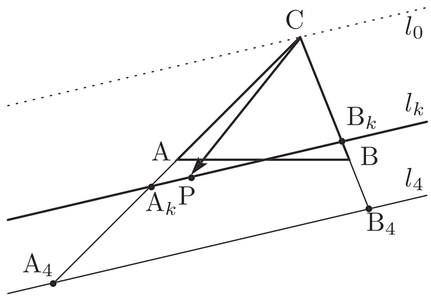
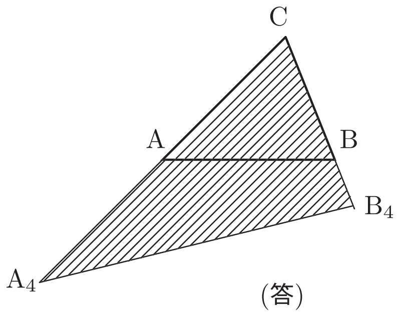
図 2





となり，$\overrightarrow{\mathrm{CA_4}} = 2\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB_4}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{b}$ として 2 点 A_4, B_4 を定めれば，直線 $l_k : \mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ は直線 $l_4 : \mathrm{A}_4\mathrm{B}_4$ に平行に移動する．

従って，この場合の点 P の存在領域，つまりベクトル $\overrightarrow{p}$ の通過領域は l_0 と l_4 で挟まれた帯状領域となる．ただし，境界 l_0 を含まず，l_4 を含む．

これと，∠ACB の内部及び境界からなる領域との共通部分が求める領域となる．図 2 の右側になる．

以上をまとめて，求める領域は

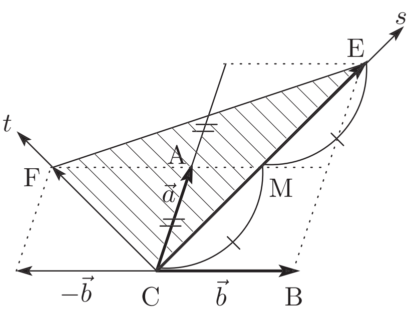
$\overrightarrow{\mathrm{CA_4}} = 2\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB_4}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{b}$ として，△ $\mathrm{CA_4B_4}$ の内部及び周上．　　(答)

(3) 条件の下で

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= (2s+t)\overrightarrow{a} + (s-t)\overrightarrow{b} \quad \cdots ④\\ &= s(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + t(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\end{aligned}$$

と変形される．

図 3



$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{CE}}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{CF}}$ とおくと, ④は, $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CE}} + t\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ で, (1) と同様に考えて, 点 P は △ CFE の周と内部を動く．

よって, 点 P の存在範囲は図 3 の斜線部で境界を含む．　　(答)

$\boxed{\mathbf{2}}$

A$(\overrightarrow{a})$, B$(\overrightarrow{b})$, C$(\overrightarrow{c})$, P$(\overrightarrow{p})$, Q$(\overrightarrow{q})$, R$(\overrightarrow{r})$ とし，$0 < s < 1$, $0 < t < 1$, $0 < u < 1$ の下で

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = s : (1-s)$, $\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = t : (1-t)$, $\mathrm{CR} : \mathrm{RA} = u : (1-u)$

とすると，P, Q, R の位置ベクトルについて

$\overrightarrow{p} = (1-s)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b}$, $\quad \overrightarrow{q} = (1-t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$, $\quad \overrightarrow{r} = (1-u)\overrightarrow{c} + u\overrightarrow{a}$

を得る．

△ PQR の重心を G$(\overrightarrow{g})$，△ ABC の重心を $\mathrm{G_0}(\overrightarrow{g_0})$ とすれば，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g} &= \frac{1}{3}\{(1-s+u)\overrightarrow{a} + (1-t+s)\overrightarrow{b} + (1-u+t)\overrightarrow{c}\}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) + \frac{1}{3}\{s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + t(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) + u(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})\}\\ &= \overrightarrow{g_0} + \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\end{aligned}$$

いま

$\overrightarrow{\mathrm{G_0A_0}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{G_0B_0}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{G_0C_0}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

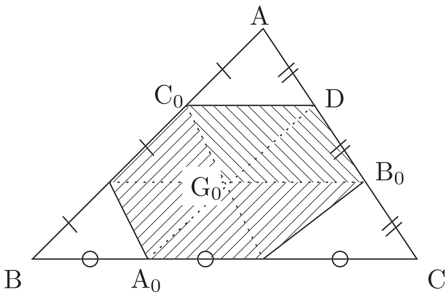
とすれば，$\mathrm{A_0}$, $\mathrm{B_0}$, $\mathrm{C_0}$ はそれぞれ BC，CA，AB を $1:2$ に分ける点である．

ここで

$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g_0} + s\overrightarrow{\mathrm{G_0A_0}} + t\overrightarrow{\mathrm{G_0B_0}} + u\overrightarrow{\mathrm{G_0C_0}}$

が成り立ち，$t\overrightarrow{\mathrm{G_0B_0}} + u\overrightarrow{\mathrm{G_0C_0}}$ は $s = 0$, $0 < t < 1$, $0 < u < 1$ のとき，平行 4 辺形 $\mathrm{G_0B_0DC_0}$ を通過する (境界含まず)．$0 < s < 1$ で s を動かせば，この平行 4 辺形は頂点 $\mathrm{G_0}$ を線分 $\mathrm{G_0A_0}$ におきながら平行移動する．

図 4



以上より，求める領域は図 4 の 6 角形（境界含まず）となる．

【2】点 A を基準とした位置ベクトル $\mathrm{B}(\overrightarrow{b}), \mathrm{C}(\overrightarrow{c}), \mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ を定める.

(1) 第 1 の条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} \leqq 0 \iff \overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}\right) \leqq 0$$
$$\iff \left|\overrightarrow{p}\right|^2 - \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c} \leqq 0$$
$$\iff \left|\overrightarrow{p}-\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right|^2 \leqq \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{c}\right|^2 = \frac{25}{4}$$

が成り立つから，点 P の存在領域は $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)$ を中心とし，半径が $\frac{5}{2}$ の円の内部及び周上である.

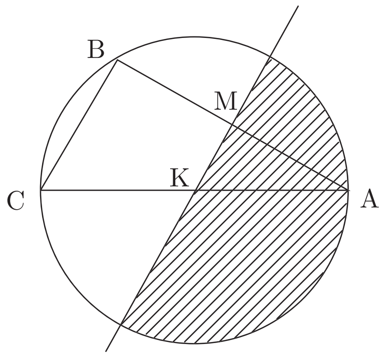
第 2 の条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \leqq \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} \iff \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p} \leqq -\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)$$
$$\iff 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \leqq 0$$
$$\iff \overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{b}}{2}\right) \leqq 0$$

であるから，AB の中点を M として

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}} \leqq 0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ のなす角を θ とすれば $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である.



つまり，AB の垂直 2 等分線を境界とする半平面のうち，A を含む片側である．以上より，求める領域は上図（境界を含む）のようになる.

(2) $\triangle$ PBC の面積が最大となるのは，P が BC の垂直 2 等分線と優弧 BAC の交点にあるときである．辺 BC の中点を N として

$$\mathrm{BN} = \frac{3}{2} \qquad \therefore\ \mathrm{NK} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4\cdot 1} = 2$$

であるから

$$\mathrm{NP} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

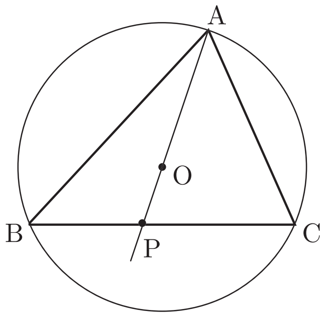
よって，$\triangle$ PBC の面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{9}{2} = \mathbf{\frac{27}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 条件式より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots ①$$

である.



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく. ① より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P が BC 上にあるので

$$-\frac{3}{2}k+(-2k)=1 \qquad \therefore \quad k=-\frac{2}{7}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって, P は

線分BCを4 : 3 に内分する (答)

(2) 条件式より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\left(3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

これと $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ より

$$4=\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=9+16+24\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{7}{8}$$

よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{16}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\frac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\boldsymbol{\frac{9}{7}} \qquad \text{(答)}$$

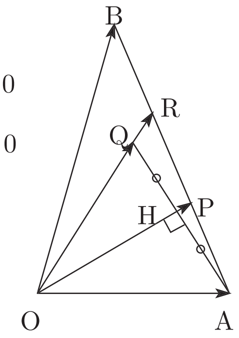
また

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=1+1-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) AQ と OP の交点を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおけて，



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0 &\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(k\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0\\ &\iff k\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ &\iff k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{6}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\frac{4}{9}\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\frac{1}{9}\left|\vec{b}\right|^2=\frac{8}{9}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{15}{16}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{16}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$$

そして，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{5}{8}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{a}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{4}t\vec{a}+\frac{5}{8}t\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

とおける．また，R は AB 上にもあるので

$$\frac{1}{4}t+\frac{5}{8}t=1\qquad\therefore\quad t=\frac{8}{7}$$

① により

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{b}}\qquad\text{(答)}$$

【5】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

より，α 上の任意の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とすると，実数 $m,\ n$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表される．

したがって

$$\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2m+n\\m-2n\\3n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x-2=-2m+n & \cdots\cdots①\\ y-1=m-2n & \cdots\cdots②\\ z-1=3n & \cdots\cdots③\end{cases}$$

③ より

$$n=\frac{1}{3}(z-1)\quad\cdots\cdots③'$$

②, ③′ より

$$m=y-1+2\cdot\frac{1}{3}(z-1)=y+\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}\quad\cdots\cdots④$$

③′, ④ を ① に代入して，$m,\ n$ を消去すると

$$x-2=-2\left(y+\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{3}(z-1)$$

$$\iff\quad \boldsymbol{x+2y+z-5=0}\qquad (答)$$

＜別解＞

α は点 (2, 1, 1) を通るので，その方程式は

$$a(x-2)+b(y-1)+c(z-1)=0$$

とおける．上式に α 上の点 B, C の座標を代入して

$$\begin{cases}-2a+b=0\\ a-2b+3c=0\end{cases}$$

これを解いて

$$a:b:c=a:2a:a=1:2:1$$

したがって，α の方程式は

$$(x-2)+2(y-1)+(z-1)=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x+2y+z-5=0}\qquad (答)$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=(-2)^2+1^2+0^2=5$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=1^2+(-2)^2+3^2=14$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-2-2+0=-4$$

したがって，△ ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times 14-(-4)^2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{6}}\qquad (答)$$

(3) P の座標を $(t,\ u,\ v)$ とおくと，P と A, B, C が等距離にあることから

$$(t-2)^2+(u-1)^2+(v-1)^2=t^2+(u-2)^2+(v-1)^2=(t-3)^2+(u+1)^2+(v-4)^2$$

各辺から，$t^2+u^2+v^2$ を引いて

$$-4t-2u-2v+6=-4u-2v+5=-6t+2u-8v+26$$

$$\therefore\quad \begin{cases} -4t+2u+1=0 & \cdots\cdots ⑤ \\ 3(2t-2u+2v-7)=0 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ より

$$u = 2t - \frac{1}{2}$$

これを ⑥ に代入して，v について解くと

$$v = t + 3$$

したがって

$$\mathrm{P}\left(t,\ 2t-\frac{1}{2},\ t+3\right) \quad \cdots\cdots ⑦$$

四面体 PABC において△ ABC を底辺とみると，高さは P と平面 α との距離に等しく

$$\frac{|t+(4t-1)+(t+3)-5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|6t-3|}{\sqrt{6}}$$

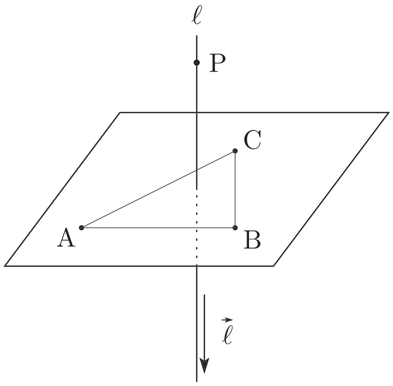
よって

$$V = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{6}\times\frac{|6t-3|}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}|2t-1|} \qquad (答)$$

(4) ⑦ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} t \\ 2t-\frac{1}{2} \\ t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり, P は方向ベクトルが $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線上の点である.



OP が最小になるとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \vec{\ell}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{\ell} = \begin{pmatrix} t \\ 2t-\frac{1}{2} \\ t+3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore\quad t+(4t-1)+(t+3)=0$$

$$\therefore\quad t = \boldsymbol{-\frac{1}{3}} \qquad (答)$$

このとき

$$V = \frac{3}{2}\left|2\times\left(-\frac{1}{3}\right)-1\right| = \boldsymbol{\frac{5}{2}} \qquad (答)$$

問題

【1】$x \geqq 0$ で考える．

$x=0$ のとき，$1=0$ は成り立たない．

$x \neq 0$ のとき，与方程式は

$$m=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

と変形できるから

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

とおくと

$$f'(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}-2}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$$

$$f\left(2^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

より，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

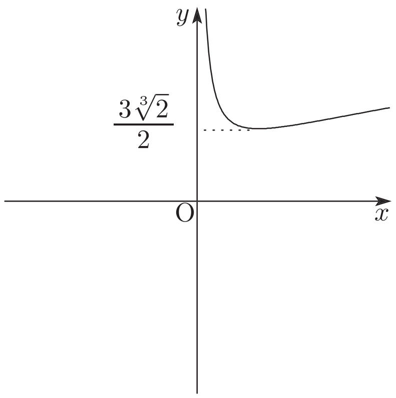
x	0		$2^{\frac{2}{3}}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$	$\nearrow$

したがって，グラフは下図のようになり，求める実数解の個数は

$m>\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ のとき **2** 個

$m=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ のとき **1** 個　　(答)

$m<\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ のとき **0** 個



【2】 $\boxed{1}$

2 曲線の共有点の x 座標を α とおく．このとき

$$y = \log x \implies y' = \frac{1}{x}$$

$$y = ax^2 \implies y' = 2ax$$

であるから, 2 曲線が $x = \alpha$ において接線を共有するための条件は

$$\begin{cases} \log \alpha = a\alpha^2 \cdots ① \\ \dfrac{1}{\alpha} = 2a\alpha \cdots ② \end{cases}$$

②より

$$a\alpha^2 = \frac{1}{2}$$

これを ①に代入して

$$\log \alpha = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \alpha = \sqrt{e}$$

よって

$$a = \frac{1}{2\alpha^2} = \boldsymbol{\frac{1}{2e}} \qquad \text{(答)}$$

そして

$$\log \alpha = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

なので, 共通接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) + \frac{1}{2} \iff y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

(1) $y = \log x$ を x で微分すると

$$y' = \frac{1}{x}$$

であるから, 点 $(1,\ 0)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y = 1 \cdot (x - 1) \iff y = x - 1$$

一方, $y = e^{x+\alpha} + \beta$ を x で微分すると

$$y' = e^{x+\alpha}$$

であるから, C_1 上の点 $(t,\ e^{t+\alpha} + \beta)$ における接線の方程式は

$$y - (e^{t+\alpha} + \beta) = e^{t+\alpha}(x - t) \iff y = e^{t+\alpha}x + (1 - t)e^{t+\alpha} + \beta$$

これが $y = x - 1$ に一致するとき

$$\begin{cases} e^{t+\alpha} = 1 \cdots ① \\ (1 - t)e^{t+\alpha} + \beta = -1 \cdots ② \end{cases}$$

すると, ①より

$$t + \alpha = 0$$

であり, これと ②より

$$1 - t + \beta = -1$$

この 2 式の両辺の和をとると

$$1 + \alpha + \beta = -1$$

したがって

$$\boldsymbol{\beta = -\alpha - 2} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果より, C_1 の接線の方程式を α, t を用いた形で表すと

$$y = e^{t+\alpha}x + (1 - t)e^{t+\alpha} - \alpha - 2$$

一方, C_2 上の点 $(u,\ \log u)$ における接線の方程式は

$$y-\log u=\frac{1}{u}(x-u) \iff y=\frac{1}{u}x+\log u-1$$

よって, これらの接線が一致するための条件は

$$\begin{cases} e^{t+\alpha}=\dfrac{1}{u} & \cdots ③ \\ (1-t)e^{t+\alpha}-\alpha-2=\log u-1 & \cdots ④ \end{cases}$$

すると, ③ より

$$\log\frac{1}{u}=t+\alpha \qquad \therefore \quad \log u=-t-\alpha$$

これを ④ に代入すると

$$(1-t)e^{t+\alpha}-\alpha-2=-t-\alpha-1$$

で, これより

$$(1-t)(e^{t+\alpha}-1)=0$$

よって

$t=1$ または $e^{t+\alpha}=1$

すると, $t=1$ のとき接線の方程式は

$$y=e^{\alpha+1}x-\alpha-2$$

また, $e^{t+\alpha}=1$ のときは (1) の結果から

$$y=x-1$$

したがって, 求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y=e^{\alpha+1}x-\alpha-2}$ **または** $\boldsymbol{y=x-1}$ (答)

ただし, $\alpha=-1$ のときは

$\boldsymbol{y=x-1}$ (答)

ただ 1 本となる.

【3】曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$y=e^t(x-t)+e^t \quad \cdots①$

①が曲線 $y=ax^2$ とも接するとき, y を消去して得られる x の 2 次方程式

$ax^2=e^t(x-t)+e^t \iff ax^2-e^tx+(t-1)e^t=0$

が重解をもつから, 判別式をとると

$e^{2t}-4a(t-1)e^t=0 \quad \cdots②$

ここで, $t=1$ とすると ②は成立しないから, $t \fallingdotseq 1$ であり

$$a=\frac{e^t}{4(t-1)}$$

この右辺を $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{(t-1)e^t-e^t}{4(t-1)^2}=\frac{(t-2)e^t}{4(t-1)^2}$$

となり, $f(t)$ の増減は下表のようになる.

t		1		2	
$f'(t)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘	極小	↗

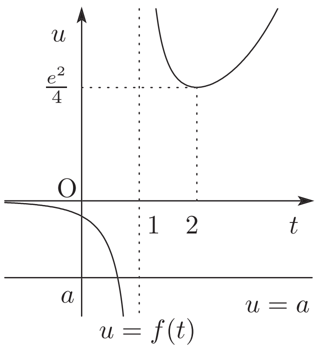
さらに, $f(2)=\dfrac{e^2}{4}$ であり

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=0, \quad \lim_{t\to1\pm0}f(t)=\pm\infty$ (複号同順)

また,

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$

以上より, $f(t)$ のグラフは次図のようになる.



したがって, 曲線 $u=f(t)$ と直線 $u=a$ の共有点の個数を考えれば, 方程式 ②の相異なる実数解の個数, すなわち, 求める接線の本数は

$a>\dfrac{e^2}{4}$ のとき, **2 本**

$a=\dfrac{e^2}{4}$ のとき, **1 本** (答)

$0<a<\dfrac{e^2}{4}$ のとき, **0 本**

$a<0$ のとき, **1 本**

【4】$\boxed{1}$　$f(x)=\pi\cos\pi x-\dfrac{3}{2}$ とすると

$$f'(x)=-\pi^2\sin\pi x$$

$\dfrac{1}{6}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ では

$$f'(x)<0$$

よって，$f(x)$ は単調減少である．

そして

$$f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{3}{2}>0,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$$

だから，$f(x)=0$ は $\dfrac{1}{6}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ でただ 1 つの実数解をもつ．　$\cdots\cdots\cdots(*)$

$g(x)=\sin\pi x-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{4}$ とすると

$$g'(x)=\pi\cos\pi x-\frac{3}{2}=f(x)$$

$(*)$ より $\dfrac{1}{6}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ で $g'(x)=0$ はただ 1 つの解をもつから，その解を α とすると，

増減表は下のようになる．

x	$\frac{1}{6}$		α		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって，$g(x)\geqq 0$.

すなわち，題意が成り立つ．　（証明終）

$\boxed{2}$　右辺を $f_n(x)$ とすると，$e^x\geqq f_n(x)$ すなわち

$$1\geqq e^{-x}f_n(x)$$

を示せばよい．

$$g(x)=1-e^{-x}f_n(x)$$

とすると

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\left\{-e^{-x}f_n(x)+e^{-x}f_n'(x)\right\}\\&=e^{-x}\left\{f_n(x)-f_n'(x)\right\}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\&=f_n(x)-\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f_n(x)-f_n'(x)=\frac{x^n}{n!}$$

だから

$$g'(x)=e^{-x}\cdot\frac{x^n}{n!}\geqq 0\quad(\because\quad x\geqq 0)$$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加して

$$g(0)=0$$

だから

$$g(x)\geqq 0$$

よって，題意は示された．　（証明終）

【5】(1) $\left[\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2\right]'=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$
$=2f(x)f'(x)+2f'(x)\{-f(x)\}$
$=0$

よって，任意の x に対して

$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=c$ （c は定数）

ここで，$x=0$ とすると，$c=\{f(0)\}^2+\{f'(0)\}^2=1$ なので

$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=1$ （証明終）

(2) (1) の結果を用いて，$\{f'(x)\}^2\geqq 0$ より

$1-\{f(x)\}^2\geqq 0$ $\therefore\ -1\leqq f(x)\leqq 1$ ……①

ここで，$g(x)=f(x)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$ $(x\geqq 0)$ とおくと

$g'(x)=f'(x)+x,\quad g''(x)=f''(x)+1=-f(x)+1$

① より $g''(x)\geqq 0$ だから，$g'(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加し，$g'(0)=f'(0)=0$ より，$g'(x)\geqq 0$ となる．

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加し，さらに $g(0)=f(0)-1=0$ より

$g(x)\geqq 0$ ……② $\therefore\ 1-\dfrac{x^2}{2}\leqq f(x)$

また，$h(x)=\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\right)-f(x)$ $(x\geqq 0)$ とおくと

$h'(x)=-x+\dfrac{x^3}{6}-f'(x),$

$h''(x)=-1+\dfrac{x^2}{2}-f''(x)=-1+\dfrac{x^2}{2}+f(x)=g(x)$

② より $h''(x)\geqq 0$ だから，$h'(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加し，$h'(0)=-f'(0)=0$ より，$h'(x)\geqq 0$ となる．

よって，$h(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加し，さらに $h(0)=1-f(0)=0$ により

$h(x)\geqq 0$ $\therefore\ f(x)\leqq 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ （証明終）

(3) $h'(x)\geqq 0$ より

$f'(x)\leqq -x+\dfrac{1}{6}x^3=\dfrac{x(x^2-6)}{6}$ $(x\geqq 0)$

$\therefore\ f'(x)<0$ $(0<x<2)$

よって，$f(x)$ は $0<x<2$ で単調に減少する．

$f(0)=1,\quad f(2)\leqq 1-\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^4}{24}=-\dfrac{1}{3}<0$

ゆえに，$f(x)=0$ は $0<x<2$ にただ 1 つの解をもつ． （証明終）

添削課題

【1】BP：PF＝3：1，DP：PE＝4：1 であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AF}} & \cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とおける．ここで，点 E，F は辺 AB，AD 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ （ただし，$0 < m < 1$）

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ （ただし，$0 < n < 1$）

とおけ，これを①，②に代入すると

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{3}{4}n\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{4}{5}m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{5}m \\ \dfrac{3}{4}n = \dfrac{1}{5} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} m = \dfrac{5}{16} \\ n = \dfrac{4}{15} \end{cases}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots\cdots ③$$

次に，$n = \dfrac{4}{15}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である．また，点 R は線分 CF 上にあるので，CR：RF$= t : (1-t)$ （ただし，$0 < t < 1$）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{4}{15}t\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots\cdots ④$$

さらに，CQ：QD$= x : 1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤と，点 A，R，Q が同一直線上にあること，および $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \neq \overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ により

$$(1-t) : \frac{4}{15}t = 1 : x \qquad \therefore \quad t = \frac{15x}{15x+4}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{4}{15x+4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{4x}{15x+4}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

③，⑥より

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{15x+4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{5x-4}{5(15x+4)}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

ここで，直線 PR と平面 BCD が平行になるとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{BD}} \quad (\text{ただし}, \alpha, \beta \text{は実数}) \\ &= -(\alpha+\beta)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AD}} \end{aligned}$$

とおける．そして，四面体 ABCD の 4 つの頂点は同一平面上にないので

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta) = -\dfrac{1}{4} \\ \alpha = \dfrac{4}{15x+4} \\ \beta = \dfrac{5x-4}{5(15x+4)} \end{cases}$$

これを解くと

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{5}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1)
$$2x^2+3xy+py^2-7x+qy+3=0 \quad \cdots\cdots(*)$$
とする．$(*)$ が 2 直線を表すことから
$$(*) \iff (2x+ay+b)(x+cy+d)=0$$
と表される．さらに，2 直線
$$2x+ay+b=0$$
$$x+cy+d=0$$
がともに点 $(1,\ 1)$ を通るので
$$\begin{cases} 2+a+b=0 \\ 1+c+d=0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} b=-(a+2) \\ d=-(c+1) \end{cases}$$
である．したがって
$$\begin{aligned}(*) &\iff \{2x+ay-(a+2)\}\{x+cy-(c+1)\}=0 \\ &\iff 2x^2+(a+2c)xy+acy^2-(a+2c+4)x \\ &\iff -(2ac+a+2c)y+(a+2)(c+1)=0\end{aligned}$$
となるから，係数を比較して
$$\begin{cases} a+2c=3 \quad \cdots\cdots① \\ ac=p \quad \cdots\cdots② \\ -(a+2c+4)=-7 \quad \cdots\cdots③ \\ -(2ac+a+2c)=q \quad \cdots\cdots④ \\ (a+2)(c+1)=3 \quad \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$
①，③ は同値であり
$$a=3-2c \quad \cdots\cdots⑥$$
⑤，⑥ より
$$(a,\ c)=\left(4,\ -\frac{1}{2}\right),\quad (-1,\ 2)$$
②，④ より
$$\begin{cases} p=\boldsymbol{-2} \\ q=\boldsymbol{1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$
であり，このとき，2 直線の方程式は
$$\boldsymbol{2x-y-1=0,\quad x+2y-3=0} \qquad \text{(答)}$$
である．

(2) 2 直線 $2x-y-1=0,\ x+2y-3=0$ から等距離にある点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の軌跡を考える．
$$\frac{|2X-Y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|X+2Y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$\therefore\ |2X-Y-1|=|X+2Y-3|$$
$$\therefore\ (2X-Y-1)^2=(X+2Y-3)^2$$
$$\therefore\ \{(2X-Y-1)+(X+2Y-3)\}\{(2X-Y-1)-(X+2Y-3)\}=0$$
$$\therefore\ (3X+Y-4)(X-3Y+2)=0$$
よって，求める軌跡は 2 直線
$$\boldsymbol{3x+y-4=0,\quad x-3y+2=0} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\mathrm{B}'(s,\ t)$ とすると

BB' の中点 $\left(\dfrac{s+2}{2},\ \dfrac{t}{2}\right)$ が ℓ 上にあるから

$$\frac{t}{2}=m\cdot\frac{s+2}{2} \iff t=m(s+2) \quad \cdots\cdots ①$$

題意より，$m\neq 0$ なので，$s\neq 2$ だから，$\mathrm{BB}'\perp\ell$ より

$$\frac{t}{s-2}\cdot m=-1 \iff t\cdot m=2-s \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② より

$$s=\frac{2(1-m^2)}{1+m^2},\quad t=\frac{4m}{1+m^2}$$

よって

$$\mathrm{B}'\left(\boldsymbol{\frac{2(1-m^2)}{1+m^2},\ \frac{4m}{1+m^2}}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) ℓ に関して A と B は同じ側にあるから，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ が最小となるのは，A, P, B′ が一直線上にあるときである．

$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$m\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 AB' の方程式は

$$y-0=\frac{\dfrac{4m}{1+m^2}-0}{\dfrac{2(1-m^2)}{1+m^2}-1}(x-1) \iff y=\frac{4m}{1-3m^2}(x-1)$$

これと ℓ との交点が P であるから，これを求めて

$$\left(\frac{4}{3(1+m^2)},\ \frac{4m}{3(1+m^2)}\right)=(x,\ y)$$

とすると

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{3(1+m^2)} \\ y=\dfrac{4m}{3(1+m^2)} \end{cases} \iff \begin{cases} 3(1+m^2)x=4 \\ \dfrac{y}{x}=m \quad (\because\ x\neq 0) \end{cases}$$

また，$m\neq 0$ より $y\neq 0$ であるから，m を消去すると

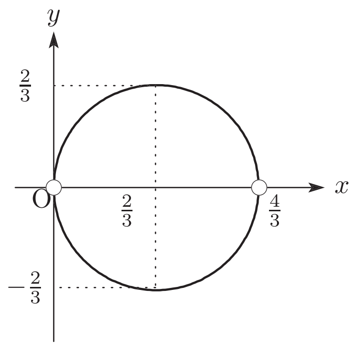
$$3\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}x=4,\ x\neq 0,\ y\neq 0$$

$$\iff 3(x^2+y^2)=4x,\ x\neq 0,\ y\neq 0$$

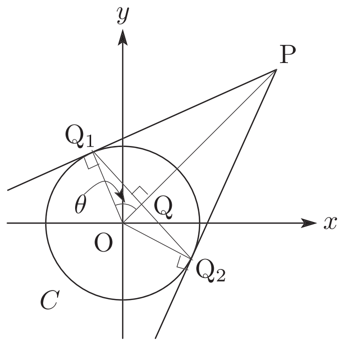
$$\iff \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9},\ x\neq 0,\ y\neq 0$$

これは，$\left(1,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を含む．したがって，求める軌跡は

円 $\boldsymbol{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}}$ **の円周上（ただし，$\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(\frac{4}{3},\ 0\right)}$ を除く）** (答)



【3】Q は OP と Q_1Q_2の交点で，OP ⊥ Q_1Q である．



よって，$\angle POQ_1 = \theta$ とおくと

△ OPQ_1 において，$\cos\theta = \dfrac{OQ_1}{OP} = \dfrac{1}{OP}$

△ OQ_1Q において，$\cos\theta = \dfrac{OQ}{OQ_1} = OQ$

したがって

$$\frac{1}{OP} = OQ \iff OP \cdot OQ = 1$$

Q$(X,\ Y)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{OP}{OQ}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{OQ^2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X}{X^2+Y^2} \\ \dfrac{Y}{X^2+Y^2} \end{pmatrix}$$

P$(a,\ b)$ は

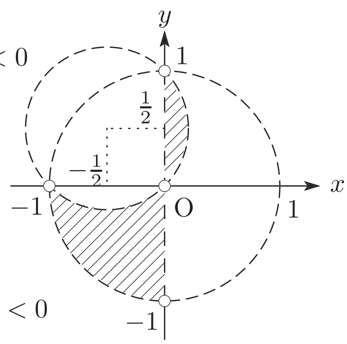
$x^2+y^2 > 1$ かつ $x(x-y+1) < 0$

の範囲にあるから

$$\begin{cases} \left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2 > 1 \\ \dfrac{X}{X^2+Y^2}\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2} - \dfrac{Y}{X^2+Y^2} + 1\right) < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X^2+Y^2 \neq 0 \\ X^2+Y^2 < 1 \\ X(X^2+Y^2+X-Y) < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (X,\ Y) \neq (0,\ 0) \\ X^2+Y^2 < 1 \\ X\left\{\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(Y-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} < 0 \end{cases}$$



よって，点 Q の存在範囲は図の斜線部分 (ただし，境界を除く).

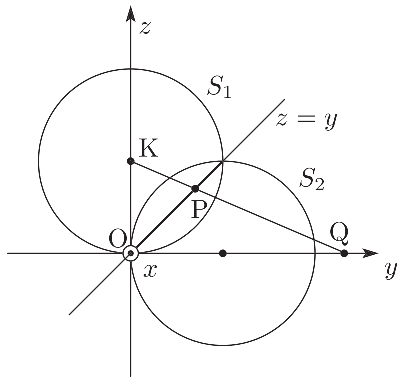
【4】S_1 は中心 K(0, 0, 1)，半径 1 の球面であり，S_2 は中心 (0, 1, 0)，半径 1 の球面である．2 つの球 S_1，S_2 の共有点の集合を求める．一般に，2 個の球が交わるとき，その共通部分は円になる．その円を『公円』と言う．

$S_1 : x^2+y^2+(z-1)^2-1=0, \quad S_2 : x^2+(y-1)^2+z^2-1=0$

のいずれにも含まれる点は，この 2 式を同時にみたすから，連立して辺々引けば

$2y-2z=0 \iff y=z$

が成り立つ．したがって公円 C は球 S_1 と平面 $y=z$ との共通部分である．そこで，2 球を yz 平面で切断した断面を考えると，次の図のようになる．



$z=y$ を球面 S_1 の方程式に代入して

$x^2+y^2+(y-1)^2=1 \iff x^2+2y^2-2y=0 \quad \cdots\cdots①$

公円 C 上の点 P は平面 $y=z$ 上にあるから，その座標を P$(x,\ y,\ y)$ とし，また直線 KP と xy 平面との交点 Q を Q$(X,\ Y,\ 0)$ とする．3 点 K，P，Q は一直線上にあるから，t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=t\overrightarrow{\mathrm{KQ}}$

が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\y-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{KQ}}=\begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\-1\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix}x\\y\\y-1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}X\\Y\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=tX\\y=tY\\y-1=-t\end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

第 3 式より $y=1-t$ であるから，第 2 式と合わせて

$tY=1-t \qquad \therefore \quad (1+Y)\,t=1$

点 P の y 座標は常に非負だから，$1+Y>0$ で，したがって

$t=\dfrac{1}{1+Y} \quad \cdots\cdots③$

②, ③より

$x=\dfrac{X}{1+Y}, \quad y=\dfrac{Y}{1+Y} \quad \cdots\cdots④$

④を①に代入して

$$\left(\frac{X}{1+Y}\right)^2+2\left(\frac{Y}{1+Y}\right)^2-2\cdot\frac{Y}{1+Y}=0$$

$\iff \quad X^2+2Y^2-2(1+Y)Y=0$

$\iff \quad X^2-2Y=0$

$\iff \quad Y=\dfrac{1}{2}X^2$

以上より，求める Q の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x^2,\ z=0}$ 　　(答)

である．

【5】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right), \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(1,\ 0,\dfrac{1}{2}\right)$ であるから，$\overrightarrow{n_0}=(x,\ y,\ z)$ とおくと

$\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0, \overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0, \left|\overrightarrow{n_0}\right|^2=1$

よって

$$\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0,\ x+\frac{z}{2}=0,\ x^2+y^2+z^2=1$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{3},\ y=\pm\frac{2}{3},\ z=\mp\frac{2}{3}\ \text{(複号同順)}$$

であるから

$\overrightarrow{n_0}=\pm\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}}\right)$ 　　(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{n_0}$ のなす角を θ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{n}$ のなす角も θ であるから

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{n_0}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|\left|\overrightarrow{n_0}\right|}$ 　　$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{n_0}$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(-1,\ 1,\ 0)$ であるから

$-x+y=\pm\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)$ 　　$\therefore\quad x=y\mp\dfrac{1}{3}\cdots\cdots①$

$\left|\overrightarrow{n}\right|^2=x^2+y^2+z^2=1$ だから，① より

$\left(y\mp\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2+z^2=1$

$\therefore\quad z^2=\dfrac{8}{9}\pm\dfrac{2}{3}y-2y^2=\dfrac{2}{9}(4\pm3y-9y^2)$

$z^2\geqq0$ より，y のとり得る値の範囲は

$9y^2-3y-4\leqq0$ 　　または $9y^2+3y-4\leqq0$

これより

$\dfrac{1-\sqrt{17}}{6}\leqq y\leqq\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$ 　　または $-\dfrac{\sqrt{17}+1}{6}\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{17}-1}{6}$

よって，$|y|$ のとり得る値の範囲は

$0\leqq|y|\leqq\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$

以上より，求める $|y|$ の最大値，最小値は

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}}$，**最小値** $\boldsymbol{0}$ 　　(答)

問題

【1】(1) $\sin x = t$ とすると

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \mathbf{\frac{1}{3}} \qquad (答)$$

(2) $m \fallingdotseq n$ のとき

$$与式 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = \mathbf{0} \qquad (答)$$

$m = n$ のとき

$$与式 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2mx) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{\pi} \qquad (答)$$

(3) $与式 = \int \frac{1}{\log x} \cdot (\log x)' dx = \mathbf{\log|\log \boldsymbol{x}| + \boldsymbol{C}}$ 　(答)

(4) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x dx = dt$ だから

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1-t^2}{t^3} \cdot (-1) dt = \log|t| + \frac{1}{2t^2} + C$$

よって

$$与式 = \left[\log|t| + \frac{1}{2t^2}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \mathbf{\log \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} \qquad (答)$$

(5) $$与式 = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx + \int_1^2 x^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + \frac{1}{2}} \qquad (答)$$

【2】(1) $\sqrt{x+2}=t$．よって，$x=t^2-2$ とおくと

$$\int_2^3 \frac{t^2-2}{t}\cdot 2tdt=\left[\frac{2}{3}t^3-4t\right]_2^3=\boldsymbol{\frac{26}{3}}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと，$x^2+1=t^2$ $(xdx=tdt)$.

$$\int_1^2 t\cdot tdt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\boldsymbol{\frac{7}{3}}\qquad \text{(答)}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}dx$ であるから，$x=1-\sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\sin^2\theta}(-1)\cos\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta\\ &=\left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x^2+1}=t-x$ とおくと，$x=\dfrac{t^2-1}{2t}$，両辺を t で微分して，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2+1}{2t^2}$.

$$\therefore\quad \int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{t}dt=\boldsymbol{\log\left(\sqrt{2}+1\right)}\qquad \text{(答)}$$

(5) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^2+3}$ であるから，$x=1+\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}\qquad \text{(答)}$$

(6)

$$\begin{aligned}I&=\int\sin(\log x)dx\\ &=x\sin(\log x)-\int\cos(\log x)dx\\ &=x\sin(\log x)-x\cos(\log x)-I\end{aligned}$$

$$\therefore\quad I=\boldsymbol{\frac{1}{2}x\left\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\right\}+C}\qquad \text{(答)}$$

(7) $\log x+1=t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int\frac{t-1}{t^2}dt&=\log|t|+\frac{1}{t}+C\\ &=\boldsymbol{\log|1+\log x|+\frac{1}{1+\log x}+C}\qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(8)

$$\int\frac{dt}{e^x+1}=\int\frac{e^xdx}{e^x(e^x+1)}$$

ここで，$e^x = t$ とおくと

$$\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \log|t| - \log|t+1| + C$$

$$= \boldsymbol{x - \log(1 + e^x) + C} \qquad \text{(答)}$$

(9)
$$\int_1^e (\log x)^2 dx = \Big[x(\log x)^2\Big]_1^e - \int_1^e 2\log x dx = e - 2\Big[x\log x - x\Big]_1^e$$

$$= \boldsymbol{e - 2} \qquad \text{(答)}$$

(10)
$$\int \frac{1}{2}e^{2x}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx$$

ここで

$$I = \int e^{2x}\cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}\sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) - I$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C'$$

以上より

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C} \qquad \text{(答)}$$

【3】 $I = \int e^{-t}\sin t dt$ とすると

$$I = -e^{-t}\sin t + \int e^{-t}\cos t dt$$

$$= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - I$$

$$\therefore \quad I = -\frac{e^{-t}(\sin t + \cos t)}{2} + C \ (C \text{ は積分定数})$$

ここで，$n\pi \leqq t \leqq (n+1)\pi$ (n は整数) のとき $t = n\pi + s$ とおくと

$dt = ds$，　$0 \leqq s \leqq \pi$

だから

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|e^{-t}dt = \int_0^{\pi} (\sin s)e^{-n\pi - s}ds$$

$$= e^{-n\pi}\int_0^{\pi}(\sin s)e^{-s}ds$$

$$= \frac{e^{-\pi} + 1}{2}e^{-n\pi}$$

よって，$f(t) = |\sin t|e^{-t}$ とすると，k を整数として

$$\int_0^{n\pi} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)dt = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-(k-1)\pi} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$f(t) \geqq 0$ であるから，$n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ のとき

$$\int_0^{n\pi} f(t)dt \leqq \int_0^x f(t)dt \leqq \int_0^{(n+1)\pi} f(t)dt \quad \cdots\cdots ②$$

① は公比 $e^{-\pi}$ $(0<e^{-\pi}<1)$ の等比数列の和であるから $n\to\infty$ のとき

$$\int_0^{n\pi} f(t)dt \ \to\ \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{2\left(e^{\pi}-1\right)}$$

$$\int_0^{(n+1)\pi} f(t)dt=\int_0^{n\pi} f(t)dt+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)dt \ \to\ \frac{e^{\pi}+1}{2\left(e^{\pi}-1\right)}+0$$

よって，② から

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{x} f(t)dt=\boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2\left(e^{\pi}-1\right)}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $f(x)=e^x-1-x$ とすると

$$f'(x)=e^x-1$$

これより，$y=f(x)$ の増減は下のようになる．

x		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

ここで

$$f(0)=0$$

だから

$$f(x)>0$$

ゆえに

$$e^x>1+x$$

が成り立つ．　　(証明終)

(2) $e^x>1+x$ において $x=-t^2$ $(t\fallingdotseq 0)$ とおくと

$$e^{-t^2}>1-t^2$$

また，$x=t^2$ $(t\fallingdotseq 0)$ とおくと

$$e^{t^2}>1+t^2 \qquad \therefore\ \frac{1}{1+t^2}>e^{-t^2}$$

これらより

$$1-t^2<e^{-t^2}<\frac{1}{1+t^2}$$

ここで

$$\int_0^1(1-t^2)dt<\int_0^1 e^{-t^2}dt<\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$$

が成り立ち，

$$\int_0^1(1-t^2)dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

また，$t=\tan\theta$ とおくと

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

よって

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ.　　　(証明終)

【5】(1)

$$I\ (m,\ n) = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$
$$= \frac{n}{m+1}\ I\ (m+1,\ n-1)$$

同様にして

$$I\ (m+1,\ n-1) = \frac{n-1}{m+2}\ I\ (m+2,\ n-2)$$
$$I\ (m+2,\ n-2) = \frac{n-2}{m+3}\ I\ (m+3,\ n-3)$$

なので

$$I\ (m,\ n) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\cdot\frac{2}{m+(n-1)}\cdot\frac{1}{m+n}\ I\ (m+n,\ 0)$$

ここで

$$I\ (m+n,\ 0) = \int_0^1 x^{m+n}dx = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n+1}$$

よって

$$I\ (m,\ n) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots\cdot(m+n)(m+n+1)}$$
$$= \frac{n!}{\frac{(m+n+1)!}{m!}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{m!n!}{(m+n+1)!}} \qquad (答)$$

(2)

$x = \alpha$ のとき,　$s = 0$,

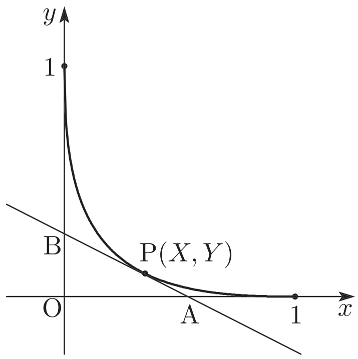
$x = \beta$ のとき,　$s = 1$

となるように置換することを考える. $s = \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおくと

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$
$$= \int_0^1 (\beta-\alpha)^m s^m\cdot(\beta-\alpha)^n(s-1)^n(\beta-\alpha)ds$$
$$= (-1)^n(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 s^m(1-s)^n ds$$
$$= (-1)^n(\beta-\alpha)^{m+n+1}\ I\ (m,\ n)$$
$$= \boldsymbol{(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}} \qquad (答)$$

添削課題

【1】P の座標を $(X,\ Y)$ とおく. ここで, X, Y は



$$X>0,\quad Y>0,\quad X^{\frac{1}{3}}+Y^{\frac{1}{3}}=1\ \cdots①$$

をみたす. いま, $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}=-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

よって, P における接線の方程式は

$$y-Y=-\frac{Y^{\frac{2}{3}}}{X^{\frac{2}{3}}}(x-X)$$

これを変形すると

$$\frac{x-X}{X^{\frac{2}{3}}}+\frac{y-Y}{Y^{\frac{2}{3}}}=0\iff\frac{x}{X^{\frac{2}{3}}}+\frac{y}{Y^{\frac{2}{3}}}=X^{\frac{1}{3}}+Y^{\frac{1}{3}}$$

$$\iff\frac{x}{X^{\frac{2}{3}}}+\frac{y}{Y^{\frac{2}{3}}}=1\quad(\because ①)$$

となるから, x 軸との交点 A, y 軸との交点 B はそれぞれ $y=0,\ x=0$ として

$$\mathrm{A}(X^{\frac{2}{3}},\ 0),\quad \mathrm{B}(0,\ Y^{\frac{2}{3}})$$

よって

$$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}=X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}\ =\ X^{\frac{2}{3}}+(1-X^{\frac{1}{3}})^2$$

$$=2X^{\frac{2}{3}}-2X^{\frac{1}{3}}+1\ =\ 2\left(X^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

そして, $0<X^{\frac{1}{3}}<1$ だから, $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}$ は

$$X^{\frac{1}{3}}=Y^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad \mathrm{P}\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{8}\right)$$

のとき, 最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ をとる.

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	