M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科 1 期 5 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

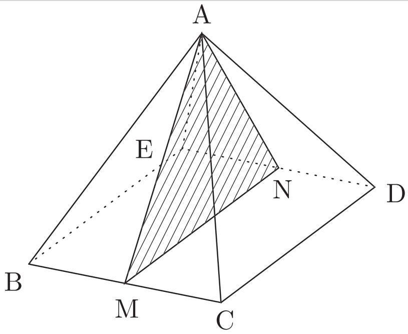
東大理系数学ⅠAⅡB

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学 T

問題



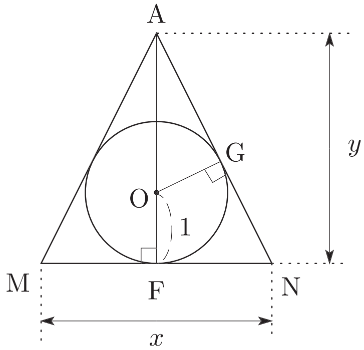
【1】正四角すいの底面を BCDE とし，底面の 4 点以外の頂点を A とする．BC，DE の中点をそれぞれ M，N として，3 点 A，M，N を含む平面でこの図形を切った切り口を考える．図のように球の中心 O はこの平面上にあり，F，G をそれぞれ MN，AN と球との接点とする．

$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DE}=\mathrm{EB}=x,\quad \mathrm{AF}=y$

とすると

$\triangle \mathrm{ANF} \backsim \triangle \mathrm{AOG}$

より



$$\mathrm{AN}:\mathrm{FN}=\mathrm{AO}:\mathrm{GO}$$

$$\iff \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2}:\frac{x}{2}=(y-1):1$$

$$\iff \frac{x}{2}(y-1)=\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}$$

$$\iff x^2(y-1)^2=x^2+4y^2$$

$$\iff x^2y(y-2)=4y^2$$

図より，$y>2$ であるから

$$x^2=\frac{4y}{y-2}$$

をみたす．したがって

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}x^2y\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{4y}{y-2}\cdot y\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{(y-2)(y+2)+4}{y-2}\\&=\frac{4}{3}\left(y+2+\frac{4}{y-2}\right)\\&=\frac{4}{3}\left\{(y-2)+\frac{4}{y-2}+4\right\}\end{aligned}$$

ここで，$y>2$ より，$y-2>0$ であるから，相加・相乗平均の関係より

$$V \geqq \frac{4}{3}\left\{2\sqrt{(y-2)\cdot\frac{4}{y-2}}+4\right\}=\frac{32}{3}$$

等号成立は

$$y-2=\frac{4}{y-2}\quad つまり\quad y=4$$

のときである．このとき

$$x=2\sqrt{2}$$

であるから，$x=2\sqrt{2}$，$y=4$ のとき

最小値 $\mathbf{\dfrac{32}{3}}$　　(答)

である．

<別解>

$V=V(y)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{y^2}{y-2}$ $(y>2)$ とすると

$$V'(y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{y(y-4)}{(y-2)^2}$$

より，増減表は次のようになる．

y	2		4	
$V'(y)$	/	$-$	0	$+$
$V(y)$	/	$\searrow$	$\frac{32}{3}$	$\nearrow$

よって，最小値は $\mathbf{\dfrac{32}{3}}$ である．　　(答)

【2】y の関数と考えて，$f(y)=(x-1)y+x^2$ とおく．

$0\leqq x\leqq 1$ では $x-1\leqq 0$ だから $f(y)$ の傾きは 0 以下であり

y が最小のとき $f(y)$ 最大，　y が最大のとき $f(y)$ 最小

$1\leqq x\leqq 2$ では $x-1\geqq 0$ だから，$f(y)$ の傾きは 0 以上であり

y が最大のとき $f(y)$ 最大，　y が最小のとき $f(y)$ 最小

まず，最大値を求める．

(i) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$f(y)$ は $y=x-1$ で最大値をとり

$$f(x-1)=(x-1)^2+x^2=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

よって，$(x,\ y)=(0,\ -1)$，$(1,\ 0)$ のとき最大でその値は 1 である．

(ii) $1\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(y)$ は $y=x$ で最大値をとり

$$f(x)=(x-1)\cdot x+x^2=2x^2-x=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

よって，$x=2$，$y=2$ のとき最大で，その値は $2\cdot 2^2-2=6$ である．

したがって

$x=2$，$y=2$ のとき，最大値 $\mathbf{6}$　　(答)

次に，最小値を求める．

(i) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$f(y)$ は $y=x$ で最小値をとり

$$f(x)=2x^2-x=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

よって，$x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{4}$ のとき最小でその値は $-\dfrac{1}{8}$ である．

(ii) $1\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(y)$ は $y=x-1$ で最小値をとり

$$f(x-1)=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

よって，$x=1$，$y=0$ のとき最小でその値は 1 である．

したがって

$x=y=\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $\mathbf{-\dfrac{1}{8}}$　　(答)

【3】$x+y=X,\ xy=Y$ とすると

$$\begin{aligned} x^2+y^2 \leqq 1 &\iff (x+y)^2-2xy \leqq 1 \\ &\iff X^2-2Y \leqq 1 \\ &\iff Y \geqq \frac{1}{2}(X^2-1) \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

また，$x,\ y$ は t の 2 次方程式

$$t^2-(x+y)t+xy=0 \iff t^2-Xt+Y=0 \quad \cdots\cdots(\star)$$

の 2 実解であるから，$(\star)$ の判別式の条件より

$$X^2-4Y \geqq 0 \iff Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \quad \cdots\cdots ②$$

また

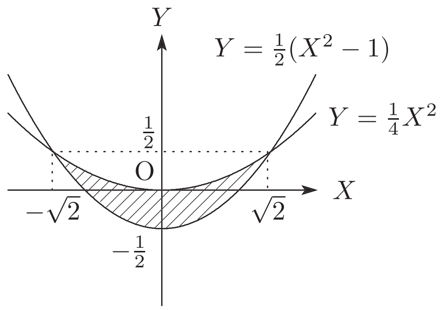
$$\begin{aligned} z=(x-a)(y-a) &\iff z=xy-a(x+y)+a^2 \\ &\iff z=Y-aX+a^2 \\ &\iff Y=aX-a^2+z \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

であるから，題意は

① かつ ② をみたす XY 平面上の領域と $(*)$ が共有点をもつ範囲

を考えることに等しい.

① かつ ② のみたす領域を D とすると，D は図の斜線部（境界を含む）のようになる.



$(*)$ は XY 平面上の傾き $a\ (>0)$ の直線を表し，D における最大・最小はその y 切片について考えればよい.

▼ z の最大値

$(*)$ の y 切片が最大となるときである.

これは，$(*)$ が XY 平面上で $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときであり

$$z=a^2+\sqrt{2}a+\frac{1}{2}$$

このとき

$$t^2+\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=0 \iff \left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$$

の 2 解が $x,\ y$ であるから，$(x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である.

▼ z の最小値

$(*)$ の y 切片が最小となるときである.

$(*)$ が XY 平面上で $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ において $Y=\dfrac{1}{2}(X^2-1)$ に接するとき，すなわち，$a=\sqrt{2}$ のときを分岐に場合分けして考える.

(i) $a \geqq \sqrt{2}$ のとき

$(*)$ が XY 平面上で $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき最小となり，その値は

$$z=a^2-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}$$

このとき

$$t^2-\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=0 \iff \left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$$

の 2 解が $x,\ y$ であるから，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である.

(ii) $0<a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$(*)$ が $Y=\dfrac{1}{2}(X^2-1)$ と接するとき最小となる.

$Y'=X$ であり，$(*)$ の傾きは a より，その接点の x 座標は a となるから，接点は $\left(a,\ \dfrac{1}{2}(a^2-1)\right)$ となり，最小値は

$$z=\frac{1}{2}(a^2-1)$$

このとき

$$t^2-at+\frac{1}{2}(a^2-1)=0$$

の 2 解が $x,\ y$ であるから，$(x,\ y)=\left(\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\ \dfrac{a\mp\sqrt{2-a^2}}{2}\right)$ (複号同順) である.

よって

最大値 $\boldsymbol{a^2+\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}}$ $\quad (x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

最小値 $\begin{cases} \boldsymbol{a \geqq \sqrt{2}} \text{ **のとき**} \\ \quad \boldsymbol{a^2-\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}} \quad (x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \boldsymbol{0<a \leqq \sqrt{2}} \text{ **のとき**} \\ \quad \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(a^2-1)} \quad (x,\ y)=\left(\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\ \dfrac{a\mp\sqrt{2-a^2}}{2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{複号同順}) \end{cases}$

(答)

【4】$A,\ B,\ C$ は，三角形の内角だから，いずれも正の値であり

$$A+B+C=\pi$$

をみたす.

(1) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\cos\dfrac{\pi-C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

であり，ここで，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\left|\dfrac{A-B}{2}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sin\frac{C}{2}>0,\quad 0<\cos\frac{A-B}{2}\leqq 1$$

したがって

$$\cos A+\cos B\leqq 2\sin\frac{C}{2}\qquad(\text{等号は，}A=B\text{ のとき})$$

さらに

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\&\leqq 2\sin\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\end{aligned}$$

$\sin\dfrac{C}{2}=x$ とおくと，$0<x<1$ であり

$$(\text{右辺})=y=-2x^2+2x+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

とすると，$x=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき y は最大となる．

よって，$C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大となり，このとき，$A=B=\dfrac{\pi}{3}$ である．

すなわち，$\triangle$ ABC が正三角形のとき最大となり，その値は

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}}\qquad(\text{答})$$

である．

(2) $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\sin\dfrac{\pi-C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

であり，ここで，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\left|\dfrac{A-B}{2}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\cos\frac{C}{2}>0,\quad 0<\cos\frac{A-B}{2}\leqq 1$$

したがって

$$\sin A+\sin B\leqq 2\cos\frac{C}{2}\qquad(\text{等号は，}A=B\text{ のとき})$$

さらに

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=\sin A+\sin B+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\&\leqq 2\cos\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=2\cos\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{C}{2}=x$ とおくと，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ であり

$$(\text{右辺})=y=2\cos x(1+\sin x)$$

とする．ここで

$$y^2=4\cos^2x(1+\sin x)^2=4(1-\sin^2x)(1+\sin x)^2=4(1-\sin x)(1+\sin x)^3$$

$\sin x=t$ とおけば，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$0<t<1\quad\cdots\cdots①$$

$y^2 = 4(1-t)(1+t)^3 = f(t)$ とおくと

$f'(t) = 4\left\{-(1+t)^3 + (1-t)\cdot 3(1+t)^2\right\} = 8(1-2t)(1+t)^2$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(t)$	/	↗	最大	↘	/

① の範囲で $f(t)$ の増減表は上の通りで，$t = \dfrac{1}{2}$ すなわち $\sin x = \dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ $(= y^2)$ は最大となる．

また, $y = 2\cos x(1+\sin x)$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき, つねに正であるから, $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき y も最大となる．これらより, $C = \dfrac{\pi}{3}$ のとき最大となり, このとき, $A = B = \dfrac{\pi}{3}$ である.

すなわち，△ ABC が正三角形のとき最大となり，その値は

$$2\cos\frac{\pi}{6}\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

である.

【5】

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \qquad \therefore\quad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$a > 0$ より，大きい方の解 z は

$$z = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

ここで

$$0.9 \leqq a \leqq 1.1, \quad 2.7 \leqq b \leqq 3.3, \quad 4.5 \leqq c \leqq 5.4$$

において，z は a についての単調減少関数，b についての単調増加関数，c についての単調減少関数であるから,

$(a,\ b,\ c) = (0.9,\ 3.3,\ 4.5)$ のとき，z の最大値は

$$\begin{aligned}\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} &= \frac{3.3+\sqrt{3.3^2-0.9\cdot 4.5}}{0.9}\\ &= \frac{33+\sqrt{33^2-9\cdot 45}}{9}\\ &= \frac{33+3\sqrt{11^2-45}}{9}\\ &= \boldsymbol{\frac{11+2\sqrt{19}}{3}}\end{aligned}$$

$(a,\ b,\ c) = (1.1,\ 2.7,\ 5.4)$ のとき，z の最小値は

$$\begin{aligned}\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} &= \frac{2.7+\sqrt{2.7^2-1.1\cdot 5.4}}{1.1}\\ &= \frac{27+\sqrt{27^2-11\cdot 54}}{11}\\ &= \frac{27+3\sqrt{9^2-11\cdot 6}}{11}\\ &= \boldsymbol{\frac{27+3\sqrt{15}}{11}}\end{aligned}$$

問題

【1】(1)

$$y' = \frac{(x^2+2x+3)'}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \boldsymbol{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$y' = 3\left(\frac{2x+3}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{2(x^2+1)-2x(2x+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{6(2x+3)^2(x^2+3x-1)}{(x^2+1)^4}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $g(x) = \tan x,\ h(x) = \sin^2 x$ とおくと

$$g'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ h'(x) = 2\sin x\cos x$$

だから

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin^2 x + \frac{\sin x}{\cos x}\cdot 2\sin x\cos x = \boldsymbol{\tan^2 x + 2\sin^2 x} \qquad \text{(答)}$$

(4) (i) 両辺を x で微分すると

$$-\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$$

ここで

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\sin^4 x}$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\boldsymbol{\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}} \qquad \text{(答)}$$

(ii) 逆関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(y\sqrt{y+1})'}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y+1}+y\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+1}}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}} \qquad \text{(答)}$$

(5) (i) $y = x^x$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y = x\log x$$

なので, 両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\therefore\quad y' = y\cdot(\log x+1) = \boldsymbol{x^x(\log x+1)} \qquad \text{(答)}$$

(ii)

$$e^y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$e^y > 0$ だから

$$1+\cos x > 0,\ 1-\cos x > 0$$

底が e の対数をとると

$$y = \frac{1}{2}\{\log(1+\cos x) - \log(1-\cos x)\}$$

x で微分すると

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} - \frac{\sin x}{1-\cos x}\right) = \frac{-\sin x(1-\cos x+1+\cos x)}{2(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sin x}} \qquad (答)$$

(6) $g(x)$ は $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数なので, $g(x) = y$ とおくと

$$x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \qquad \therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

よって

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{2}{e^y - e^{-y}}$$

ここで, $e^y + e^{-y} = 2x$ なので

$$(e^y - e^{-y})^2 = 4(x^2 - 1)$$

$y > 0$ より $e^y > e^{-y}$ だから

$$e^y - e^{-y} = 2\sqrt{x^2-1} \qquad \therefore \quad g'(x) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2-1}}} \qquad (答)$$

【2】 $\boxed{1}$

(1) $f(x) = xe^{-x}$ より

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = \boldsymbol{-(x-1)e^{-x}}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = \boldsymbol{(x-2)e^{-x}} \qquad (答)$$

$$f'''(x) = e^{-x} + (x-2)(-e^{-x}) = \boldsymbol{-(x-3)e^{-x}}$$

(2) (1) より

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x} \cdots\cdots ①$$

と推測できる.

(i) $n = 1$ のとき, (1) より, ① は成立する.

(ii) 1 以上のある自然数 n で, ① が成り立つと仮定すると

$$f^{(n+1)}(x) = \{f^{(n)}(x)\}' = \{(-1)^n(x-n)e^{-x}\}'$$

$$= (-1)^n\{e^{-x} + (x-n)(-e^{-x})\}$$

$$= (-1)^{n+1}\{-1 + (x-n)\}e^{-x} = (-1)^{n+1}\{x-(n+1)\}e^{-x}$$

よって $n+1$ でも成立する.

(i), (ii) より すべての自然数 n について ① が成り立つ. よって

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}} \qquad (答)$$

$\boxed{2}$

(1) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta), \ \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\boldsymbol{\sin\theta}}{\boldsymbol{1-\cos\theta}} \quad (ただし, \cos\theta \fallingdotseq 1) \qquad (答)$$

また

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{a(1-\cos\theta)^3}=\frac{\cos\theta-1}{a(1-\cos\theta)^3}$$
$$=-\boldsymbol{\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}}\quad (\text{ただし, } \cos\theta\fallingdotseq 1)\qquad \text{(答)}$$

(2) 与式の両辺を x で微分すると

$$4\cdot 2x+9\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}=0\cdots\cdots①$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\boldsymbol{\frac{4x}{9y}}\cdots\cdots②\quad (\text{ただし, } y\fallingdotseq 0)\qquad \text{(答)}$$

また ① の両辺を, x で微分すると

$$4+9\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right\}=0$$

よって, ② とから

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\boldsymbol{\frac{1}{y}\left(\frac{16x^2}{81y^2}+\frac{4}{9}\right)}\quad (\text{ただし, } y\fallingdotseq 0)\qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $g(x)=x-\dfrac{1}{2+\sin^2 x}$ とおくと

$$g'(x)=1+\frac{2\sin x\cos x}{(2+\sin^2 x)^2}=1+\frac{\sin 2x}{(2+\sin^2 x)^2}$$

ここで, $\left|\dfrac{\sin 2x}{(2+\sin^2 x)^2}\right|\leqq\left|\dfrac{1}{(2+0)^2}\right|=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$g'(x)>0$$

すなわち, $g(x)$ は実数全体で単調に増加する. そして

$$g(0)=-\frac{1}{2}<0,\quad g(\pi)=\pi-\frac{1}{2}>0$$

なので, 方程式 $g(x)=0$ すなわち $x=f(x)$ は, $0<x<\pi$ の範囲にただ 1 つの実数解 α をもつ. 〔証明終〕

(2) $f(x)$ は実数全体で連続かつ微分可能であるから, 平均値の定理より

$$f(a_n)-f(\alpha)=f'(c)(a_n-\alpha)$$

をみたす c が a_n と α の間に存在する ($a_n=\alpha$ ならば, 任意の c に対して成り立つ). したがって, $\alpha=f(\alpha)$, $a_{n+1}=f(a_n)$ より

$$a_{n+1}-\alpha=f'(c)(a_n-\alpha)\qquad\therefore\quad |a_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||a_n-\alpha|$$

そして, $|f'(c)|=\left|\dfrac{\sin 2c}{(2+\sin^2 c)^2}\right|\leqq\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_n-\alpha|$$ 〔証明終〕

(3) $n=1, 2, \cdots$ に対して

$$0\ \leqq\ |a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-\alpha|\ \leqq\ \left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-\alpha|\ \leqq\ \cdots$$
$$\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|\ =\ |1-\alpha|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

そして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|1-\alpha|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから, はさみうちの原理より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 〔証明終〕

【4】$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ とすると

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)^2}$$

ここで，$(x-a)^2>0$ だから $g'(x)$ の正負は $g'(x)$ の分子の正負と一致する.

ここで

$$h(x)=f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)$$

とすると

$$\begin{aligned}h'(x)&=f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)\\&=f''(x)(x-a)\end{aligned}$$

ここで

$$f''(x)>0,\quad x-a>0$$

だから

$$h'(x)>0$$

よって $h(x)$ は増加関数で

$$h(a)=0 \qquad \therefore \quad h(x)>0$$

よって $g'(x)>0$ だから $a<x<b$ で $g(x)$ すなわち

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

は増加する. 〔証明終〕

【5】(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1+e^{-2(x-1)}\right)+x\cdot(-2)e^{-2(x-1)}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{1+e^{-2(x-1)}(1-2x)\right\}$

ここで，$x>\dfrac{1}{2}$ ならば

$$f'(x)<\frac{1}{2}$$

そして

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left\{-2(1-2x)e^{-2(x-1)}+(-2)e^{-2(x-1)}\right\}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

だから，$y=f'(x)$ の増減表は下のようになる.

x	$\frac{1}{2}$		1	
$f''(x)$		$-$		$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

以上より題意は示された. 〔証明終〕

(2) (1) より $x>\dfrac{1}{2}$ で $y=f(x)$ は単調に増加する.

$x_0>\dfrac{1}{2}$ であり，$x_k>\dfrac{1}{2}$ と仮定すると

$$x_{k+1}=f(x_k)>f\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$$

だから，帰納的に

$$x_n>\frac{1}{2}$$

そして，$x_n \fallingdotseq 1$ のとき平均値の定理より

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$$

をみたす 1 と x_n の間の実数 c が存在する．

(1) より，$f'(c)<\frac{1}{2}$ だから

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}<\frac{1}{2}$$

$x_{n+1}=f(x_n)$，$f(1)=1$ だから

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}<\frac{1}{2}$$

よって

$$|x_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|x_n-1|$$

$x_n=1$ のときを含めて

$$|x_{n+1}-1|\leqq\frac{1}{2}|x_n-1|$$

これを繰り返し用いて

$$0\leqq|x_n-1|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1|$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ だから

$$0\leqq\lim_{n\to\infty}|x_n-1|\leqq 0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}x_n=1$$

〔証明終〕

添削課題

【1】

$$x^2=-2x^2+3ax+6a^2$$

より

$$x^2-ax-2a^2=0 \iff (x-2a)(x+a)=0$$

よって，$y=x^2$ と $y=-2x^2+3ax+6a^2$ は常に交点をもち，その x 座標は

$$x=-a,\ 2a$$

である．

まず，最大値について考える．

D 内では常に

$$x^2 \leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

である．また，$x\ (-a \leqq x \leqq 2a)$ をある値に固定すると $x+y$ が最大となるのは，y をできるだけ大きくした場合だから

$$y=-2x^2+3ax+6a^2$$

上の点を考えればよい．

$x+y=k$ とすると，

$$\begin{aligned} k&=x+y\\ &=x+(-2x^2+3ax+6a^2)\\ &=-2x^2+(3a+1)x+6a^2\\ &=-2\left(x-\frac{3a+1}{4}\right)^2+\frac{(3a+1)^2}{8}+6a^2\\ &=-2\left(x-\frac{3a+1}{4}\right)^2+\frac{57a^2+6a+1}{8} \end{aligned}$$

これより，$\dfrac{3a+1}{4} \leqq 2a$ すなわち $a \geqq \dfrac{1}{5}$ のとき

$x=\dfrac{3a+1}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{57a^2+6a+1}{8}}$

$\dfrac{3a+1}{4} > 2a$ すなわち $a < \dfrac{1}{5}$ のとき

$x=2a$ で最大値 $\boldsymbol{4a^2+2a}$

次に最小値について考える．

x を固定すると $x+y$ が最小となるのは，y をできるだけ小さくした場合だから

$$y=x^2$$

上の点を考えればよい．ここで

$$k=x+y=x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

より，$-a \leqq -\dfrac{1}{2}$ すなわち $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$x=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$

$-a > -\dfrac{1}{2}$ すなわち $a < \dfrac{1}{2}$ のとき

$x=-a$ で最小値 $\boldsymbol{a^2-a}$

問題

【1】(1) 三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

これを与式に代入すると，$b+c\neqq 0$ より

$$\sqrt{3}(b+c)=2a\left(\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right) \iff \frac{a}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\quad A=\mathbf{60^\circ}$　(答)　($\because$　A は鋭角)

(2)　$\mathrm{BP}:\mathrm{CP}=c:b\quad\cdots\cdots(*)$

余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}=49 \qquad \therefore\quad a=7$$

$(*)$ より

$$\mathrm{BP}=a\cdot\frac{c}{b+c}=7\times\frac{5}{13}=\frac{35}{13},\quad \mathrm{PC}=7-\frac{35}{13}=\frac{56}{13}$$

次に $\mathrm{AP}=x$ とおき，三角形 ABP，APC において余弦定理を用いると

$$\frac{5^2+x^2-\left(\frac{35}{13}\right)^2}{2\cdot5\cdot x}=\frac{8^2+x^2-\left(\frac{56}{13}\right)^2}{2\cdot8\cdot x}\ \therefore\quad x^2=\frac{40^2}{13^2}\cdot3\ \therefore\quad x=\frac{40}{13}\sqrt{3}$$

したがって，△ ABP の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{40}{13}\sqrt{3}\cdot\sin30^\circ=\frac{50}{13}\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①$$

三角形 ABP の内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{r}{2}\left(5+\frac{35}{13}+\frac{40}{13}\sqrt{3}\right)=\frac{r(50+20\sqrt{3})}{13}\quad\cdots\cdots②$$

①，② より

$$r=\mathbf{\frac{25\sqrt{3}-30}{13}}\qquad\text{(答)}$$

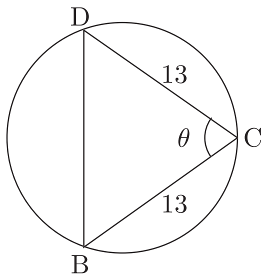
さらに三角形 ABP の外接円の半径は，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{2\sin30^\circ}=\mathbf{\frac{35}{13}}\qquad\text{(答)}$$

【2】 $\angle\mathrm{BCD}=\theta$ (ただし，$0^\circ<\theta<180^\circ$) とおく．△ BCD に正弦定理・余弦定理を用いて，それぞれ

$$\begin{cases}\mathrm{BD}=2\cdot\dfrac{65}{8}\sin\theta=\dfrac{65}{4}\sin\theta & \cdots\cdots ① \\ \mathrm{BD}^2=13^2+13^2-2\cdot13\cdot13\cos\theta=2\cdot13^2(1-\cos\theta) & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①，② より BD を消去して



$$\left(\frac{65}{4}\sin\theta\right)^2=2\cdot13^2(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \frac{5^2\cdot13^2}{4^2}(1-\cos^2\theta)=2\cdot13^2(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \frac{25}{16}(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=2(1-\cos\theta)$$

$\cos\theta\fallingdotseq 1$ より

$$1+\cos\theta=\frac{32}{25}\qquad\therefore\quad\cos\theta=\frac{7}{25}$$

② より

$$\mathrm{BD}=\sqrt{2\cdot13^2\left(1-\frac{7}{25}\right)}=\frac{78}{5}$$

$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，四角形 ABCD の周の長さが 44 であるから

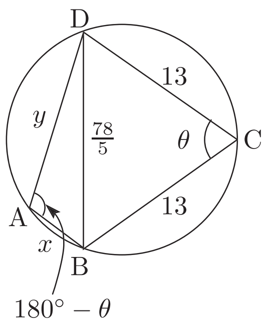
$$x+y+13+13=44\qquad\therefore\quad x+y=18\quad\cdots\cdots ③$$

△ ABD に余弦定理を用いて

$$\left(\frac{78}{5}\right)^2=x^2+y^2-2xy\cos(180^\circ-\theta)=(x+y)^2-2xy+2xy\cos\theta$$

$$=18^2-2xy+2xy\cdot\frac{7}{25}\qquad(\because\ ③)$$

したがって



$$78^2=90^2-36xy$$

$$\therefore\quad 36xy=90^2-78^2=(90+78)(90-78)=168\cdot12$$

$$\therefore\quad xy=56\quad\cdots\cdots ④$$

③，④ より，x，y は t の 2 次方程式

$$t^2-18t+56=0\quad\cdots\cdots ⑤$$

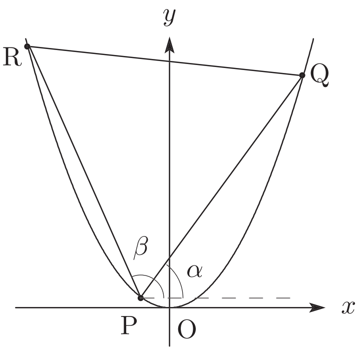
の 2 つの解で，⑤ を解くと

$$(t-4)(t-14)=0\qquad\therefore\quad t=4,\ 14$$

したがって，残りの 2 辺 AB と DA の長さは

4 と 14　または　**14 と 4**　(答)

【3】PQ, PR が x 軸の正方向となす角を α, β とすると



$$\begin{aligned}\tan\beta &= \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

である．また

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

である．ここで，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix}+\frac{a}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+\frac{a}{\sqrt{3}}\\ t^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix}+\frac{a}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+\frac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a\\ t^2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a\end{pmatrix}$$

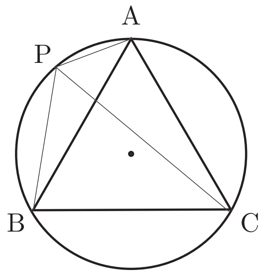
Q, R はともに $y=x^2$ 上の点であるから

$$\begin{cases} t^2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \left(t+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\\ t^2+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a = \left(t+\dfrac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a\right)^2\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} t = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}a}{6}\\ \dfrac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}t+\dfrac{7-2\sqrt{6}}{12}a = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\end{cases}$$

これを解いて，$a = \boldsymbol{\dfrac{18}{5}}$ である．　　(答)

【4】(1) 図形の対称性から，点 P が外接円の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ($\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の C を含まない側) 上にある場合について考えればよい．



$\angle\mathrm{PAB} = \theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

とおくと

$\angle\mathrm{PCA} = \dfrac{\pi}{3} - \theta, \quad \angle\mathrm{PAC} = \dfrac{\pi}{3} + \theta$

である．

正弦定理を用いて

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP} \\
&= 2R\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + 2R\sin\theta + 2R\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \\
&= 2R\left\{\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right\} \\
&= 2R\left\{\sin\theta + 2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}\right\} \\
&= 2R\left(\sin\theta + 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\theta\right) \\
&= 2R\left(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right) \\
&= 4R\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

したがって，$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき最大となる．

よって，点 P が

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$**，**$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$**，**$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$**の中点**　　(答)

のとき最大となり，その値は

$\boldsymbol{4R}$　　(答)

である．

(2) $\quad \mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$

$$= 8R^3\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

$$= 8R^3\sin\theta\cdot\left[-\frac{1}{2}\left[\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}-\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}\right]\right]$$

$$= -4R^3\sin\theta\left(\cos\frac{2}{3}\pi-\cos 2\theta\right)$$

$$= -4R^3\sin\theta\left(-\frac{1}{2}+2\sin^2\theta-1\right)$$

$$= 2R^3(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$$

$$= 2R^3\sin 3\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ より，$0\leqq 3\theta\leqq\pi$ であるから，$\sin 3\theta=1$，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大となる．

よって，点 P が

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$の中点 　　(答)

のとき最大となり，その値は

$\boldsymbol{2R^3}$ 　　(答)

である．

＜別解＞

(1) $\quad \mathrm{AP}+\mathrm{BP}=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+2R\sin\theta$

$$= 2R\left\{\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}$$

$$= 2R\cdot 2\sin\frac{\theta+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 4R\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$$

$$= 2R\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right\}$$

$$= 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

$$= \mathrm{CP}$$

となるから

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=2\mathrm{CP}$

であり，これが最大になるのは，CP が円の直径となるときであり，P は $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中点である．

このとき，最大値は

$2\cdot 2R=\boldsymbol{4R}$ 　　(答)

である．

(2) 相加・相乗平均より

$$\frac{\mathrm{AP}+\mathrm{BP}}{2}\geqq\sqrt{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP} \leqq \left(\frac{\mathrm{AP}+\mathrm{BP}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{CP}^2$$

等号は，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ のとき，つまり，点 P が $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中点のとき成立する．このとき，CP は円の直径となり，$\mathrm{CP}=2R$ となる．

したがって

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP} \leqq \frac{1}{4}\mathrm{CP}^3$$

であり，最大値は

$$\frac{1}{4}\cdot(2R)^3 = \boldsymbol{2R^3} \qquad \text{(答)}$$

である．

５章－２　極値，最大・最小

問題

【1】(1) $f(x) = x^b e^{ax}$ より

$$f'(x) = bx^{b-1}e^{ax} + x^b \cdot ae^{ax} = x^{b-1}e^{ax}(ax+b)$$

よって, $f(x)$ が $x=1$ で極値をもつとき

$$f'(1) = e^a(a+b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a+b=0$$

そして

$$\begin{aligned} f''(x) &= \{b(b-1)x^{b-2}e^{ax} + bx^{b-1} \cdot ae^{ax}\} \\ &\qquad + (bx^{b-1} \cdot ae^{ax} + x^b \cdot a^2 e^{ax}) \\ &= x^{b-2}e^{ax}\{a^2x^2 + 2abx + b(b-1)\} \end{aligned}$$

なので, $f(x)$ のグラフが 2 つの変曲点をもつとき, x の方程式

$$a^2x^2 + 2abx + b(b-1) = 0 \quad \cdots ①$$

が $x>0$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつ. よって, $a \fallingdotseq 0$ より判別式をとると

$$(ab)^2 - a^2b(b-1) = a^2b > 0 \qquad \therefore \quad b>0 \ \ (\because a^2>0)$$

そして, 実数解がいずれも $x>0$ の範囲にあるので, 解と係数の関係から

$$-\frac{2b}{a} > 0 \quad \cdots ②, \qquad \frac{b(b-1)}{a^2} > 0 \quad \cdots ③$$

すると, $a+b=0$ かつ $b>0$ なので

$$-\frac{2b}{a} = -\frac{2b}{-b} = 2$$

より②はつねに成り立ち, 一方③において $a^2>0,\ b>0$ より

$$b>1$$

以上まとめると, $a,\ b$ のみたす関係式は

$\boldsymbol{a+b=0,\quad b>1}$　　(答)

(2) $b=-a$ を①に代入すると

$$b^2x^2 - 2b^2x + b(b-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b(x-1)^2 = 1$$

よって, $x = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ となるので, これを $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$\beta - \alpha = \frac{2}{\sqrt{b}} = 1$$

よって

$b = 2^2 = \mathbf{4} \qquad \therefore \quad a = \mathbf{-4}$　　(答)

このとき

$$f(x) = x^4e^{-4x}$$

$$f'(x) = -4x^3e^{-4x}(x-1)$$

$$f''(x) = 4x^2e^{-4x}(4x^2-8x+3) = 4x^2e^{-4x}(2x-1)(2x-3)$$

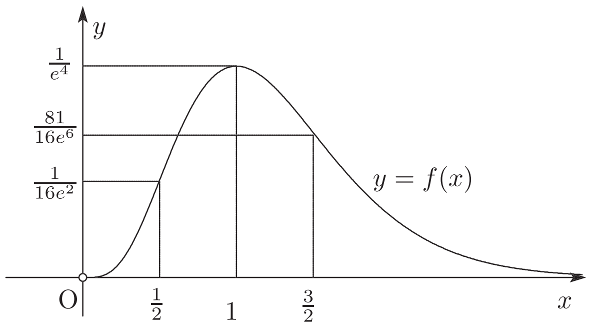
なので, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		⤴		↗		↘		⤵

そして，$\lim_{x\to+0} f(x)=0$ であり，$f(x)=(xe^{-x})^4$ より，

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad (\because \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0)$$

なので，$f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる．



【2】

$$y=1+\frac{2ax}{x^2-ax+1}$$

と変形でき

$$y'=\frac{2a(1-x^2)}{(x^2-ax+1)^2}$$

である．

ここでまず，分母を 0 にする値があるか否かを考える．

(i)　$a^2-4>0$ の場合

$x^2-ax+1=0$ は 2 実数解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもち

$x\to\alpha-0$ では $x^2-ax+1\to+0$，　$x\to\alpha+0$ では $x^2-ax+1\to-0$

そして，分子は $x\to\alpha$ で $2ax\to 2a\alpha\fallingdotseq 0$ だから，y は $x=\alpha$ の両側で異符号の無限大になる．

すなわち，$+\infty$，$-\infty$ になるから，最大値も最小値も存在しない．

(ii)　$a^2-4=0$ の場合

$$y=\left(\frac{x\pm1}{x\mp1}\right)^2\geqq 0$$

であり，$x\to\pm1$ のとき，$y\to+\infty$ だから，最大値は存在しないが，最小値は存在し

$x=\mp1$ のとき $y=0$

をとる．（以上，複号同順）

(iii)　$a^2-4<0$ の場合

$-2<a<0$ では

$x<-1$ で $y'>0$, $-1<x<1$ で $y'<0$, $x>1$ で $y'>0$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=1$

だから

$x=-1$ で最大,　$x=1$ で最小

となる.

$0<a<2$ では

$x<-1$ で $y'<0$, $-1<x<1$ で $y'>0$, $x>1$ で $y'<0$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=1$

だから

$x=-1$ で最小,　$x=1$ で最大

$a=0$ ではつねに $y=1$.

よって，最大値が存在するのは

$|a|<2$

最小値が存在するのは

$|a| \leqq 2$

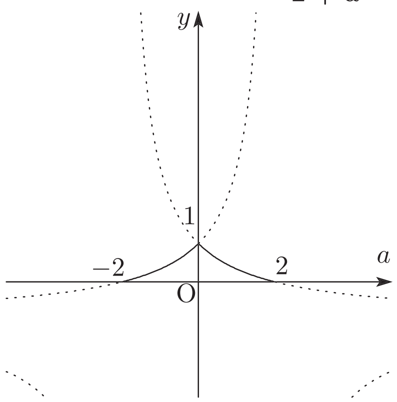
の場合だから，求める a の値の範囲は

$\boldsymbol{|a| \leqq 2}$　　(答)

最小値は

$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{2+a}{2-a}}$

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{2-a}{2+a}}$　　(答)



【3】$f(x) = \sin^2 x + a\cos x$ とおくと

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - a\sin x$$

$$= 2\sin x\left(\cos x - \frac{a}{2}\right)$$

(i)　$a \geqq 2$ のとき

$$\cos x - \frac{a}{2} \leqq 0$$

だから，増減表は下のようになる．

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	$-a$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$-a$

よって

$x = 0$ で最大値 $\boldsymbol{a}$,

$x = -\pi$，π で最小値 $\boldsymbol{-a}$　　(答)

(ii)　$0 < a < 2$ のとき

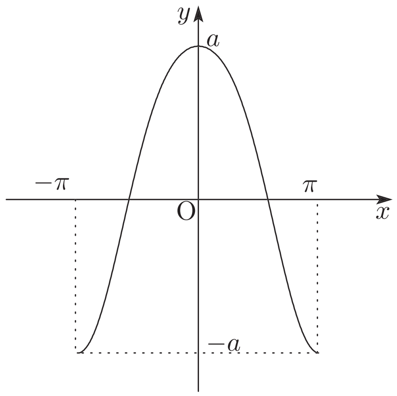
$\cos x = \dfrac{a}{2}$ となる x を $-\alpha$，α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，増減表は下のようになる．

x	$-\pi$		$-\alpha$		0		α		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$	$-a$	$\nearrow$	$1+\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$1+\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	$-a$

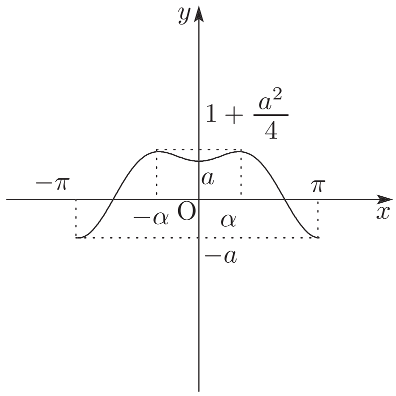
よって，$\cos x = \dfrac{a}{2}$ となる x で

最大値 $\boldsymbol{1 + \dfrac{a^2}{4}}$

$x = -\pi$，π で最小値 $\boldsymbol{-a}$.　　(答)

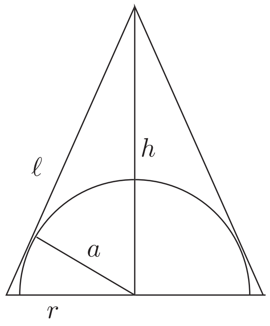


$a \geqq 2$ のとき



$0 < a < 2$ のとき

【4】円すいの軸を含む断面を考えて下の図のようになる．



円すいの底面の半径を r，母線の長さを ℓ とすると，表面積 S は

$$S = \pi r\ell + \pi r^2$$

と表せ，円すいの高さを h とすると上の図から

$$\ell^2 = r^2 + h^2, \quad a\ell = rh$$

だから

$$a^2(r^2 + h^2) = a^2\ell^2 = r^2h^2$$

これより

$$r^2 = \frac{a^2h^2}{h^2 - a^2} \qquad \therefore \quad r = \frac{ah}{\sqrt{h^2 - a^2}},$$

$$\ell = \frac{rh}{a} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 - a^2}}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi a h^3}{h^2 - a^2} + \frac{\pi a^2 h^2}{h^2 - a^2} = \frac{\pi a h^2(h + a)}{h^2 - a^2} \\ &= \frac{\pi a h^2}{h - a} \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dh} = \pi \cdot a \cdot \frac{2h(h - a) - h^2}{(h - a)^2} = \pi \cdot a \cdot \frac{h(h - 2a)}{(h - a)^2}$$

h の変域は $h > a$ であり，増減表は下のようになるから

h	a		$2a$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	$4\pi a^2$	$\nearrow$	$+\infty$

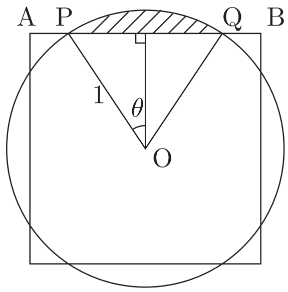
求める高さは

$2a$ (答)

である．

【5】(1) まず, 右図の斜線部分の面積を T とおくと

$$T = (\text{おうぎ形 OPQ}) - \triangle\,\text{OPQ}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$



であるから

$$S_1 = 4T = 4\theta - 2\sin 2\theta$$

一方, 正方形と円の共通部分の面積は, 円の面積から S_1 を除いて

$$\pi - S_1$$

であるから, これを正方形の面積から除いて

$$S_2 = (2\cos\theta)^2 - (\pi - S_1)$$

よって

$$S = S_1 + S_2 \;=\; (2\cos\theta)^2 + 2S_1 - \pi$$
$$= \mathbf{4\cos^2\boldsymbol{\theta} - 4\sin 2\boldsymbol{\theta} + 8\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\pi}} \qquad (\text{答})$$

(2) 与えられた条件より, θ のとり得る値の範囲は

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$$

であり, $S = S(\theta)$ とおくと, (1) より

$$S'(\theta) = 8\cos\theta\cdot(-\sin\theta) - 8\cos 2\theta + 8$$
$$= 8(-\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta) \qquad (\because\ 1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta)$$
$$= 8\sin\theta(2\sin\theta - \cos\theta)$$

そこで

$$2\sin\theta - \cos\theta = 0$$

をみたす θ について考えると, これと $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\cos\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{複号同順})$$

となり, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲では

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる θ が存在するので, これを α とおくと, $S(\theta)$ の増減は下表のようになり, $S(\theta)$ は $\theta = \alpha$ のとき最小になる.

θ	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$S(\theta)$		↘	極小	↗	

したがって, 求める正方形の 1 辺の長さは

$$2\cos\alpha = \frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】PQ が最小となるとき，PQ と $l : y = x - c$ は垂直となる．

PQ と l が垂直となるとき，P から l に下ろした垂線の足を M とすると，PQ=2PM となる．

よって，PM が最小となるときを考えればよい．

$c > \dfrac{1}{4}$ より A と l は交わらないので，P$(s,\ s^2)$ と l の距離を考えればよく，これが最小となるのは P が A と $y = x + k$ (k は実数) との接点となるときである．A の P における接線の傾きは $2s$ であり，これが 1 になるとき

$$s = \frac{1}{2}$$

だから，P$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ のときの，P と l の距離を考えればよく，これは

$$\frac{\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - c\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|c - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c - \frac{1}{4}\right)$$

だから，求める最小値は，$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{PM}$ より

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(c - \frac{1}{4}\right)}$$

６章－１　図形（２）

問題

【1】$\boxed{1}$

(1) 条件

$$\begin{cases} 0 \leqq s+t \leqq 1 & \cdots ① \\ s \geqq 0,\ t \geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

の下で

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\,\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b}) \ \cdots ③$$

の通過領域を考える.

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと, 4 角形 CBDA は平行 4 辺形で, ③ は

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\,\vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \cdots ③'$$

図 1

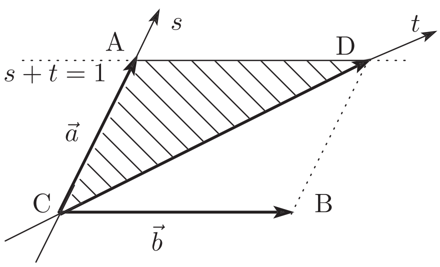


図 1 のように斜交座標 $(s,\ t)$ で考えると, ①, ②, ③$'$ より, 点 P は △ CDA の周と内部を動く. よって, 点 P の存在範囲は図 1 の斜線部で境界を含む.　　(答)

(2) まず, $s \geqq 0, t \geqq 0$ であるから, 点 P の存在領域は, ∠ACB の内部 (境界である直線 CA, CB を含む) に含まれる.

この下で, 条件 $0 \leqq 2s+3t \leqq 4$ を考える. $2s+3t=k$ とおく.

まず, $k=0$ のとき, $s \geqq 0, t \geqq 0$ であるから, $s=t=0$ と定まり, このときは点 P は頂点 C に一致する.

次に, $k \neq 0$ の場合について, $k>0$ であるから, 条件 $0<k=2s+3t \leqq 4$ の両辺を k で割って

$$0 < \frac{2s}{k} + \frac{3t}{k} = 1 \leqq \frac{4}{k}$$

このとき, ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ について

$$\vec{p} = s\,\vec{a} + t\,\vec{b} = \frac{2s}{k} \cdot \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{3t}{k} \cdot \frac{k}{3}\vec{b}$$

と変形すれば, $\mathrm{A}_k\left(\frac{k}{2}\vec{a}\right)$, $\mathrm{B}_k\left(\frac{k}{3}\vec{b}\right)$ として

$$\vec{p} = \frac{2s}{k}\overrightarrow{\mathrm{CA}_k} + \frac{3t}{k}\overrightarrow{\mathrm{CB}_k}, \quad \frac{2s}{k} + \frac{3t}{k} = 1$$

より, 3 点 $(\mathrm{PA}_k\mathrm{B}_k)$ は共線である. この直線を l_k と表す. 図 2 の左側を参照せよ.

$0 < k \leqq 4$ であるから

$$0 < \frac{k}{2} \leqq 2, \quad 0 < \frac{k}{3} \leqq \frac{4}{3}$$