M3MB

本科１期５月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学ⅠＡⅡＢ

難関大文系数学Ｍ

4章　数列（2）

問題

【1】(1) $f(n)=-1$ のとき

$$a_{n+1}=2a_n-1 \cdots\cdots\cdots ①$$

であり

$$\alpha=2\alpha-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

とすると，① − ② より

$$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$$

よって，② より $\alpha=1$ であるから，与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

と変形できる．したがって，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-1=2\cdot 2^{n-1}$$

$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^n+1}$　　(答)

(2) $f(n)=3^n$ のとき

$$a_{n+1}=2a_n+3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$$

$\therefore\quad b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$

と変形できる．したがって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=\dfrac{a_1}{3}-1=0$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n-1=0 \text{ すなわち } b_n=1$$

よって，$a_n=3^n\cdot b_n=\boldsymbol{3^n}$　　(答)

(3) ■解答 1

$f(n)=-n$ のとき

$$a_{n+1}=2a_n-n \cdots\cdots\cdots ③$$

であり

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-(n+1) \cdots\cdots\cdots ④$$

となるので，④ − ③ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-1$$

よって，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，③ より $a_2=2a_1-1=5$ であるから

$$b_{n+1}=2b_n-1,\ b_1=5-3=2$$

$\therefore\quad b_{n+1}-1=2(b_n-1),\ b_1=2$

より数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=1$，公比 2 の等比数列である．よって

$$b_n-1=2^{n-1}$$

$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=2^{n-1}+1$

次に，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}+1) = 3 + 1\cdot\frac{1-2^{n-1}}{1-2} + n - 1$$

$$= 3 + 2^{n-1} - 1 + n - 1 = \boldsymbol{2^{n-1} + n + 1} \qquad (答)$$

であり，$n=1$ のときも成立する．

■解答２

③ の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ の階差数列の一般項は $-\dfrac{n}{2^{n+1}}$ であるので，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{k}{2^{k+1}}\right) = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{k+1}}$$

ここで，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{2^{k+1}}$ とおくと

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$\frac{1}{2}S_n = \qquad\quad \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{n-2}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n+1}} \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

であり，⑤ − ⑥ より

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \quad S_n = 1 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

よって

$$a_n = 2^n\left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \boldsymbol{2^{n-1} + n + 1} \qquad (答)$$

であり，$n=1$ のときも成立する．

■解答３

$g(n+1) = 2g(n) - n \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$

をみたす関数 $g(n)$ を考える．$g(n) = an + b$ とおくと

$$a(n+1) + b = 2an + 2b - n$$

$$an + (a+b) = (2a-1)n + 2b$$

上式が n についての恒等式であるので

$$a = 2a - 1,\ a + b = 2b$$

$\therefore \quad a = 1,\ b = 1$

よって，③ − ⑦ より

$$a_{n+1} - g(n+1) = 2\{a_n - g(n)\}$$

$\therefore\quad a_n - g(n) = 2^{n-1}\{a_1 - g(1)\} = 2^{n-1}(3-2) = 2^{n-1}$

よって

$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} + n + 1}$　　(答)

【2】(1) $n \geqq 2$ のとき

$S_n = na_n$ ………①

$S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ ………②

であり，和と一般項の関係より，$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので，① − ② より

$a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$

$\therefore\quad (n-1)(a_n - a_{n-1}) = 0$

$\therefore\quad a_n = a_{n-1}$ ($\because\quad n-1 \fallingdotseq 0$)

よって，$n \geqq 2$ のとき

$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 1$

$a_1 = 1$ を合わせると

$\boldsymbol{a_n = 1}$　　(答)

また，①より

$\boldsymbol{S_n = n}$　　(答)

(2) $n \geqq 2$ のとき

$S_n = \dfrac{n+2}{3}a_n$

$S_{n-1} = \dfrac{n+1}{3}a_{n-1}$

であり，$a_n = S_n - S_{n-1}$ より

$$a_n = \frac{n+2}{3}a_n - \frac{n+1}{3}a_{n-1} \iff (n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$$
$$\iff \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$$

よって

$$\frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{a_2}}{a_1} = \frac{n+1}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{n}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{4}}{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{1}$$

$\therefore\quad \dfrac{a_n}{a_1} = \dfrac{n(n+1)}{2 \cdot 1}$

$\therefore\quad \boldsymbol{a_n = n(n+1)}$　　(答)

また，$n = 1$ のときも成立する．

次に，$S_n = \dfrac{n+2}{3}a_n$ より

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}\qquad\text{(答)}$$

【3】(1) 与えられた数列を

$$\frac{1}{2} \left| \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right| \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \left| \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \cdots, \frac{15}{16} \right| \frac{1}{32}, \cdots$$

と分け，仕切りで区切られた部分を左から順に第 1 群，第 2 群 , … と呼ぶ．このとき，第 n 群は

$\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{3}{2^n}, \cdots, \dfrac{2^n-1}{2^n}$

となり，項数は

2^{n-1}（個）

ある．したがって，第 n 群の和は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\left\{1+3+5+\cdots+(2^n-1)\right\} &= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left\{1+(2^n-1)\right\}2^{n-1}}{2}\\ &= \frac{(2^{n-1})^2}{2^n} = \frac{2^{2n-2}}{2^n}\\ &= \boldsymbol{2^{n-2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 第 1000 項が第 n 群の m 番目であるとする．

第 k 群には 2^{k-1} 個の項があるので，第 n 群の末項は，この数列の

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1(\text{番目})$$

の数であり，第 1000 項が第 n 群にあれば

$$2^{n-1}-1 < 1000 \leqq 2^n-1 \ \cdots\cdots \ ①$$

が成立する．ここで

$$2^9-1=511,\ 2^{10}-1=1023$$

であり，2^n-1 は単調に増加するので，① をみたす n は

$$n=10$$

また，第 1000 項は，第 10 群の

$$m=1000-(2^9-1)=489(\text{番目})$$

である．よって，(1) より

$$\sum_{k=1}^{9}2^{k-2}+\frac{1}{2^{10}}\left\{1+3+\cdots+(2\cdot 489-1)\right\} = \boldsymbol{\frac{500753}{1024}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \boldsymbol{\frac{n^2 - n + 2}{2}}$$

であり，これは $n = 1$ のときも成立する．　　(答)

(2)

$$a_{n+1} = 5a_n + 4 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\alpha = 5\alpha + 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

とおくと，① − ② より

$$a_{n+1} - \alpha = 5(a_n - \alpha)$$

また，②より $\alpha = -1$ なので

$$a_{n+1} + 1 = 5(a_n + 1)$$

と変形できる．よって，数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$，公比 5 の等比数列となるので

$$a_n + 1 = 2 \cdot 5^{n-1} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 \cdot 5^{n-1} - 1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = n$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ の階差数列の一般項は n なので，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2^1} + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n + 1}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = (n^2 - n + 1)2^{n-1}}$$

であり，これは $n = 1$ のときも成立する．　　(答)

(4) ■解答 1

与えられた漸化式の両辺を 2^n で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^n} = \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{a_1}{2^0} + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

ここで，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ とおくと

$$S_n = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ \cdots \ + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ \cdots \ + (n-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

両辺の差をとって

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

すなわち

$$S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$\frac{a_n}{2^{n-1}} = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore\ \ \boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}$

であり，これは $n=1$ のときも成立する． (答)

■解答２

$$g(n+1) = 2g(n) + n \ \cdots (*)$$

をみたすような関数 $g(n)$ を考える．

$g(n) = an + b$ (a，b は実数の定数) とおくと，

$$a(n+1) + b = 2an + 2b + n \iff an + (a+b) = (2a+1)n + 2b$$

上式は n についての恒等式であるので，

$$a = 2a + 1,\ a + b = 2b$$

よって，$a = -1$，$b = -1$ であり，$g(n) = -n - 1$

与えられた漸化式から $(*)$ を辺々引くと

$$a_{n+1} - g(n+1) = 2\{a_n - g(n)\}$$

よって，

$$a_n - g(n) = 2^{n-1}\{a_1 - g(1)\} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

これより，

$a_n = \boldsymbol{3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}$ (答)

【5】 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k = n^2 a_n \ \cdots\cdots\cdots ①$

であり，$n=2$ のとき

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = 2^2 a_2$$

$\therefore\ \ a_2 = \dfrac{1}{2}$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} k a_k = (n-1)^2 a_{n-1} \ \cdots\cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$n a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \quad \therefore (n-1)\{n a_n - (n-1) a_{n-1}\} = 0$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$n a_n = (n-1) a_{n-1}$$

よって，数列 $\{n a_n\}$ は定数列で，$n \geqq 2$ のとき

$$n a_n = (n-1) a_{n-1} = \cdots = 2a_2 = a_1 = 1 \quad \therefore a_n = \frac{1}{n} \ \ (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

上式は $n=1$ のときも成立するので，$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{n}}$ (答)

【6】(1) 与えられた数列を

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\Big|\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\Big|\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\Big|\frac{1}{5},\ \cdots$$

と分け，左から順に第 1 群，第 2 群，$\cdots$ と呼ぶ．

すると，第 n 群は n 個の項があり，$\dfrac{99}{100}$ は第 100 群の 99 番目の項なので，$\dfrac{99}{100}$ という値が初めてあらわれるのは，第

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+99)+99 &= (1+2+\cdots+100)-1\\ &= \frac{100\cdot 101}{2}-1=\mathbf{5049}\ \textbf{項} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) 第 2005 項が第 n 群の m 番目にあるとすると，第 n 群の末項までに

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ (\text{個})$$

の項があるので，n は

$$\frac{(n-1)n}{2}<2005\leqq\frac{n(n+1)}{2}\iff (n-1)n<4010\leqq n(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

をみたし

$$62\cdot 63=3906,\ 63\cdot 64=4032$$

であり，$n(n+1)$ は単調に増加するので，① をみたす n の値は，$n=63$ である．

また，第 62 群までにある項数は

$$1+2+\cdots+62=\frac{62\cdot 63}{2}=1953$$

であるから第 2005 項は第 63 群の

$$m=2005-1953=52(\text{番目})$$

の項であるので，第 2005 項は，$\boldsymbol{\dfrac{52}{63}}$ (答)

5章　数列（3）

問題

【1】(1) 与えられた漸化式を

$$a_{n+1}=a_n+1 \quad \cdots ①$$

とおくと，$a_3=3$ より

$$a_4=a_3+1=4,\ a_5=a_4+1=5$$

となるので，$a_n=n$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(I) $n=3$ のとき，$a_3=3$ より成立する．

(II) $n=k\ (k\geqq 3)$ のときの成立を仮定すると

$$a_k=k$$

であり，① より

$$a_{k+1}=a_k+1=k+1$$

より，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上より，$n=3,\ 4,\ \cdots$ に対して，$a_n=n$ である．（証終）

(2) 与えられた漸化式を

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n+3}{2} \quad \cdots ②$$

とおくと，$a_1=1,\ a_2=2$ より

$$a_3=\frac{a_2+a_1+3}{2}=3,\ a_4=\frac{a_3+a_2+3}{2}=4$$

となるので，$a_n=n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(I) $n=1,\ 2$ のとき，与えられた条件より成立する．

(II) $n=k,\ k+1$ のときの成立を仮定すると

$$a_k=k,\ a_{k+1}=k+1$$

であり，② より

$$a_{k+2}=\frac{a_{k+1}+a_k+3}{2}=\frac{k+1+k+3}{2}=k+2$$

となり，$n=k+2$ のときも成立する．

以上より，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_n=n$ である．（証終）

(3) 与えられた漸化式を

$$a_{n+1}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \quad \cdots ③$$

とおくと，$a_1=1$ より

$$a_2=\frac{2}{1}a_1=2,\ a_3=\frac{2}{2}(a_1+a_2)=3$$

となるので，$a_n=n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(I) $n=1$ のとき，与えられた条件より成立する．

(II) $n\leqq m$ をみたすすべての自然数 n について $a_n=n$ が成立，すなわち

$$a_1=1,\ a_2=2,\ \cdots,\ a_m=m$$

が成り立つと仮定すると，③ より

$$a_{m+1}=\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{2}{m}(a_1+a_2+\cdots+a_m)$$

$$= \frac{2}{m}(1+2+\cdots+m) = \frac{2}{m}\cdot\frac{m(m+1)}{2} = m+1$$

となり，$n=m+1$ のときも成立する．

以上より，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_n = n$ である．　　（証終）

【2】(1) $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ より

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \ \cdots\cdots \ ①$$

が成立することを数学的帰納法により証明する．

(I) $n=1$ のとき，（左辺）$=1^3=1$，（右辺）$=1^2=1$ となり，①は成立する．

(II) $n=k$ のときの①の成立，すなわち

$$1^3+2^3+\cdots+k^3 = \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 \ \cdots\cdots \ ②$$

が成立すると仮定すると，②より

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 = \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right) = \left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

となり，$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，すべての自然数 n について①は成立する．　　（証終）

(2) 不等式

$$2^{n-1} \leqq n! \ \cdots\cdots \ ③$$

が成立することを数学的帰納法で証明する．

(I) $n=1$ のとき

（左辺）$=2^0=1$，（右辺）$=1!=1$

となり，③は成立する．

(II) $n=k$ $(k \geqq 1)$ のときの③の成立，すなわち

$$2^{k-1} \leqq k! \ \cdots\cdots \ ④$$

が成り立つと仮定する．ここで，④の両辺に 2 をかけて

$$2^k \leqq 2k! \ \cdots\cdots \ ⑤$$

であり，$2k!$ と $(k+1)!$ の大小を比較する．

$$(k+1)! - 2k! = k!\{(k+1)-2\}$$

$$= k!(k-1) \geqq 0 \quad (\because \quad k \geqq 1)$$

$\therefore \quad (k+1)! - 2k! \geqq 0$ すなわち $2k! \leqq (k+1)! \ \cdots\cdots \ ⑥$

⑤，⑥より

$$2^k \leqq 2k! \leqq (k+1)! \qquad \therefore \quad 2^k \leqq (k+1)!$$

となり，③は $n=k+1$ のときも成立する．

以上より，すべての自然数 n について③は成立する．　　（証終）

【3】与えられた漸化式を

$$a_{n+1} = 2 - \frac{a_n}{2a_n - 1} \quad \cdots ①$$

とおくと，$a_1 = 2$ より，a_2，a_3，a_4 に対して

$$a_2 = 2 - \frac{a_1}{2a_1 - 1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = 2 - \frac{a_2}{2a_2 - 1} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

$$a_4 = 2 - \frac{a_3}{2a_3 - 1} = 2 - \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$$

となり，$a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(I) $n = 1$ のとき，$a_1 = 2 = \dfrac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 1}$ より成立する．

(II) $n = k$ のとき，$a_k = \dfrac{2k}{2k-1}$ が成り立つとすると，① より

$$a_{k+1} = 2 - \frac{a_k}{2a_k - 1} = 2 - \frac{\dfrac{2k}{2k-1}}{2 \cdot \dfrac{2k}{2k-1} - 1}$$

$$= 2 - \frac{2k}{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2(k+1)}{2(k+1)-1}$$

よって，$n = k+1$ のときも成立する．

以上より

$$a_n = \boldsymbol{\frac{2n}{2n-1}} \qquad \text{(答)}$$

であることが示された．

【4】(1) $f(n) = n^7 - n$ とおく．

(I) $n = 1$ のとき

$$f(1) = 1^7 - 1 = 0$$

であるから，$f(1)$ は 7 の倍数である．

(II) $n = k$ のとき，$f(n)$ が 7 の倍数であると仮定すると

$$k^7 - k = 7M \quad (M \text{ は整数})$$

と表せて

$$f(k+1) = (k+1)^7 - (k+1)$$

$$= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1$$

$$= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 6k$$

$$= 7M + k + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 6k$$

$$= 7(M + k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$$

となり，$f(k+1)$ も 7 の倍数である．

以上より，すべての自然数 n に対して，$n^7 - n$ は 7 の倍数である．（証終）

(2) (i) $n = 1,\ 2,\ \cdots$ として 2^n，$10n^2$ を計算すると

n	1	2	3	4	$\cdots$	9	10	11	$\cdots$
2^n	2	4	8	16	$\cdots$	512	1024	2048	$\cdots$
$10n^2$	10	40	90	160	$\cdots$	810	1000	1210	$\cdots$

であるから，$2^n < 10n^2$ をみたす最大の自然数 n_0 は

$\boldsymbol{n_0 = 9}$　　(答)

であると予想できる．

(ii) $n > 9$ すなわち $n = 10,\ 11,\ \cdots$ において

$2^n > 10n^2 \cdots\cdots$ ①

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(I) $n = 10$ のとき

$2^{10} = 1024,\ 10 \cdot 10^2 = 1000$

であるから，① は成立する．

(II) $n = k\ (k \geqq 10)$ のとき，① の成立を仮定すると

$2^k > 10k^2$

であり，両辺に 2 をかけると

$2^{k+1} > 20k^2 \cdots\cdots$ ②

ここで，$10(k+1)^2$ と $20k^2$ の大小を比較する．

$$\begin{aligned} 20k^2 - 10(k+1)^2 &= 20k^2 - 10(k^2 + 2k + 1) \\ &= 10k^2 - 20k - 10 \\ &= 10\left\{(k-1)^2 - 2\right\} \end{aligned}$$

ここで，$k \geqq 10$ より $(k-1)^2 - 2 > 0$ が成立し

$20k^2 - 10(k+1)^2 > 0$

$\therefore\quad 20k^2 > 10(k+1)^2\ \cdots\cdots$ ③

よって，②, ③ より

$2^{k+1} > 10(k+1)^2$

であり，$n = k + 1$ のときも成立する．

以上より，$n > 9$ のとき不等式 $2^n > 10n^2$ が成立する．　（証終）