問題

【1】(1) ①

$$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0$$
$$= \mathbf{0}$$

②

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} + 3 = \mathbf{\frac{13}{4}}$$

③

$$f(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^2 - 6 \cdot (2+\sqrt{3})$$
$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 12 - 6\sqrt{3}$$
$$= \mathbf{-5 - 2\sqrt{3}}$$

④

$$f(1-a) = (1-a)^2 - 6(1-a)$$
$$= 1 - 2a + a^2 - 6 + 6a$$
$$= \boldsymbol{a^2 + 4a - 5}$$

(2) ①

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1$$
$$= \mathbf{1}$$

②

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1$$
$$= 32 - 12 + 1$$
$$= \mathbf{21}$$

③

$$f(-1+\sqrt{2}) = 2 \cdot (-1+\sqrt{2})^2 - 3 \cdot (-1+\sqrt{2}) + 1$$
$$= 2(1 - 2\sqrt{2} + 2) - 3(-1+\sqrt{2}) + 1$$
$$= \mathbf{10 - 7\sqrt{2}}$$

④

$$f(a+2) = 2(a+2)^2 - 3(a+2) + 1$$
$$= 2(a^2 + 4a + 4) - 3(a+2) + 1$$
$$= \boldsymbol{2a^2 + 5a + 3}$$

【2】(1) $y=-2x^2+3$ のグラフの頂点は，$(0,\ 3)$ だから，

y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

(2) $y=-2(x-5)^2$ のグラフの頂点は，$(5,\ 0)$ だから，

x 軸正の方向に 5 平行移動したグラフ

(3) $y=-2(x+1)^2+3$ のグラフの頂点は $(-1,\ 3)$ だから，

x 軸正の方向に -1, y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

(4) $y=-2(x-3)^2-5$ のグラフの頂点は $(3,\ -5)$ だから，

x 軸正の方向に 3, y 軸正の方向に -5 平行移動したグラフ

【3】(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5}{3}$ のグラフの頂点は $\left(0,\ -\dfrac{5}{3}\right)$ だから，

$y=\dfrac{1}{3}x^2$ を y 軸正の方向に $-\dfrac{5}{3}$ 平行移動したグラフ

(2) $y=-3(x+4)^2$ のグラフの頂点は $(-4,\ 0)$ だから，

$y=-3x^2$ を x 軸正の方向に -4 平行移動したグラフ

(3) $y=-(x-3)^2-7$ のグラフの頂点は $(3,\ -7)$ だから，

$y=-x^2$ のグラフを x 軸正の方向に 3, y 軸正の方向に -7 平行移動したグラフ

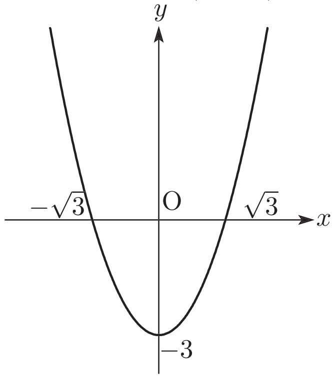
(4) $y=\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{24}{25}$ のグラフの頂点は $\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{24}{25}\right)$ だから，

$y=\dfrac{3}{2}x^2$ のグラフを x 軸正の方向に $-\dfrac{4}{5}$，y 軸正の方向に $\dfrac{24}{25}$ 平行移動したグラフ

【4】(1) 基本形：$y = x^2$

平行移動：y 軸正の方向に -3 平行移動したグラフ

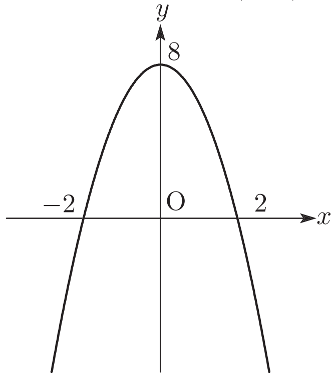
軸：$x = 0$， 頂点：$(0,\ -3)$



(2) 基本形：$y = -2x^2$

平行移動：y 軸正の方向に 8 平行移動したグラフ

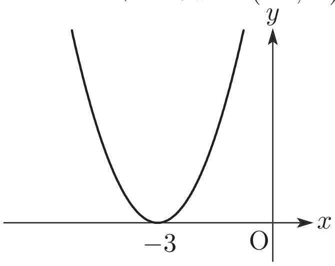
軸：$x = 0$， 頂点：$(0,\ 8)$



(3) 基本形：$y = x^2$

平行移動：x 軸正の方向に -3 平行移動したグラフ

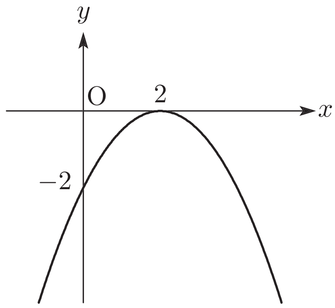
軸：$x = -3$， 頂点：$(-3,\ 0)$



(4) 基本形：$y = -\dfrac{1}{2}x^2$

平行移動：x 軸正の方向に 2 平行移動したグラフ

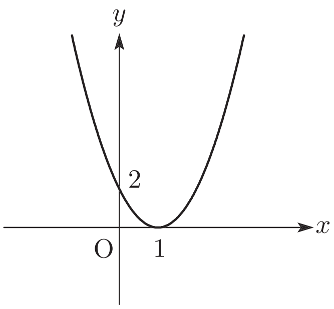
軸：$x = 2$， 頂点：$(2,\ 0)$



(5) 基本形：$y = 2x^2$

平行移動：x 軸正の方向に 1 平行移動したグラフ

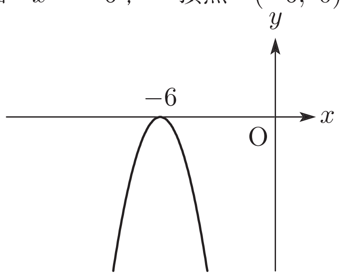
軸：$x = 1$， 頂点：$(1,\ 0)$



(6) 基本形：$y = -\dfrac{2}{3}x^2$

平行移動：x 軸正の方向に -6 平行移動したグラフ

軸：$x = -6$， 頂点：$(-6,\ 0)$

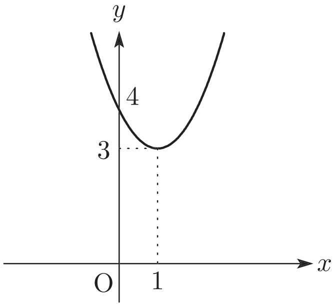


【5】(1) 基本形：$y = x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に 1，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x = 1$，　頂点：(1, 3)

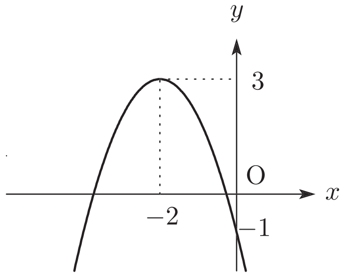


(2) 基本形：$y = -x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に -2，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x = -2$，　頂点：$(-2,\ 3)$

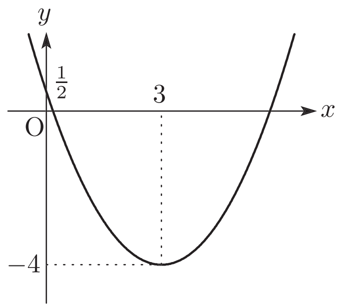


(3) 基本形：$y = \frac{1}{2}x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に 3，y 軸正の方向に -4 平行移動したグラフ

軸：$x = 3$，　頂点：$(3,\ -4)$

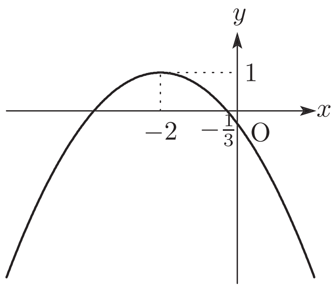


(4) 基本形：$y = -\frac{1}{3}x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に -2，y 軸正の方向に 1 平行移動したグラフ

軸：$x = -2$，　頂点：$(-2,\ 1)$

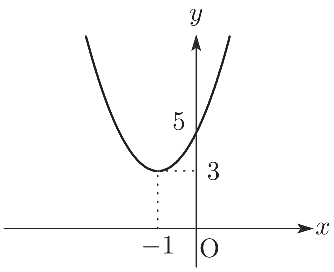


(5) 基本形：$y = 2x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に -1，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x = -1$，　頂点：$(-1,\ 3)$



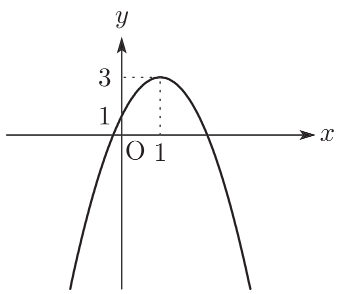
(6) 基本形：$y = -2x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に 1，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x = 1$

頂点：(1, 3)



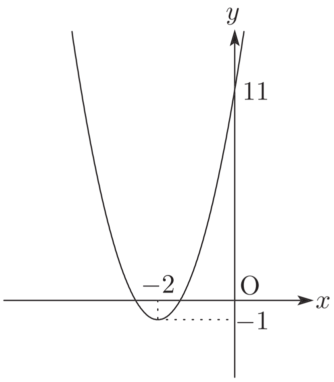
(7) 基本形：$y=3x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に -2 ，y 軸正の方向に -1 平行移動したグラフ

軸：$x=-2$

頂点：$(-2,\ -1)$



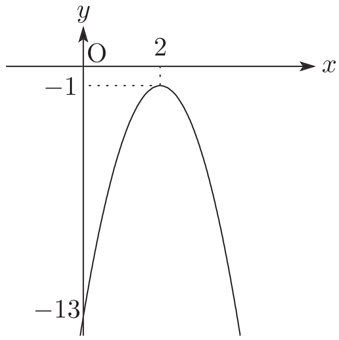
(8) 基本形：$y=-3x^2$

平行移動：

x 軸正の方向に 2，y 軸正の方向に -1 平行移動したグラフ

軸：$x=2$

頂点：$(2,\ -1)$



【6】(1)

$$x^2-12x+\mathbf{36}=(x-\mathbf{6})^2$$

(2)

$$x^2+6x+\mathbf{9}=(x+\mathbf{3})^2$$

(3)

$$x^2-x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}=\left(x-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2$$

(4)

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}=\left(x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)^2$$

(5)

$$x^2-4ax+\boldsymbol{4a^2}=(x-\boldsymbol{2a})^2$$

(6)

$$x^2+3kx+\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k^2}=\left(x+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{k}\right)^2$$

(7)

$$x^2-2(m+1)x+\boldsymbol{(m+1)}^2=\{x-(\boldsymbol{m+1})\}^2$$

(8)

$$x^2+(m+1)x+\left(\frac{\boldsymbol{m+1}}{\mathbf{2}}\right)^2=\left(x+\frac{\boldsymbol{m+1}}{\mathbf{2}}\right)^2$$

よって,

$\boxed{\text{ア}}$: $\mathbf{36}$	$\boxed{\text{イ}}$: $\mathbf{6}$	$\boxed{\text{ウ}}$: $\mathbf{9}$	$\boxed{\text{エ}}$: $\mathbf{3}$
$\boxed{\text{オ}}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$	$\boxed{\text{カ}}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\boxed{\text{キ}}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$	$\boxed{\text{ク}}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$
$\boxed{\text{ケ}}$: $\boldsymbol{4a^2}$	$\boxed{\text{コ}}$: $\boldsymbol{2a}$	$\boxed{\text{サ}}$: $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{k^2}$	$\boxed{\text{シ}}$: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{k}$
$\boxed{\text{ス}}$: $\boldsymbol{m+1}$	$\boxed{\text{セ}}$: $\boldsymbol{m+1}$	$\boxed{\text{ソ}}$: $\frac{\boldsymbol{m+1}}{\mathbf{2}}$	$\boxed{\text{タ}}$: $\frac{\boldsymbol{m+1}}{\mathbf{2}}$

【7】 (1)

$$x^2+4x=\boldsymbol{(x+2)^2-4}$$

(2)

$$\begin{aligned}&2x^2-6x\\ =&2(x^2-3x)\\ =&2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\\ =&\boldsymbol{2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&x^2+2x+5\\ =&(x^2+2x)+5\\ =&(x+1)^2-1+5\\ =&\boldsymbol{(x+1)^2+4}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}x^2-2x-7\\ =&\frac{1}{3}(x^2-6x)-7\\ =&\frac{1}{3}\left\{(x-3)^2-9\right\}-7\\ =&\frac{1}{3}(x-3)^2-3-7\\ =&\boldsymbol{\frac{1}{3}(x-3)^2-10}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}&-x^2-8x+4\\ =&-(x^2+8x)+4\\ =&-\left\{(x+4)^2-16\right\}+4\\ =&-(x+4)^2+16+4\\ =&\boldsymbol{-(x+4)^2+20}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}&-2x^2+6x+5\\ =&-2(x^2-3x)+5\\ =&-2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+5\\ =&-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+5\\ =&\boldsymbol{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{2}}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}x^2+4x+3\\ =&\sqrt{2}(x^2+2\sqrt{2}x)+3\\ =&\sqrt{2}\left\{(x+\sqrt{2})^2-2\right\}+3\\ =&\boldsymbol{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+3}\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}x^2+3x+1\\ =&\sqrt{3}(x^2+\sqrt{3}x)+1\\ =&\sqrt{3}\left\{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right\}+1\\ =&\boldsymbol{\sqrt{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}+1}\end{aligned}$$

(9)

$$
\begin{aligned}
& x^2+2ax-3a^2 \\
=& (x+a)^2-a^2-3a^2 \\
=& \boldsymbol{(x+a)^2-4a^2}
\end{aligned}
$$

(10)

$$
\begin{aligned}
& 2ax^2-10ax+3a^2 \\
=& 2a(x^2-5x)+3a^2 \\
=& 2a\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}+3a^2 \\
=& \boldsymbol{2a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}a+3a^2}
\end{aligned}
$$

(11)

$$
\begin{aligned}
& x^2+2(a-1)x+2a \\
=& \{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a \\
=& \{x+(a-1)\}^2-a^2+2a-1+2a \\
=& \{x+(a-1)\}^2-a^2+4a-1 \\
=& \boldsymbol{(x+a-1)^2-a^2+4a-1}
\end{aligned}
$$

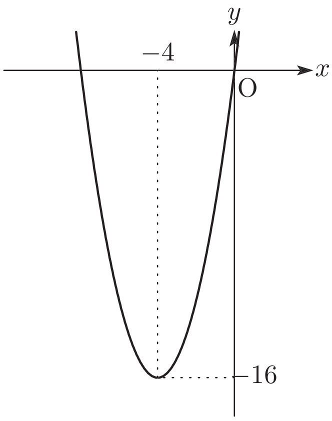
(12)

$$
\begin{aligned}
& x^2-(a+2)x+1 \\
=& \left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{4}+1 \\
=& \left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{a^2+4a+4}{4}+1 \\
=& \boldsymbol{\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{a^2+4a}{4}}
\end{aligned}
$$

【8】(1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x \\ &= (x+4)^2 - 16 \end{aligned}$$

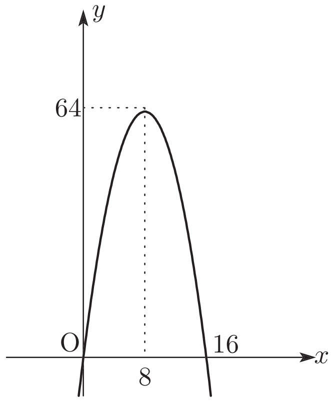
軸：$x = -4$　　頂点：$(-4,\ -16)$



(2)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 16x \\ &= -(x^2 - 16x) \\ &= -\{(x-8)^2 - 64\} \\ &= -(x-8)^2 + 64 \end{aligned}$$

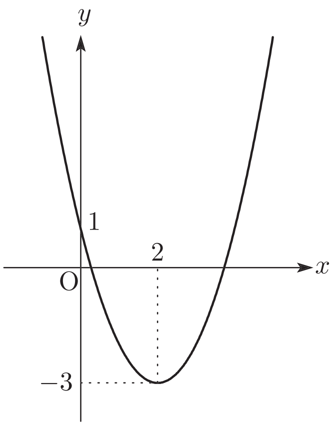
軸：$x = 8$　　頂点：$(8,\ 64)$



(3)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 1 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 1 \\ &= (x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

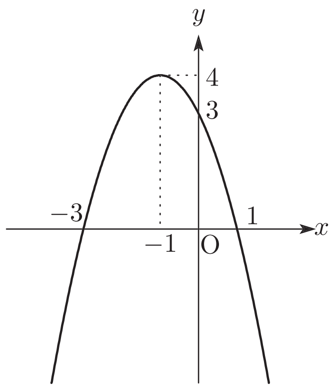
軸：$x = 2$　　頂点：$(2,\ -3)$



(4)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x^2 + 2x) + 3 \\ &= -\{(x+1)^2 - 1\} + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 1 + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

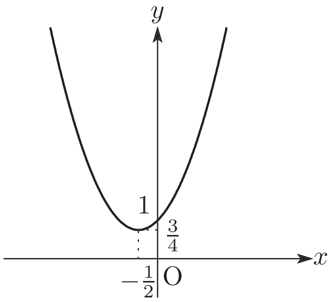
軸：$x = -1$　　頂点：$(-1,\ 4)$



(5)

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

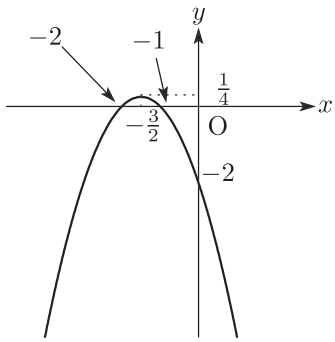
軸：$x = -\frac{1}{2}$　　頂点：$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$



(6)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 3x - 2 \\ &= -(x^2 + 3x) - 2 \\ &= -\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - 2 \\ &= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - 2 \\ &= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

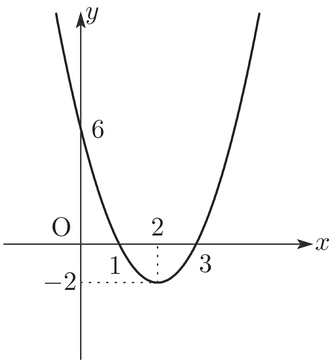
軸：$x = -\frac{3}{2}$　　頂点：$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{4}\right)$



(7)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 6 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 6 \\ &= 2\left\{(x-2)^2 - 4\right\} + 6 \\ &= 2(x-2)^2 - 8 + 6 \\ &= 2(x-2)^2 - 2 \end{aligned}$$

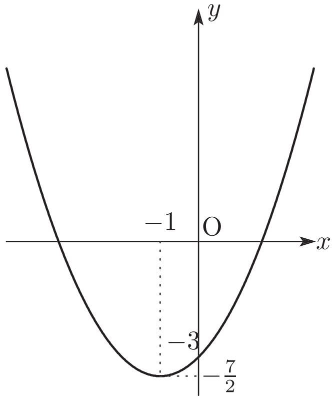
軸：$x = 2$　　頂点：$(2,\ -2)$



(8)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + x - 3 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x) - 3 \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 - 1\right\} - 3 \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2} - 3 \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

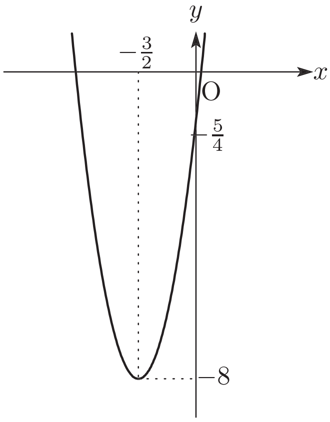
軸：$x = -1$　　頂点：$\left(-1,\ -\frac{7}{2}\right)$



(9)

$$
\begin{aligned}
y &= 3x^2 + 9x - \frac{5}{4} \\
&= 3(x^2 + 3x) - \frac{5}{4} \\
&= 3\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - \frac{5}{4} \\
&= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} - \frac{5}{4} \\
&= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 8
\end{aligned}
$$

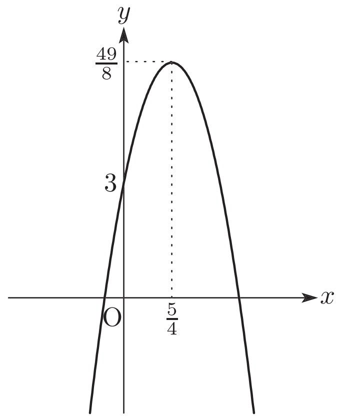
軸：$x = -\dfrac{3}{2}$　　頂点：$\left(-\dfrac{3}{2},\ -8\right)$



(10)

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 5x + 3 \\
&= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3 \\
&= -2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right\} + 3 \\
&= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} + 3 \\
&= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}
\end{aligned}
$$

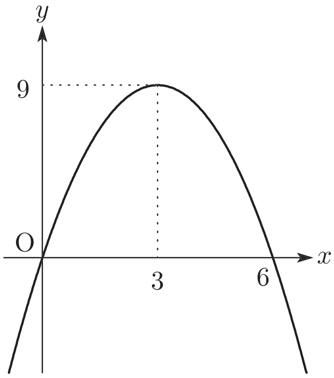
軸：$x = \dfrac{5}{4}$　　頂点：$\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{49}{8}\right)$



(11)

$$\begin{aligned} y &= x(6-x) \\ &= -x^2+6x \\ &= -(x^2-6x) \\ &= -\left\{(x-3)^2-9\right\} \\ &= -(x-3)^2+9 \end{aligned}$$

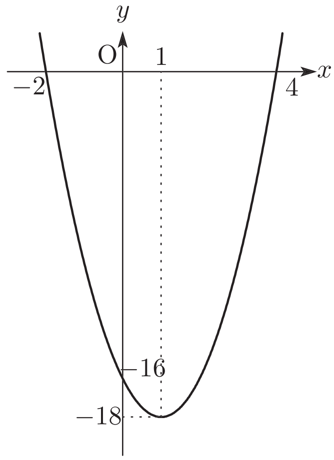
軸：$x=3$　　頂点：$(3,\ 9)$



(12)

$$\begin{aligned} y &= 2(x+2)(x-4) \\ &= 2x^2-4x-16 \\ &= 2(x^2-2x)-16 \\ &= 2\{(x-1)^2-1\}-16 \\ &= 2(x-1)^2-18 \end{aligned}$$

軸：$x=1$　　頂点：$(1,\ -18)$



添削課題

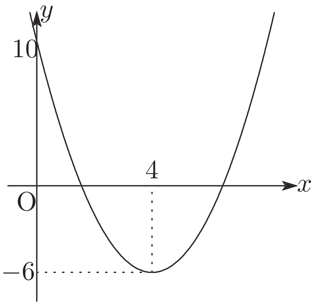
【1】(1)

$$y=(x-4)^2-6$$

軸の方程式は，$x=4$

頂点の座標は，$(4,\ -6)$

$x=0$ のとき，$y=(-4)^2-6=10$



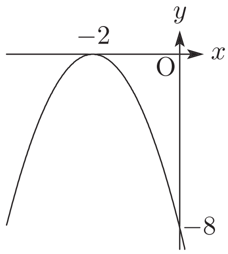
(2)

$$\begin{aligned} y&=-2x^2-8x-8\\ &=-2(x^2+4x+4)=-2(x+2)^2 \end{aligned}$$

軸の方程式は，$x=-2$

頂点の座標は，$(-2,\ 0)$

$x=0$ のとき，$y=-8$



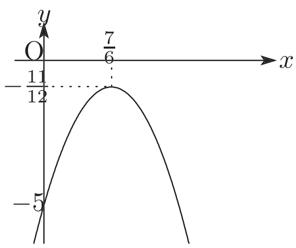
(3)

$$\begin{aligned} y&=-3x^2+7x-5\\ &=-3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{49}{12}-5\\ &=-3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{11}{12} \end{aligned}$$

軸の方程式は，$x=\dfrac{7}{6}$

頂点の座標は，$\left(\dfrac{7}{6},\ -\dfrac{11}{12}\right)$

$x=0$ のとき，$y=-5$



(4)

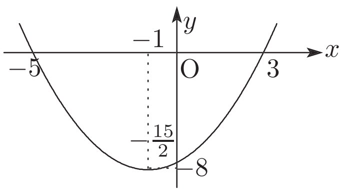
$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}(x+5)(x-3)\\ &=\frac{1}{2}(x^2+2x-15)\\ &=\frac{1}{2}\{(x+1)^2-16\}\\ &=\frac{1}{2}(x+1)^2-8 \end{aligned}$$

軸の方程式は，$x=-1$

頂点の座標は，$(-1,\ -8)$

$x=0$ のとき，$y=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot(-3)=-\dfrac{15}{2}$

（$y=0$ のとき，$x=-5,\ 3$ だから，放物線は x 軸と 2 点 $(-5,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わる.）



【2】 $y = 2x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1$
$= 2\left(x^2 - \dfrac{3}{4}x\right) + 1$
$= 2\left(x - \dfrac{3}{8}\right)^2 + \dfrac{23}{32}$

$y = ax^2 - 3x + b$
$= a\left(x^2 - \dfrac{3}{a}x\right) + b$
$= a\left(x - \dfrac{3}{2a}\right)^2 + b - \dfrac{9}{4a}$

2 つの放物線の頂点は $\left(\dfrac{3}{8},\ \dfrac{23}{32}\right)$，$\left(\dfrac{3}{2a},\ b - \dfrac{9}{4a}\right)$ で，これらが一致することから

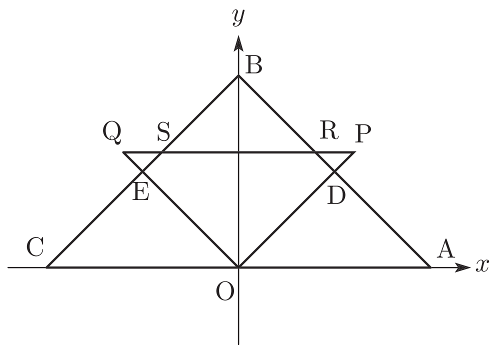
$$\begin{cases} \dfrac{3}{2a} = \dfrac{3}{8} & \cdots ① \\ b - \dfrac{9}{4a} = \dfrac{23}{32} & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$a = \mathbf{4}$
②に代入して，

$b - \dfrac{9}{16} = \dfrac{23}{32}$
$\therefore\ b = \mathbf{\dfrac{41}{32}}$

【3】 $0 < t \leqq 2$ のとき，

$S = \triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{2t \cdot t}{2} = t^2$



$2 < t \leqq 4$ のとき，
右の図のように，D (2, 2)，E (−2, 2)，R $(4-t,\ t)$，S $(t-4,\ t)$ をとると，

$S = \triangle\mathrm{OPQ} - \triangle\mathrm{DPR} - \triangle\mathrm{EQS}$
$= t^2 - 2 \cdot \dfrac{(2t-4)(t-2)}{2}$
$= t^2 - 2(t-2)^2$
$= -t^2 + 8t - 8$
$= -(t-4)^2 + 8$

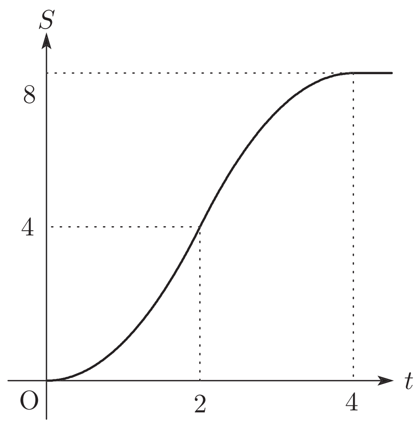
$4 < t$ のとき，

$S = $ 正方形 ODBE $= \dfrac{4^2}{2} = 8$

以上から

$$S = \begin{cases} t^2 & (0 < t \leqq 2) \\ -(t-4)^2 + 8 & (2 < t \leqq 4) \\ 8 & (4 < t) \end{cases}$$

となり，グラフは右の図の実線部分のようになる．



問題

【1】(1) ① グラフが下に凸であることから，$\boldsymbol{a > 0}$

② 軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$

グラフから，軸は $x < 0$ の範囲にあるので，$-\dfrac{b}{2a} < 0$

①より，$a > 0$ なので，$\boldsymbol{b > 0}$

③ グラフの y 切片の符号より，$\boldsymbol{c > 0}$

④ 頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$ だから，

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$$

⑤ グラフより，$x = 1$ のとき，$y > 0$ だから

$$\boldsymbol{a + b + c > 0}$$

⑥ グラフより，$x = -1$ のとき，$y = 0$ だから

$$\boldsymbol{a - b + c = 0}$$

⑦ グラフより，$0 < c < 1$ なので，

$$a + b + c < a + b + 1$$

⑤より，$a + b + c > 0$ だから，$\boldsymbol{a + b + 1 > 0}$

(2) ① グラフが下に凸であることから，$\boldsymbol{a > 0}$

② 軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$

グラフから，軸は $x < 0$ の範囲にあるので，$-\dfrac{b}{2a} < 0$

①より，$a > 0$ なので，$\boldsymbol{b > 0}$

③ グラフの y 切片の符号より，$\boldsymbol{c < 0}$

④ 頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ で $a > 0$ だから，

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$$

⑤ グラフより，$x = 1$ のとき，$y = 0$ だから，

$$\boldsymbol{a + b + c = 0}$$

⑥ グラフより，$x = -1$ のとき，$y < 0$ だから，

$$\boldsymbol{a - b + c < 0}$$

⑦ ①，②より，$a > 0$, $b > 0$ なので

$$\boldsymbol{a + b > 0}$$

【2】(1) 頂点が $(-2,\ 5)$ なので，
求める 2 次関数は

$$y = a(x+2)^2 + 5 \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが点 $(0,\ 1)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 1 &= a(0+2)^2 + 5 \\ 1 &= 4a + 5 \\ 4a &= -4 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= -(x+2)^2 + 5 \\ &= -(x^2+4x+4) + 5 \\ \therefore\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -x^2 - 4x + 1} \end{aligned}$$

(2) 頂点が $(-1,\ 2)$ なので，
求める 2 次関数は

$$y = a(x+1)^2 + 2 \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが点 $(1,\ 6)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 6 &= a(1+1)^2 + 2 \\ 6 &= 4a + 2 \\ 4a &= 4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^2 + 2 \\ \therefore\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= x^2 + 2x + 3} \end{aligned}$$

(3) 軸が $x = -1$ なので，
求める 2 次関数は

$$y = a(x+1)^2 + \beta \quad (a \neq 0)$$

点 $(1,\ 2)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 2 &= a(1+1)^2 + \beta \\ 2 &= 4a + \beta \ \cdots ① \end{aligned}$$

また，点 $(0,\ -4)$ も通るので，

$$\begin{aligned} -4 &= a(0+1)^2 + \beta \\ -4 &= a + \beta \ \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{aligned} 3a &= 6 \\ a &= 2,\ \beta = -6 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 6 \\ &= 2(x^2+2x+1) - 6 \\ \therefore\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 2x^2 + 4x - 4} \end{aligned}$$

(4) 軸が $x = 3$ なので，求める 2 次関数は

$$y = a(x-3)^2 + \beta \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが点 $(1,\ 2)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 2 &= a(1-3)^2 + \beta \\ 2 &= 4a + \beta \ \cdots ① \end{aligned}$$

また，点 $(4,\ -4)$ も通るので，

$$\begin{aligned} -4 &= a(4-3)^2 + \beta \\ -4 &= a + \beta \ \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{aligned} 3a &= 6 \\ a &= 2,\ \beta = -6 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= 2(x-3)^2 - 6 \\ &= 2(x^2-6x+9) - 6 \\ \therefore\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 2x^2 - 12x + 12} \end{aligned}$$

(5) x 軸と点 $(-2,\ 0)$ で接しているので，
頂点は $(-2,\ 0)$
よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x+2)^2 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．
これが，点 $(-4,\ 2)$ を通るので

$$\begin{aligned} 2 &= a(-4+2)^2 \\ 2 &= 4a \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x+2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x^2+4x+4) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2}$$

(6) 軸が $x = 3$ で x 軸に接しているので，
頂点は $(3,\ 0)$
よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x-3)^2 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．
これが，点 $(6,\ -3)$ を通るので，

$$\begin{aligned} -3 &= a(6-3)^2 \\ -3 &= 9a \\ a &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}(x-3)^2 \\ &= -\frac{1}{3}(x^2-6x+9) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3}$$

(7) x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$, $(4,\ 0)$ で交わるので，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)(x-4) \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．
頂点の x 座標は $\dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$
よって，頂点 $\left(\dfrac{5}{2},\ -8\right)$ を
$y = a(x-1)(x-4)$ に代入して

$$\begin{aligned} -8 &= a\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-4\right) \\ -8 &= a \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ \frac{9}{4}a &= 8 \\ a &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= \frac{32}{9}(x-1)(x-4) \\ &= \frac{32}{9}(x^2-5x+4) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{32}{9}x^2 - \frac{160}{9}x + \frac{128}{9}}$$

(8) 求める 2 次関数は，2 点 $(-3,\ 0)$，$(4,\ 0)$ を通るので

$$y = a(x+3)(x-4)$$

とおける．$(0,\ -3)$ を通るので，

$$\begin{aligned} -3 &= a(0+3)(0-4) \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}(x+3)(x-4) \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - x - 12) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - 3}$$

(9) 求める 2 次関数を，

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおく．これが，3 点 $(0,\ 6)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ -2)$ を通るので

$$\begin{cases} 6 = c & \cdots ① \\ 0 = a + b + c & \cdots ② \\ -2 = 4a + 2b + c & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②，③に代入して

$$\begin{aligned} a + b &= -6 & \cdots ②' \\ 4a + 2b &= -8 & \cdots ③' \end{aligned}$$

よって，$a = 2,\ b = -8,\ c = 6$

$\therefore\ \boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 6}$

(10) 求める 2 次関数を，

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおく．これが 3 点 $(-1,\ 5)$，$(1,\ -1)$，$(3,\ 1)$ を通るので

$$\begin{cases} a - b + c = 5 & \cdots ① \\ a + b + c = -1 & \cdots ② \\ 9a + 3b + c = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

よって，$a = 1,\ b = -3,\ c = 1$

$\therefore\ \boldsymbol{y = x^2 - 3x + 1}$

【3】(1) 求める方程式は，

$$
\begin{aligned}
y-4&=-4(x+2)+5\\
y&=-4x-3+4\\
\therefore\ \boldsymbol{y}&\boldsymbol{=-4x+1}
\end{aligned}
$$

(2) 求める方程式は，

$$
\begin{aligned}
&y+1=-2(x-1)^2+4(x-1)-1\\
&y+1=-2x^2+4x-2+4x-4-1\\
&\therefore\ \boldsymbol{y=-2x^2+8x-8}
\end{aligned}
$$

(3) $y=-2x^2+4x-1$ を x 軸正の方向に -4，y 軸正の方向に 3 平行移動すると，$y=ax^2+bx+c$ になるので

$$
\begin{aligned}
y-3&=-2(x+4)^2+4(x+4)-1\\
y-3&=-2(x^2+8x+16)+4(x+4)-1\\
y&=-2x^2-12x-14
\end{aligned}
$$

よって，

$$\boldsymbol{a=-2,\ b=-12,\ c=-14}$$

(4) $y=x^2+4x$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2+4x\\
&=(x+2)^2-4
\end{aligned}
$$

より，$(-2,\ -4)$ である．
$y=x^2-6x$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2-6x\\
&=(x-3)^2-9
\end{aligned}
$$

より，$(3,\ -9)$ である．
したがって，$(-2,\ -4)$ が $(3,\ -9)$ に平行移動するので，

$$\boldsymbol{p=5,\ q=-5}$$

(5) $y=x^2+4x+8$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2+4x+8\\
&=(x+2)^2-4+8\\
&=(x+2)^2+4
\end{aligned}
$$

より，頂点は $(-2,\ 4)$
$y=x^2-2x+2$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2-2x+2\\
&=(x-1)^2-1+2\\
&=(x-1)^2+1
\end{aligned}
$$

より，頂点は $(1,\ 1)$
$(-2,\ 4)$ が $(1,\ 1)$ に平行移動するので，

$$\boldsymbol{p=3,\ q=-3}$$

(6) 3 点 $(0,\ -8)$, $(1,\ -5)$, $(3,\ -11)$ を通る 2 次関数を求める．
求める 2 次関数を

$$y = dx^2 + ex + f \quad (d \fallingdotseq 0)$$

とおくと，

$$\begin{cases} -8 = f & \cdots ① \\ -5 = d + e + f & \cdots ② \\ -11 = 9d + 3e + f & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②，③に代入して

$$\begin{aligned} d + e &= 3 \quad \cdots ②' \\ 9d + 3e &= -3 \quad \cdots ③' \end{aligned}$$

よって，$d = -2$，$e = 5$，$f = -8$

$$\therefore\ y = -2x^2 + 5x - 8$$

これを x 軸正の方向に -1，y 軸正の方向に 2 平行移動したものが，$y = ax^2 + bx + c$ となるので，x を $x+1$，y を $y-2$ に置き換えると

$$\begin{aligned} y - 2 &= -2(x+1)^2 + 5(x+1) - 8 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1) + 5x + 5 - 8 \\ &= -2x^2 + x - 5 \\ y &= -2x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a = -2,\ b = 1,\ c = -3}$$

(7) $y = 2x^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動するので

$$y = 2(x-p)^2 + q$$

とおける．これが，$(1,\ 4)$ を通るので

$$4 = 2(1-p)^2 + q \ \cdots ①$$

また，$(2,\ 6)$ も通るので，

$$6 = 2(2-p)^2 + q \ \cdots ②$$

①，②より，q を消去して，

$$\begin{aligned} -2 &= 2(1-p)^2 - 2(2-p)^2 \\ &= 2(1 - 2p + p^2) - 2(4 - 4p + p^2) \\ &= -6 + 4p \\ 4p &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{p = 1,\ q = 4}$$

(8) $y = -x^2 + 5x + 4$ を平行移動するので，

$$y = -x^2 + ax + b$$

とおける．
これが，$(-1,\ 1)$，$(3,\ 1)$ を通るので

$$\begin{cases} 1 = -1 - a + b & \cdots ① \\ 1 = -9 + 3a + b & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より

$$\begin{aligned} 0 &= 8 - 4a \\ 4a &= 8 \\ a &= 2,\ b = 4 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 2x + 4}$$

(9) $y = -2x^2 + 5x + 3$ を x 軸方向に p 平行移動すると

$$y = -2(x-p)^2 + 5(x-p) + 3$$

となる．これが原点を通るので

$$\begin{aligned} 0 &= -2(0-p)^2 + 5(0-p) + 3 \\ 0 &= -2p^2 - 5p + 3 \\ 2p^2 + 5p - 3 &= 0 \\ (2p-1)(p+3) &= 0 \\ \boldsymbol{p} &\boldsymbol{= \frac{1}{2},\ -3} \end{aligned}$$

(10) $y = x^2 + ax - 1$ の頂点は

$$\begin{aligned} y &= x^2 + ax - 1 \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 - 1 \end{aligned}$$

より，$\left(-\frac{1}{2}a,\ -\frac{1}{4}a^2 - 1\right)$ となる．
これを x 軸正の方向に 1 平行移動すると，頂点は $\left(-\frac{1}{2}a + 1,\ -\frac{1}{4}a^2 - 1\right)$ となり，これが $(2,\ b)$ に一致するので

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + 1 = 2 & \cdots ① \\ -\frac{1}{4}a^2 - 1 = b & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$a = -2$
②より，$b = -2$
よって，$\boldsymbol{a = -2,\ b = -2}$

【4】(1) 3 点 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 5)$ のうち，
2 点 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$ の y 座標が同じなので，求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)(x-1)+2 \quad (a \fallingdotseq 0) \cdots ①$$

とおける．これが $(2,\ 5)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 5&=a(2+1)(2-1)+2 \\ 5&=3a+2 \\ 3a&=3 \\ a&=1 \end{aligned}$$

これを①に代入すると

$$\begin{aligned} y&=1\cdot(x+1)(x-1)+2 \\ &=x^2-1+2 \\ &=x^2+1 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+1}$

＜別解＞

$y=ax^2+bx+c$ とおく．
$(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 5)$ を通るので

$$\begin{cases} a-b+c=2 & \cdots ① \\ a+b+c=2 & \cdots ② \\ 4a+2b+c=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② より，

$$b=0$$

②，③に代入して

$$\begin{cases} a+c=2 & \cdots ②' \\ 4a+c=5 & \cdots ③' \end{cases}$$

②′，③′ より，

$$a=1,\ c=1$$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+1}$

(2) 3 点 $(-1,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 5)$ のうち
2 点 $(-1,\ 2)$, $(2,\ 2)$ の y 座標が同じなので，求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)(x-2)+2 \quad (a \fallingdotseq 0) \cdots ①$$

とおける．これが $(3,\ 5)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 5&=a(3+1)(3-2)+2 \\ 5&=4a+2 \\ 4a&=3 \\ a&=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

これを①に代入すると，

$$\begin{aligned} y&=\frac{3}{4}(x+1)(x-2)+2 \\ &=\frac{3}{4}(x^2-x-2)+2 \\ &=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$$

＜別解＞

$y=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ とおく．
$(-1,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 5)$ を通るので

$$\begin{cases} a-b+c=2 & \cdots ① \\ 4a+2b+c=2 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② より，

$$\begin{aligned} 3a+3b&=0 \\ a+b&=0 \cdots ④ \end{aligned}$$

②，③ より，

$$5a+b=3 \cdots ⑤$$

④，⑤ より，

$$\begin{aligned} 4a&=3 \\ a&=\frac{3}{4},\ b=-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

①に代入して，

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+c=2 \qquad c=\frac{1}{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$$

(3) x 軸に接しているので，求める 2 次関数は

$$y=a(x-p)^2 \quad (a \neq 0)$$

とおける．(2, 1), (6, 9) を通るので

$$1=a(2-p)^2 \ \cdots ①$$
$$9=a(6-p)^2 \ \cdots ②$$

①，②より，$\dfrac{②}{①}$ を考え，

$$\begin{aligned} 9&=\frac{(6-p)^2}{(2-p)^2} \\ 9(2-p)^2&=(6-p)^2 \\ 8p^2-24p&=0 \\ 8p(p-3)&=0 \\ p&=0,\ 3 \end{aligned}$$

$p=0$ のとき ①より，

$$\begin{aligned} 1&=a(2-0)^2 \\ 1&=4a \\ a&=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$p=3$ のとき ①より，

$$\begin{aligned} 1&=a(2-3)^2 \\ 1&=a \\ a&=1 \end{aligned}$$

よって，$a=\dfrac{1}{4}$，$p=0$ のとき

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}(x-0)^2 \\ &=\frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

一方，$a=1$，$p=3$ のとき

$$\begin{aligned} y&=1\cdot(x-3)^2 \\ &=x^2-6x+9 \end{aligned}$$

したがって，

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x^2,\ y=x^2-6x+9}$$

(4) 放物線 $y=x^2+2ax+b$ は x 軸に接しているので，求める 2 次関数は

$$y=(x-p)^2$$

とおける．これが (1, 4) を通るので

$$\begin{aligned} 4&=(1-p)^2 \\ 1-p&=\pm 2 \\ p&=-1,\ 3 \end{aligned}$$

$p=-1$ のとき，

$$\begin{aligned} y&=(x+1)^2 \\ &=x^2+2x+1 \end{aligned}$$

$p=3$ のとき，

$$\begin{aligned} y&=(x-3)^2 \\ &=x^2-6x+9 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (-3,\ 9)}$$

(5) 頂点が $y=4x-3$ 上にあるので，頂点を $(t,\ 4t-3)$ とおける．よって，求める 2 次関数は

$$y=2(x-t)^2+4t-3 \quad \cdots ①$$

とおける．これが $(2,\ 3)$ を通るので

$$\begin{aligned}3&=2(2-t)^2+4t-3\\3&=2(4-4t+t^2)+4t-3\\2t^2-4t+2&=0\\(t-1)^2&=0\\t&=1\end{aligned}$$

よって，①に $t=1$ を代入して

$$\begin{aligned}y&=2(x-1)^2+1\\&=2x^2-4x+3\end{aligned}$$

したがって，

$$\boldsymbol{a=-4,\ b=3}$$

(6) 頂点が $y=x-5$ 上にあるので，頂点を $(t,\ t-5)$ とおける．
よって，求める 2 次関数は

$$y=a(x-t)^2+t-5 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．これが $(2,\ -3)$, $(3,\ 0)$ を通るので

$$\begin{cases}-3=a(2-t)^2+t-5 & \cdots ①\\0=a(3-t)^2+t-5 & \cdots ②\end{cases}$$

より，

$$\begin{cases}a(2-t)^2=-t+2 & \cdots ①'\\a(3-t)^2=-t+5 & \cdots ②'\end{cases}$$

$t \fallingdotseq 2$ のもとで，$\dfrac{②'}{①'}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{(3-t)^2}{(2-t)^2}&=\frac{-t+5}{-t+2}\\(-t+5)(2-t)^2&=(-t+2)(3-t)^2\\9t^2-24t+20&=8t^2-21t+18\\t^2-3t+2&=0\\(t-1)(t-2)&=0\\t&=1,\ 2\end{aligned}$$

$t \fallingdotseq 2$ より，$t=1$
$t=1$ のとき，①より

$$\begin{aligned}-3&=a(2-1)^2+1-5\\-3&=a-4\\a&=1\end{aligned}$$

よって，$t=1$，$a=1$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= 1\cdot(x-1)^2+1-5 \\ &= x^2-2x+1-4 \\ &= x^2-2x-3 \end{aligned}$$

また，$t=2$ のときは，①′ は満たし，②′ より

$$\begin{aligned} &0 = a(3-2)^2+2-5 \\ &0 = a-3 \\ &a = 3 \end{aligned}$$

よって，$t=2$，$a=3$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= 3(x-2)^2+2-5 \\ &= 3(x^2-4x+4)+2-5 \\ &= 3x^2-12x+12+2-5 \\ &= 3x^2-12x+9 \end{aligned}$$

以上より，

$$\boldsymbol{y=x^2-2x-3,\ y=3x^2-12x+9}$$

【5】(1) 2 次関数 $y=x^2-2x$ において，y を $-y$ に置き換えると

$$\begin{aligned} -y &= x^2-2x \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -x^2+2x} \end{aligned}$$

(2) 2 次関数 $y=x^2-2x$ において，x を $-x$ に置き換えると

$$\begin{aligned} &y = (-x)^2-2\cdot(-x) \\ &\boldsymbol{y = x^2+2x} \end{aligned}$$

(3) 2 次関数 $y=x^2-2x$ において，x を $-x$ ，y を $-y$ に置き換えると

$$\begin{aligned} -y &= (-x)^2-2\cdot(-x) \\ -y &= x^2+2x \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -x^2-2x} \end{aligned}$$

(4) 2 次関数 $y=x^2-2x$ において，x を $x-2$ ，y を $y+2$ に置き換えると

$$\begin{aligned} y+2 &= (x-2)^2-2(x-2) \\ y &= x^2-6x+6 \end{aligned}$$

これを原点に関して対称移動するので，x を $-x$ ，y を $-y$ に置き換えると

$$\begin{aligned} -y &= (-x)^2-6\cdot(-x)+6 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -x^2-6x-6} \end{aligned}$$

(5) $y=x^2-2x$ 上の任意の点 $(x,\ y)$ が $(1,\ 2)$ に関して対称移動した点を $(p,\ q)$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{x+p}{2}=1 & \cdots ① \\ \dfrac{y+q}{2}=2 & \cdots ② \end{cases}$$

である．①より，

$$\frac{x+p}{2}=1 \qquad x+p=2 \qquad x=-p+2$$

②より，

$$\frac{y+q}{2}=2 \qquad y+q=4 \qquad y=-q+4$$

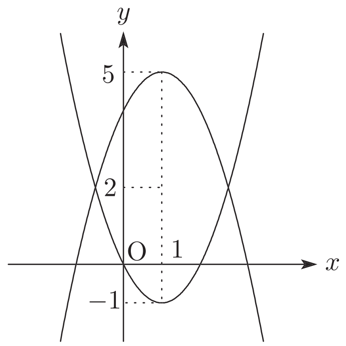
となる．よって，$y=x^2-2x$ において，x を $-x+2$，y を $-y+4$ に置き換えて

$$\begin{aligned}-y+4&=(-x+2)^2-2(-x+2)\\ -y&=x^2-2x-4\\ \boldsymbol{y}&\boldsymbol{=-x^2+2x+4}\end{aligned}$$

<別解>

$$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

より，グラフは右の図のようになる．これより，



$$\begin{aligned}y&=-(x-1)^2+5\\ &=-(x^2-2x+1)+5\\ &=-x^2+2x-1+5\\ \boldsymbol{y}&\boldsymbol{=-x^2+2x+4}\end{aligned}$$

添削課題

【1】 $y = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

(1) 放物線が上に凸 なので，$\boldsymbol{a < 0}$

(2) 軸の位置から，$-\dfrac{b}{2a} < 0$

これと $a < 0$ より，$\boldsymbol{b < 0}$

(3) y 軸との交点の y 座標から，$\boldsymbol{c > 0}$

(4) 頂点の y 座標から，$-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$

これと $a < 0$ より，$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$

(5) $x = -1$ のときの y 座標から，$\boldsymbol{a - b + c > 0}$

(6) $x = -2$ のときの y 座標から，$\boldsymbol{4a - 2b + c = 0}$

(7) $x = -3$ のときの y 座標から，$\boldsymbol{9a - 3b + c < 0}$

【2】(1) $y = x^2 + ax + b \quad \cdots ①$

を平行移動した放物線で，2 点 (0, 0), (4, 0) を通るものの式は

$y = x(x - 4)$

この放物線を x 軸方向に -2 ，y 軸方向に $+3$ だけ平行移動すると，

$y - 3 = (x + 2)(x + 2 - 4)$

$\therefore \quad y = x^2 - 1$

これが①と一致するから，$\boldsymbol{a = 0,\ b = -1}$

(2) 求める放物線は頂点の y 座標が 0 だから，その方程式を $y = a(x - p)^2$ とおく．

2 点 (0, −1), (3, −4) を通るから

$$\begin{cases} -1 = ap^2 & \cdots ① \\ -4 = a(3 - p)^2 & \cdots ② \end{cases}$$

$\dfrac{②}{①}$ より，

$$4 = \frac{(3 - p)^2}{p^2}$$

$$4p^2 = (3 - p)^2$$

$$3p^2 + 6p - 9 = 0$$

$$p^2 + 2p - 3 = 0$$

$$(p - 1)(p + 3) = 0 \qquad \therefore\ p = 1,\ -3$$

$p = 1$ のとき，①より，$a = -1$

$p = -3$ のとき，①より，$a = -\dfrac{1}{9}$

したがって，求める式は

$$\boldsymbol{y = -(x - 1)^2,\ y = -\frac{1}{9}(x + 3)^2}$$

【3】　$y = \boxed{\text{ア}}\,x^2$ を平行移動したものが①だから，$\boxed{\text{ア}} = \mathbf{3}$

①を点対称移動したものが②だから，$\boxed{\text{カ}} = \mathbf{-3}$

①は $y = 3(x+4)^2 + \boxed{\text{エ}} - 48$ より，頂点 $(-4,\ \boxed{\text{エ}} - 48)$

②は $y = -3(x-6)^2 + 9$ より，頂点 $(6,\ 9)$

①，②の頂点を結ぶ線分の中点が $(\boxed{\text{オ}},\ 3)$ だから，

$\boxed{\text{オ}} = \mathbf{1}$，$\boxed{\text{エ}} = \mathbf{45}$

よって，①の頂点は $(-4,\ -3)$ で，$\boxed{\text{イ}} = \mathbf{-4}$，$\boxed{\text{ウ}} = \mathbf{-3}$

（答）

$\boxed{\text{ア}}$ **3**　$\boxed{\text{イ}}$ **−4**　$\boxed{\text{ウ}}$ **−3**　$\boxed{\text{エ}}$ **45**　$\boxed{\text{オ}}$ **1**　$\boxed{\text{カ}}$ **−3**

【4】　C_1 の頂点は $(2\alpha,\ 0)$ で，C_1 の方程式は $y = (x - 2\alpha)^2$

C_2 の頂点は $(0,\ 2\beta)$ で，C_2 の方程式は $y = -x^2 + 2\beta$

C_1 が C_2 の頂点を通るとき，

$2\beta = (0 - 2\alpha)^2$

すなわち，

$0 = -(2\alpha)^2 + 2\beta$

が成り立つから，C_2 は C_1 の頂点を通る．　（証明終）