６章－１　場合の数・確率（１）

問題

【1】(1) 4 桁の整数を N とする．

千の位は 0 以外の 6 通りで，百の位，十の位，一の位を順に決めていくと，N のつくり方は

$6 \times 6 \times 5 \times 4 =$ **720 通り**　　(答)

(2) 千の位が 4 以上のとき，N は 3400 より大きいので，このつくり方は

$3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$ 通り

千の位が 3 のとき，百の位が 4 以上であれば N は 3400 より大きくなる．よって，このつくり方は

$3 \times 5 \times 4 = 60$ 通り

以上より，求める場合の数は

$360 + 60 =$ **420 通り**　　(答)

(3) 0, 1, $\cdots$, 6 を 3 で割った余りで分類して，3 つの集合

$A_0 = \{0,\ 3,\ 6\}$

$A_1 = \{1,\ 4\}$

$A_2 = \{2,\ 5\}$

について考える．

N を 3 で割った余りは，N の各桁の和を 3 で割った余りと一致するので，N を 3 で割った余りが 1 になるのは

(i) A_2から 0 個，A_1から 1 個，A_0から 3 個

(ii) A_2から 1 個，A_1から 2 個，A_0から 1 個

(iii) A_2から 2 個，A_1から 0 個，A_0から 2 個

の場合である．

(i) 要素の選び方は

2 通り

であり，各桁との対応は千の位が 0 以外であるから

$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ 通り

あるので (i) の場合の数は

$2 \times 18 = 36$ 通り

(ii) A_0 から 0 を選ぶとすると，A_1，A_2 の要素の選び方は

2 通り

であり，各桁との対応は千の位が 0 以外であるから

$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ 通り

あるので，この場合の数は

$2 \times 18 = 36$ 通り

A_0 から 0 を選ばないとき，要素の選び方は

$2 \times 2 = 4$ 通り

であり，各桁との対応は

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通り

あるので，この場合の数は

$4 \times 24 = 96$ 通り

よって，(ii) の場合の数は

$36 + 96 = 132$ 通り

(iii) A_0 から 0 を選ぶとき，要素の選び方は

2 通り

であり，各桁との対応は千の位が 0 以外であるから

$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ 通り

あるので，この場合の数は

$2 \times 18 = 36$ 通り

A_0 から 0 を選ばないとき，要素の選び方は

1 通り

であり，各桁との対応は

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通り

あるので，この場合の数は

24 通り

よって，(iii) の場合の数は

$36 + 24 = 60$ 通り

以上，(i)，(ii)，(iii) より求める場合の数は

$36 + 132 + 60 = \mathbf{228}$ **通り**　　(答)

【2】(1) a が 3 個，b が 2 個，c が 2 個，d，e，f がそれぞれ 1 つずつあるので，この 10 個を並べるとき，この並べ方は

$\dfrac{10!}{3!2!2!} = \mathbf{151200}$ **通り**　　(答)

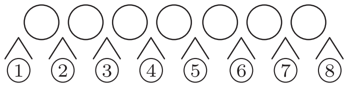
(2) b 2 個をひとまとまりの B として，a，a，a，B，c，c，d，e，f の並び方を考えると

$\dfrac{9!}{3!2!} = 30240$ 通り

よって，b が隣合わないものは

$151200 - 30240 = \mathbf{120960}$ **通り**　　(答)

(3) 先に a を除いた b，b，c，c，d，e，f を並べて



$\dfrac{7!}{2!2!} = 1260$ 通り

さらに，右図の①〜⑧から異なる 3 個選んで a を入れればよいので，この入れ方は

${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り

以上より，a が隣合わないものは

$1260 \times 56 = \mathbf{70560}$ **通り**　　(答)

【3】(1) 6 色を A，B，C，D，E，F とする．立方体の上面を A で固定すると，下面の塗り方は 5 通りある．

また，残りの 4 色を側面に塗るとき，その塗り方は 4 個の異なるものの円順列の総数に対応するので

$\dfrac{4!}{4} = 3! = 6$ 通り

よって，塗り方の総数は

$5 \times 6 = \mathbf{30}$ **通り**　　(答)

(2) 5 色を A，B，C，D，E とする．2 面に塗る色が 1 色あるので，その選び方は 5 通りある．

また，2 面に塗る色は向かい合った面に塗るので，それを上面，下面に固定する．

残りの 4 色を側面に塗るとき，上下をひっくり返すことを考えると，その塗り方は，4 個の異なるもののじゅず順列の総数に対応するので

$\dfrac{4!}{4} \div 2 = \dfrac{3!}{2} = 3$ 通り

よって，求める塗り方は

$5 \times 3 = \mathbf{15}$ **通り**　　(答)

６章－２　増減，凹凸

問題

【1】(1) $y' = 6\cos 2x - 12x\sin 2x$ なので

$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $y' = -3\pi$

よって，求める接線の方程式は

$$y = -3\pi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = -3\pi x + \frac{3}{4}\pi^2} \qquad \text{(答)}$$

また，求める法線の方程式は

$$y = \frac{1}{3\pi}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{3\pi}x - \frac{1}{12}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (i) $y' = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ であるから，曲線 $y = \dfrac{x}{x+1}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t}{t+1}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{t}{t+1} = \frac{1}{(t+1)^2}(x - t)$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{(t+1)^2}x + \frac{t^2}{(t+1)^2}$$

これが点 $\mathrm{P}(2,\ 2)$ を通るとき

$$2 = \frac{t^2+2}{(t+1)^2} \qquad \therefore \quad t = -4,\ 0$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{9}x + \frac{16}{9},\ y = x} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $y' = \log x + 1$ であるから，曲線 $y = x\log x$ 上の点 $(t,\ t\log t)$ における接線の方程式は

$$y - t\log t = (\log t + 1)(x - t) \qquad \therefore \quad y = (\log t + 1)x - t$$

これが点 $\mathrm{P}(0,\ -5)$ を通るので

$t = 5$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = (1 + \log 5)x - 5} \qquad \text{(答)}$$

(3) $f(x) = \log x,\ g(x) = ax^2$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ g'(x) = 2ax$$

ここで，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標を t とすると，この点で共通の接線をもつので

$$f(t) = g(t) \text{ かつ } f'(t) = g'(t) \qquad \therefore \quad \log t = at^2,\ \ \frac{1}{t} = 2at$$

第 2 式より $at^2 = \dfrac{1}{2}$ なので，これを第 1 式に代入することによって

$$\log t = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad t = \sqrt{e}$$

よって，このとき

$$a = \frac{1}{2e}$$

であるから，共通接線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) + \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{x}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+1$ より

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減は，下表のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$x=1$ で **極小値 $\boldsymbol{-1}$** をとる．　　(答)

(2) $\sin x$，$\cos x$ は周期 2π の周期関数なので $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で増減を調べる．

$$f'(x)=3\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

よって，n を整数として

$x=2n\pi,\ \frac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき **極大値 $\boldsymbol{1}$**

$x=\frac{5}{4}\pi+2n\pi$ のとき **極大値 $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$**

$x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ のとき **極小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$**

$x=\pi+2n\pi,\ \frac{3}{2}\pi+2n\pi$ のとき **極小値 $\boldsymbol{-1}$**

をとる．　　(答)

【3】(1)

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - x^2(x^2-3) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

なので

$$y' = 0 \iff x = 0,\ \pm\sqrt{3}$$

$$y'' = 0 \iff x = 0$$

よって，増減および凹凸は下表のようになる．　(答)

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘		↘	0	↘		↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗

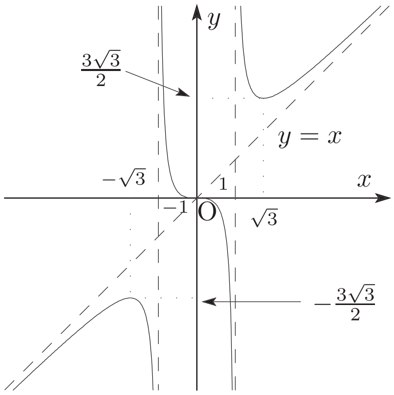
また

$x = -\sqrt{3}$ のとき，極大値 $\boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

$x = \sqrt{3}$ のとき，極小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

変曲点**(0, 0)**

である．　(答)



また，複号同順で

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to -1\pm 0} y = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to 1\pm 0} y = \pm\infty$$

であり，$y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$ なので，漸近線は

$$y = x,\quad x = \pm 1$$

したがって，$y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ のグラフは右図のようになる．　(答)

(2) $y = e^{-x^2}$ より

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

$$y'' = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = 4\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-x^2}$$

なので

$$y' = 0 \iff x = 0$$

$$y'' = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，増減および凹凸は下表のようになる．　　(答)

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘

また

$x=0$ のとき，**極大値 1**

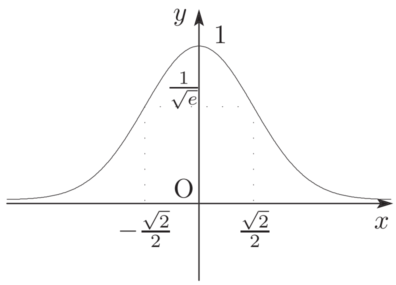
変曲点 $\left(\pm\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}\right)$

である．　　(答)

次に

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = 0$$

より漸近線は $y=0$ なので，$y=e^{-x^2}$ のグラフは右図のようになる．　　(答)



(3) $y=xe^x$ より

$$y'=(x+1)e^x$$
$$y''=(x+2)e^x$$

なので

$$y'=0 \iff x=-1$$
$$y''=0 \iff x=-2$$

よって，増減および凹凸は下表のようになる．　　(答)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

また

$x=-1$ のとき，**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$

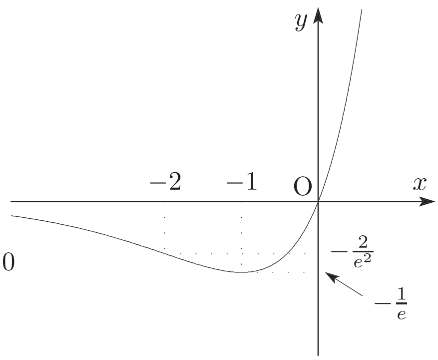
変曲点 $\left(\boldsymbol{-2},\ \boldsymbol{-\dfrac{2}{e^2}}\right)$

である．　　(答)

次に

$$\lim_{x\to\infty} y = \infty,\quad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{t\to\infty}(-te^{-t}) = 0$$

より漸近線は $y=0$ なので，$y=xe^x$ のグラフは右図のようになる．　　(答)



(4) 真数条件から定義域は $x>0$ である．

このもとで

$$y'=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\log x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

なので

$y' = 0 \iff x = e$

$y'' = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}}$

よって，増減および凹凸は下表のようになる．　　　(答)

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	↘

また

$x = e$ のとき，**極大値** $\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

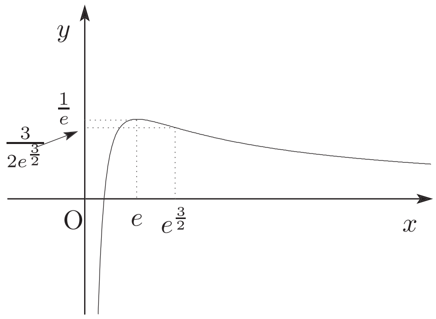
変曲点 $\boldsymbol{\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)}$

である．　　(答)

次に

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0,\quad \lim_{x\to+0} y = -\infty$

より，漸近線は $x=0$，$y=0$ なので，$y = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフは右図のようになる．　　(答)



【4】(1) $y=\dfrac{2x+a}{x^2-1}$ より $x \fallingdotseq \pm1$ のもとで考える.

$$y'=\frac{2(x^2-1)-2x(2x+a)}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+ax+1)}{(x^2-1)^2}$$

$x \fallingdotseq \pm1$ のもとで $(x^2-1)^2>0$ であるから，分子について，2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ $\cdots(*)$ が異なる 2 つの実数解をもち，かつ $x=1,-1$ を 2 解にもつ場合を除けばよい.

$(*)$ の判別式を D として

$$D=a^2-4>0$$

$\therefore\quad a<-2,\ a>2$

$x=1,\ -1$ を 2 解にもつ場合

$2+a=0$ かつ $2-a=0$

このような実数 a は存在しないので，求める a の値の範囲は

$a>2,\ a<-2$　　(答)

＜補足＞

2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ が $x=1,-1$ を 2 解とする場合，$x^2+ax+1=(x-1)(x+1)$ であり

$$y'=-\frac{2}{x^2-1}$$

となるので，極値をもたない．また，$x=1$ を解にもち，$x=-1$ を解にもたない場合には

$$y'=-\frac{2(x-b)}{(x^2-1)(x+1)}\qquad (b \text{ は } b \fallingdotseq 1,\ -1 \text{ をみたす定数})$$

のような形で表され，$x=b$ で極値をもつことになる.

(2) $y=ax+\dfrac{x+1}{x^2+1}$ より

$$y'=a+\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=a-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$$

y' の符号の変化が起こらないための条件を $y=a$ のグラフと $y=\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ のグラフに分けて考える.

ここで，$f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x^2+1)^2-4x(x^2+2x-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

であるから，$f(x)$ の増減表は下のようになる.

x	$\cdots$	$-2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-2+\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘

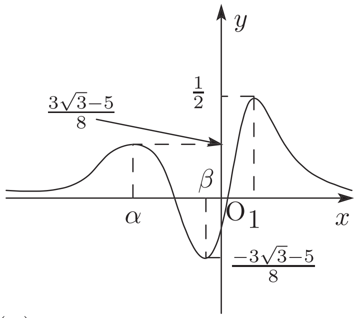
$\alpha = -2-\sqrt{3},\ \beta = -2+\sqrt{3}$ とおくと

$$\alpha^2 = -4\alpha - 1,\ \beta^2 = -4\beta - 1$$

であるから

$$f(\alpha) = \frac{-2\alpha - 2}{16\alpha^2} = \frac{3\sqrt{3}-5}{8}$$

$$f(\beta) = \frac{-2\beta - 2}{16\beta^2} = -\frac{3\sqrt{3}+5}{8}$$



また

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

であり，$2 > \sqrt{3}$ より

$$f(1) = \frac{1}{2} > \frac{1}{8} = \frac{3\cdot 2 - 5}{8} > \frac{3\sqrt{3}-5}{8} = f(\alpha)$$

さらに

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

なので，$y = f(x)$ のグラフは右上図となる．ここで，$y = f(x)$ のグラフと $y = a$ のグラフの上下が入れかわる点が存在しないための a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{-3\sqrt{3}-5}{8},\ a \geqq \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $f(x)=(x^2-2x-11)e^{\frac{x}{2}}$ より

$$f'(x)=(2x-2)e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}(x^2-2x-11)e^{\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}(x+5)(x-3)e^{\frac{x}{2}}$$

よって，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって

$x=-5$ のとき，**極大値** $f(-5)=\boldsymbol{24e^{-\frac{5}{2}}}$

$x=3$ のとき，**極小値** $f(3)=\boldsymbol{-8e^{\frac{3}{2}}}$

となる．　　(答)

(2) $y=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$ より

$$y'=2x-3-\frac{1}{x^2}$$

なので，$x=1$ のとき，$y'=-2$ である．よって，点 $(1,\ -1)$ における接線の方程式は

$y=-2(x-1)-1$ 　　$\therefore\ \boldsymbol{y=-2x+1}$ 　　(答)

また，$(1,\ -1)$ における法線の方程式は

$y=\dfrac{1}{2}(x-1)-1$ 　　$\therefore\ \boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}}$ 　　(答)

(3) $y=xe^{2x}$ より

$$y'=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$$

ここで，$y=xe^{2x}$ 上の点 $\left(t,\ te^{2t}\right)$ における接線の方程式は

$$y=(2t+1)e^{2t}(x-t)+te^{2t}$$

であり，この直線が $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ を通るとき

$$0=(2t+1)\left(\frac{1}{4}-t\right)e^{2t}+te^{2t}$$

$\therefore\ \dfrac{1}{4}(4t+1)(2t-1)e^{2t}=0$

$e^{2t}\neq 0$ より

$$t=-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$$

であるから，求める接線の方程式は，傾きが $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，$2e$ なので

$$y=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{4}\right),\ y=2e\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$\therefore\ \boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}x-\dfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}},\ y=2ex-\dfrac{e}{2}}$ 　　(答)

【2】(1) $f(x)=\dfrac{x-a+b}{x^2+4ab}$ より

$$f'(x)=\frac{x^2+4ab-(x-a+b)\cdot 2x}{(x^2+4ab)^2}=\frac{-x^2+2(a-b)x+4ab}{(x^2+4ab)^2}$$
$$=\frac{-(x-2a)(x+2b)}{(x^2+4ab)^2}$$

よって，$f'(x)=0$ をみたす x の値は

$\boldsymbol{x=-2b,\ 2a}$　(答)

(2) $x^2+4ab \fallingdotseq 0$，$-2b<2a$ であるから，(1) より $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$\cdots$	$-2b$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

ここで，極小値が $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$，極大値が $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ であるから

極小値 $f(-2b)=\dfrac{-a-b}{4b^2+4ab}=-\dfrac{1}{4b}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

極大値 $f(2a)=\dfrac{a+b}{4a^2+4ab}=\dfrac{1}{4a}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2},\ b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$　(答)

(3) (2) のもとで

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$，$f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

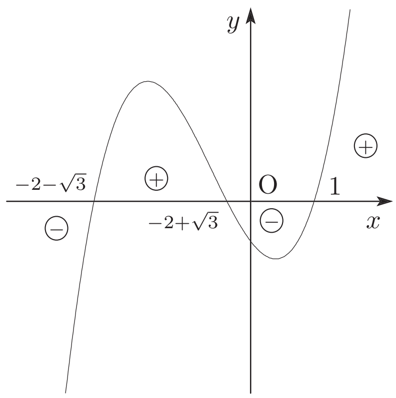
であるから

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+1)^2-(-x^2-2x+1)\cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2(x+1)(x^2+1)+4x(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

よって，$(x^2+1)^3>0$ より，$f''(x)$ の符号は分子の $(x-1)(x^2+4x+1)$ の符号と一致するので，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標は

$\boldsymbol{x=1,\ -2\pm\sqrt{3}}$　(答)

である．



７章－１　場合の数・確率（２）

問題

【1】(1) A に a 本，B に b 本，C に c 本分けるとすると，整数 a，b，c に関して，以下の関係式

$a+b+c=9$，$a \geqq 2$，$b \geqq 2$，$c \geqq 2$ $\cdots$ ①

をみたす組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めればよい．ここで，

$a'=a-2$，$b'=b-2$，$c'=c-2$

とすると，$a=a'+2$，$b=b'+2$，$c=c'+2$ となり，これを ① に代入すると

$(a'+2)+(b'+2)+(c'+2)=9 \iff a'+b'+c'=3$

$a' \geqq 0$，$b' \geqq 0$，$c' \geqq 0$

をみたす整数の組 $(a',\ b',\ c')$ の総数となる．これは，〇 3 個と｜ 2 本を一列に並べた順列の総数となるので，求める場合の数は

$\dfrac{5!}{3!2!}=$ **10 通り**　　(答)

(2)　(i) 1 から 6 のカードにそれぞれ 4 通りの押し方があるので，

$4^6=$ **4096 通り**　　(答)

(ii) 使うスタンプの選び方は ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通り．そのおのおのに対して

1〜6 のカードにどちらを押すかで $2^6=64$ 通り

1〜6 のカードに全て同じスタンプを押す押し方は，2 通り

よって，2 つのスタンプがともに使われる押し方は

$64-2=62$ 通り

これと，使うスタンプの選び方を考えると，求める場合の数は

$6\times 62=$ **372 通り**　　(答)

【2】(1) 男子 4 人を A，B，C，D とし，8 人の女子から 2 人選んで A と同じグループ，残りの 6 人の女子から 2 人選んで B と同じグループ，$\cdots$ とすればよく，この場合の数は

${}_8\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=$ **2520 通り**　　(答)

(2) 男子 3 人の選び方は

${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通り

次に，残りの 9 人（男子 1 人，女子 8 人）から 3 人を選び，さらに残りの 6 人から 3 人を選ぶと考えると，この選び方は

${}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3=1680$ 通り

であるが，この 3 グループに区別はないので

$\dfrac{1680}{3!}=280$ 通り

したがって，求める場合の数は

$4\times 280=$ **1120 通り**　　(答)

(3) 6 人の男子のうちどの 3 人が同じグループになるかで

${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り

残り 9 人を 3 人，3 人，3 人のグループに分けるのは

$\dfrac{{}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3}{3!}=280$ 通り

ある．

ここで，男子 3 人のグループが 2 組できる場合を調べると，男子 6 人を 3 人，3 人，女子 6 人を 3 人，3 人のグループに分ける場合の数なので

$\dfrac{{}_6C_3}{2!} \times \dfrac{{}_6C_3}{2!} = 100$ 通り

以上より，求める場合の数は

$20 \times 280 - 100 =$ **5500 通り**　　(答)

【3】(1) ↑ 6 個，→ 6 個を一列に並べる順列の総数に対応するので

$\dfrac{12!}{6!6!} =$ **924 通り**　　(答)

(2) 点 C を通る最短経路は

A → C への最短経路 : $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

C → B への最短経路 : $\dfrac{8!}{4!4!} = 70$ 通り

であるので

$6 \times 70 = 420$ 通り

点 D を通る最短経路は

A → D への最短経路 : $\dfrac{8!}{4!4!} = 70$ 通り

D → B への最短経路 : $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

であるので

$70 \times 6 = 420$ 通り

点 C と D のどちらも通る最短経路は

A → C への最短経路 : $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

C → D への最短経路 : $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

D → B への最短経路 : $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

であるので

$6 \times 6 \times 6 = 216$ 通り

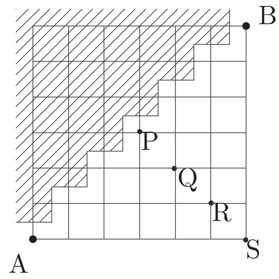
よって，C または D の少なくとも一方を通る経路は

$420 + 420 - 216 = 624$ 通り

これと (1) より，求める経路の総数は

$924 - 624 =$ **300 通り**　　(答)

(3) 右図のように点 P，Q，R，S を定める．図形の対称性から，A → P の経路の総数と P → B の経路の総数は等しく，同様に，A → Q と Q → B，A → R と R → B，A → S と S → B の経路の総数はそれぞれ等しい．よって，斜線部を通らずに A より P，Q，R，S に至る経路をそれぞれ求めればよい．



以下，上へ 1 区画進むことを↑，右へ 1 区画進むことを→で表す．

(i) A から P へ至る経路は，→→→↑↑↑，→→↑→↑↑，→→↑↑→↑，→↑→→↑↑，→↑→↑→↑ の 5 通り．よって，A から P を通り B へ至る経路の総数は

$5 \times 5 = 25$ 通り

(ii) A から Q へ至る経路は，最初は→で，残り 5 区画を↑ 2 つ，→ 3 つを一列に並べる順列から，↑↑→→→を除いたものになるので，A から Q に至る経路は

$\dfrac{5!}{2!3!} - 1 = 9$ 通り

よって，A から Q を通り B に至る経路の総数は

$9 \times 9 = 81$ 通り

(iii) A から R へ至る経路は，最初は→で，残り 5 区画を↑ 1 つ，→ 4 つを一列に並べる順列に対応するので，A → R に至る経路は

$\dfrac{5!}{4!} = 5$ 通り

よって，A から R を通り B に至る経路の総数は

$5 \times 5 = 25$ 通り

(iv) A から S に至る経路は 1 通りであるので，A から S を通り B に至る経路の総数は

$1 \times 1 = 1$ 通り

(i)，(ii)，(iii)，(iv) は排反なので，求める経路の総数は

$25 + 81 + 25 + 1 =$ **132 通り**　　(答)

７章－２　微分法の応用

問題

【1】(1) $f(x)=\sqrt{x^4-x^5}$ より

$$f'(x)=\frac{4x^3-5x^4}{2\sqrt{x^4-x^5}}=\frac{x(4-5x)}{2\sqrt{1-x}}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，$f(x)$ は $x=\frac{4}{5}$ のとき，極大かつ最大で，その最大値は

$$f\left(\frac{4}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{5}}{125}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ より

$$f'(x)=\frac{a\{\cos x(\cos x+2)-\sin x(-\sin x)\}}{(\cos x+2)^2}=\frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$$

$a=0$ のとき，つねに $f(x)=0$ となり最大値の条件より不適である．

$a>0$ のとき，$0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\frac{2}{3}\pi$ で極大かつ最大となり，その最大値は

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

であり，$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}$ より

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3} \qquad \therefore \quad a=3$$

これは $a>0$ をみたす．

$a<0$ のとき，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$f(0)=f(\pi)=0$ より，$f(x)$ は $x=0,\ \pi$ で最大となるので，最大値の条件より不適である．

以上より，$\boldsymbol{a=3}$　　(答)

【2】(1) 与えられた方程式は

$$x^2+2x-2+ae^x=0 \iff (x^2+2x-2)e^{-x}=-a$$

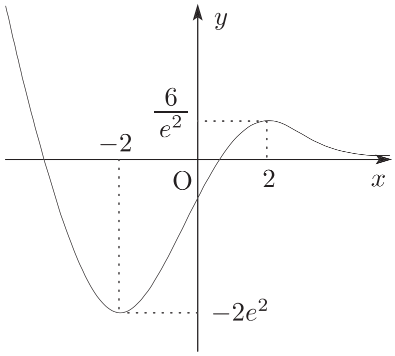
と同値変形できる．

$f(x)=(x^2+2x-2)e^{-x}$ とおくと

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x-2)e^{-x}$$
$$=-(x+2)(x-2)e^{-x}$$

なので，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘



ここで

$$f(-2)=-2e^2$$
$$f(2)=\frac{6}{e^2}$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$$

より，$y=f(x)$ のグラフは右上図のようになる．したがって，$f(x)=-a$ の実数解の個数は

$-a<-2e^2$ のとき 0 個

$-a=-2e^2$ のとき 1 個

$-2e^2<-a\leqq 0$ のとき 2 個

$0<-a<\frac{6}{e^2}$ のとき 3 個

$-a=\frac{6}{e^2}$ のとき 2 個

$\frac{6}{e^2}<-a$ のとき 1 個

すなわち

$\boldsymbol{2e^2<a}$ **のとき 0 個**

$\boldsymbol{a=2e^2}$ **のとき 1 個**

$\boldsymbol{0\leqq a<2e^2}$ **のとき 2 個**

$\boldsymbol{-\frac{6}{e^2}<a<0}$ **のとき 3 個** **(答)**

$\boldsymbol{a=-\frac{6}{e^2}}$ **のとき 2 個**

$\boldsymbol{a<-\frac{6}{e^2}}$ **のとき 1 個**

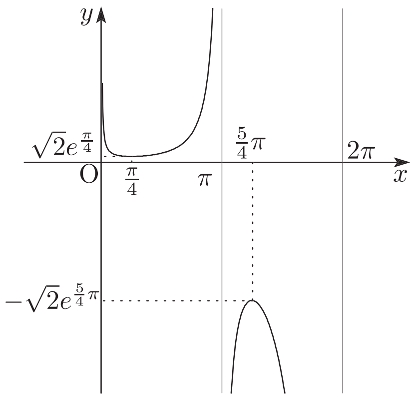
(2) $x=0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき，$e^x=k\sin x$ を満たす実数 k は存在しないので，$x \fallingdotseq 0,\ \pi,\ 2\pi$ のもとで

$$k=\frac{e^x}{\sin x}$$

$f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sqrt{2}e^x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 x}$$



であるから，$f(x)$ の増減表は下のようになり，さらに

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{\sin x}=\infty,\quad \lim_{x\to\pi-0}\frac{e^x}{\sin x}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\pi+0}\frac{e^x}{\sin x}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2\pi-0}\frac{e^x}{\sin x}=-\infty$$

であるから，グラフは右図のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$	$\searrow$	

よって，$e^x=k\sin x$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲に実数解をもたないような k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}<k<\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\qquad \text{(答)}$$

(3) $f(x)=2^x-(x^2+1)$ とおくと

$$f'(x)=2^x\log 2-2x=2(2^{x-2}\cdot 2\log 2-x)=2(2^{x-2}\cdot\log 4-x)>2(2^{x-2}-x)$$

ここで，$g(x)=2^{x-2}-x$ とおくと

$$g'(x)=2^{x-2}\log 2-1$$

$x>4$ をみたすすべての実数 x に対して $g'(x)>0$ だから，$g(x)$ は $x>4$ で単調増加関数である．

$g(4)=0$ より，$x>4$ において $g(x)>g(4)=0$ であり

$$f'(x)>2g(x)>0$$

したがって，$x>4$ で $f(x)$ も単調増加関数である．

$$f(4)=-1<0,\ f(5)=6>0$$

より，$f(x)=0$ は $4<x<5$ に実数解をただ 1 つもつ．（証終）

【3】(1) $f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$x>0$ において

$$f'(x)=e^x-1>0$$

なので，$f(x)$ は単調増加である．また，$f(0)=0$ であるから，$x>0$ において

$$f(x)=e^x-(1+x)>f(0)=0 \qquad \therefore\ e^x>1+x$$

が成り立つ．（証終）

(2) $x>0$ のもとで $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2}{2x+1}=\log(x+1)-\log x-\dfrac{2}{2x+1}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(x+1)(2x+1)^2}<0$$

であるから，$f(x)$ は単調減少である．また

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

であるから，$x>0$ のもとで

$$f(x)>\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

$$\therefore\ \frac{2}{2x+1}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

が成り立つ．（証終）

(3) 真数条件より $x+\dfrac{3}{2}>0$ すなわち $x>-\dfrac{3}{2}$ のもとで考える．$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)-\log\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2(2x+3)}$$

であり，$x>-\dfrac{3}{2}$ における $f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$-\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\log 2=\frac{1}{4}\log e^3-\log 2=\frac{1}{4}(\log e^3-\log 2^4)$$

また，$e^3>2.7^3=19.683>16=2^4$ なので $\log e^3>\log 2^4$ が成り立ち，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ が成立する．よって

$$f(x)\geqq f\left(\frac{1}{2}\right)>0 \qquad \therefore\ \log\left(x+\frac{3}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}(x+1)$$

が成り立つ．（証終）

【4】(1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x\ (x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

であるから

x	0		4	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$x>0$ のとき

$$f(x)\geqq f(4)=2(1-\log 2)>0$$

$$\therefore\quad \log x<\sqrt{x}$$

が成立する．（証終）

(2) $x>0$ のとき $\log x<\sqrt{x}$ より，十分大きい x に対して

$$0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

が成り立ち，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0\ \cdots(*)$$

が成り立つ．また，$(*)$ において $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$t\to+0$ であり，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

$$\iff\lim_{t\to+0}t\log\frac{1}{t}=0$$

$$\iff\lim_{t\to+0}-t\log t=0$$

$$\iff\lim_{t\to+0}t\log t=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ は成り立つ．（証終）

M3MA

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	