

$$be^{ax}\cos bx = y' - ay$$

これを $y'' = (a^2 - b^2)e^{ax}\sin bx + 2abe^{ax}\cos bx$ に代入して

$$y'' = (a^2 - b^2)y + 2a(y' - ay)$$
$$= \boldsymbol{2ay' - (a^2 + b^2)y} \qquad (答)$$

【3】(1) $|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ であるから

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$|x| > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ であるから

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + 2 + 2\left(\dfrac{a}{x^{n-3}} + \dfrac{b}{x^{n-2}} + \dfrac{c}{x^n}\right)}{1 + \dfrac{2}{x^n}} = x + 2$$

$x = 1$ のとき

$$f(1) = \frac{3 + 2a + 2b + 2c}{3}$$

$f(x)$ が $x = 1$ で連続であるための条件は

$$f(1) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) \qquad \therefore\ \frac{3 + 2a + 2b + 2c}{3} = a + b + c = 3$$

よって　求める条件は

$\boldsymbol{a + b + c = 3}$ 　(答) ……①

(2) $x = -1$ のときを考える．$a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 2(-1)^n + 2(-a + b + c)}{(-1)^n + 2}$ とおくと

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \frac{1 + 2(-a + b + c)}{3}$$
$$\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = -1 + 2(-a + b + c)$$

であるから，$f(-1)$ が定まる，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するためには

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \lim_{m\to\infty} a_{2m-1}$$

$$\therefore\ \frac{1 + 2(-a + b + c)}{3} = -1 + 2(-a + b + c)$$

$\therefore$　$\boldsymbol{-a + b + c = 1}$ 　(答) ……②

(3) $\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{(h + 3) - 3}{h} = 1$

$$\lim_{h\to-0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{a(1 + h)^3 + b(1 + h)^2 + c - (a + b + c)}{h}$$
$$= \lim_{h\to-0} (3a + 3ah + ah^2 + 2b + bh)$$
$$= 3a + 2b$$

$f(x)$ は $x = 1$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \quad \therefore\ 3a + 2b = 1 \ \cdots\cdots ③$$

また，$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから，①が成り立つ．よって，①，②，③より

$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=3}$　　(答)

【4】(1) 与式に $s=0$ を代入すると

$$f(t)=f(0)+f(t)$$

$\therefore\quad \boldsymbol{f(0)=0}$　　(答)

(2) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)$$

が成り立つ．このとき，$f(s+t)=f(s)+f(t)$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)$$

となる．

したがって，すべての実数 a に対して $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(0)$ が成り立つ．ゆえに，すべての実数 a に対して $x=a$ で微分可能である．　（証終）

(3) $f'(0)=0$ および，(2) より

$$f'(x)=f'(0)=0$$

ゆえに $f(x)$ は定数関数であり，$f(0)=0$ より

$\boldsymbol{f(x)=0}$　　(答)