６章　２次関数（３）－２次関数の最大・最小Ⅰ－

問題

【1】(1)

$$y = 3x^2 - 2$$

であるから,
最大値：なし，最小値：$\boldsymbol{-2\ (x=0)}$

(2)

$$y = -2x^2 + 3$$

であるから,
最大値：$\boldsymbol{3\ (x=0)}$，最小値：なし

(3)

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 12x + 13 \\ &= 3(x^2 - 4x) + 13 \\ &= 3\{(x-2)^2 - 4\} + 13 \\ &= 3(x-2)^2 - 12 + 13 \\ &= 3(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

であるから,
最大値：なし，最小値：$\boldsymbol{1\ (x=2)}$

(4)

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 9x - 2 \\ &= -3(x^2 - 3x) - 2 \\ &= -3\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - 2 \\ &= -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} - 2 \\ &= -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \end{aligned}$$

であるから,
最大値：$\boldsymbol{\frac{19}{4}\left(x = \frac{3}{2}\right)}$，最小値：なし

(5)

$$\begin{aligned} y &= x(x-4) \\ &= x^2 - 4x \\ &= (x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

であるから,
最大値：なし，最小値：$\boldsymbol{-4\ (x=2)}$

(6)

$$\begin{aligned} y &= x(1-x) \\ &= -x^2 + x \\ &= -(x^2 - x) \\ &= -\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから,
最大値：$\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(x = \frac{1}{2}\right)}$，最小値：なし

(7)

$$\begin{aligned} y &= (x-1)(x-3) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 3 \\ &= (x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

であるから,
最大値：なし，最小値：$\boldsymbol{-1\ (x=2)}$

(8)

$$\begin{aligned} y &= (3x-2)(x+1) \\ &= 3x^2 + x - 2 \\ &= 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) - 2 \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right\} - 2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} - 2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} \end{aligned}$$

であるから,
最大値：なし,
最小値：$\boldsymbol{-\frac{25}{12}\ \left(x = -\frac{1}{6}\right)}$

(9)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x) + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 - 1\right\} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから,

最大値：なし，最小値：$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ $\boldsymbol{(x = -1)}$

(10)

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 \\ &= -\frac{2}{3}(x^2 - 4x) + 1 \\ &= -\frac{2}{3}\{(x-2)^2 - 4\} + 1 \\ &= -\frac{2}{3}(x-2)^2 + \frac{8}{3} + 1 \\ &= -\frac{2}{3}(x-2)^2 + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

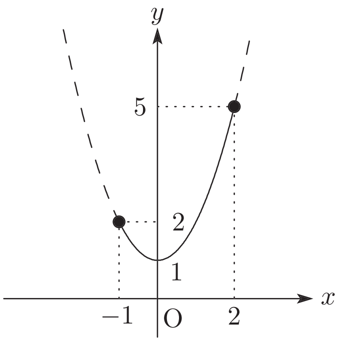
であるから,

最大値：$\boldsymbol{\frac{11}{3}}$ $\boldsymbol{(x = 2)}$，最小値：なし

【2】(1)

$$y = x^2 + 1$$

であるから,



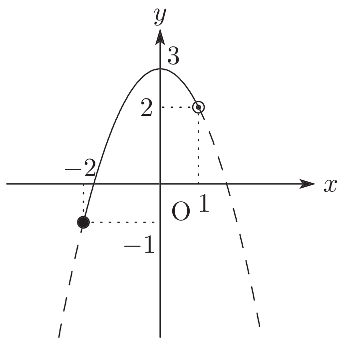
最大値：5 $\boldsymbol{(x = 2)}$，

最小値：1 $\boldsymbol{(x = 0)}$

(2)

$$\begin{aligned} y &= 3 - x^2 \\ &= -x^2 + 3 \end{aligned}$$

であるから,



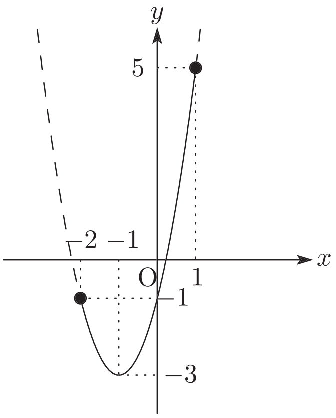
最大値：3 $\boldsymbol{(x = 0)}$，

最小値：$\boldsymbol{-1}$ $\boldsymbol{(x = -2)}$

(3)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2+4x-1 \\ &= 2(x^2+2x)-1 \\ &= 2\{(x+1)^2-1\}-1 \\ &= 2(x+1)^2-2-1 \\ &= 2(x+1)^2-3 \end{aligned}$$

であるから，

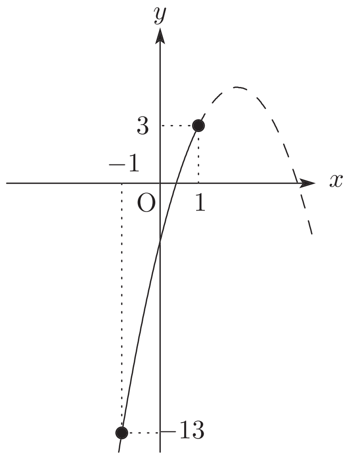


最大値：$\mathbf{5\ (\boldsymbol{x}=1)}$,
最小値：$\mathbf{-3\ (\boldsymbol{x}=-1)}$

(4)

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+8x-3 \\ &= -2(x^2-4x)-3 \\ &= -2\{(x-2)^2-4\}-3 \\ &= -2(x-2)^2+8-3 \\ &= -2(x-2)^2+5 \end{aligned}$$

であるから，

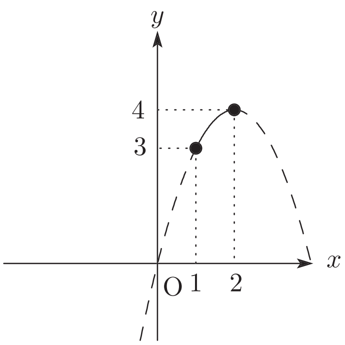


最大値：$\mathbf{3\ (\boldsymbol{x}=1)}$,
最小値：$\mathbf{-13\ (\boldsymbol{x}=-1)}$

(5)

$$\begin{aligned} y &= 4x-x^2 = -(x^2-4x) \\ &= -\{(x-2)^2-4\} \\ &= -(x-2)^2+4 \end{aligned}$$

であるから，

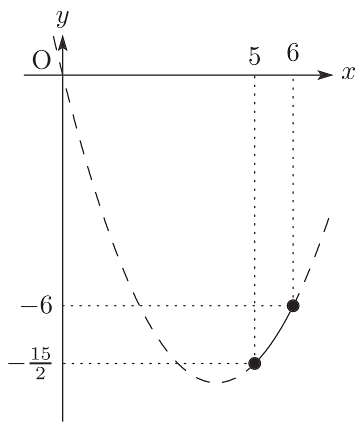


最大値：$\mathbf{4\ (\boldsymbol{x}=2)}$,
最小値：$\mathbf{3\ (\boldsymbol{x}=1)}$

(6)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2-4x \\ &= \frac{1}{2}(x^2-8x) \\ &= \frac{1}{2}\{(x-4)^2-16\} \\ &= \frac{1}{2}(x-4)^2-8 \end{aligned}$$

であるから，

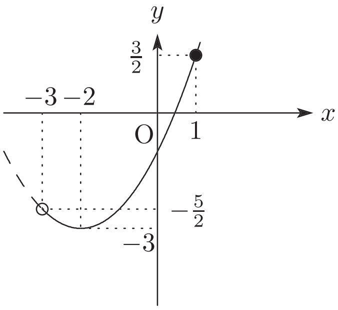


最大値：$\mathbf{-6\ (\boldsymbol{x}=6)}$,
最小値：$\mathbf{-\frac{15}{2}\ (\boldsymbol{x}=5)}$

(7)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + 4x) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4\} - 1 \\
&= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 - 1 \\
&= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3
\end{aligned}
$$

であるから，



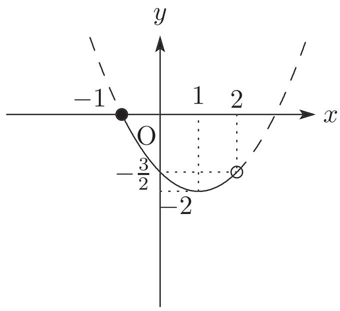
最大値：$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$ $\boldsymbol{(x = 1)}$，

最小値：$\boldsymbol{-3}$ $\boldsymbol{(x = -2)}$

(8)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}(x+1)(x-3) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - 2x) - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\{(x-1)^2 - 1\} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2
\end{aligned}
$$

であるから，



最大値：$\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{(x = -1)}$，

最小値：$\boldsymbol{-2}$ $\boldsymbol{(x = 1)}$

【3】(1) $x = 1$ のとき，最大値 8 となることから，$a < 0$

また，頂点は (1, 8)

よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 + 8 \quad (a < 0)$$

とおける．(2, 3) を通るので，

$$
\begin{aligned}
&3 = a \cdot (2-1)^2 + 8 \\
&3 = a + 8 \\
&a = -5
\end{aligned}
$$

これは $a < 0$ をみたすので，

求める 2 次関数は

$$
\begin{aligned}
y &= -5(x-1)^2 + 8 \\
&= -5(x^2 - 2x + 1) + 8
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{y = -5x^2 + 10x + 3}$$

(2) x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ で交わり，最大値 12 を持つことから，求める 2 次関数は

$$y = a(x+1)(x-3) \quad (a < 0)$$

とおける．2 次関数の対称性から，

頂点の x 座標は，$\dfrac{-1+3}{2} = 1$

よって，頂点は (1, 12) であるので

$$
\begin{aligned}
&12 = a(1+1)(1-3) \\
&12 = -4a \\
&a = -3
\end{aligned}
$$

これは $a < 0$ をみたすので，

求める 2 次関数は

$$
\begin{aligned}
y &= -3(x+1)(x-3) \\
&= -3(x^2 - 2x - 3)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{y = -3x^2 + 6x + 9}$$

(3) 2 点 $(2,\ 3)$，$(3,\ 3)$ を通り，最小値 -1 を持つことから，求める 2 次関数は

$$y = a(x-2)(x-3)+3\ (a>0)$$

とおける．2 次関数の対称性から，
頂点の x 座標は，$\dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$
である．よって，
頂点は $\left(\dfrac{5}{2},\ -1\right)$ であるので，

$$\begin{aligned} -1 &= a\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)+3 \\ -1 &= a\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3 \\ \frac{1}{4}a &= 4 \\ a &= 16 \end{aligned}$$

これは $a>0$ をみたすので，
求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= 16(x-2)(x-3)+3 \\ &= 16(x^2-5x+6)+3 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 16x^2-80x+99} \end{aligned}$$

(4) $x=1$ のとき最大値 1 となることから，$a<0$
また，頂点は $(1,\ 1)$
よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2+1\ (a<0)$$

とおける．$(0,\ -1)$ を通るので

$$\begin{aligned} -1 &= a(0-1)^2+1 \\ -1 &= a+1 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

これは $a<0$ をみたすので，
求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+1 \\ &= -2(x^2-2x+1)+1 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -2x^2+4x-1} \end{aligned}$$

(5) $x=1$ のとき最大値 4 となることから，$a<0$
また，頂点は $(1,\ 4)$
よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2+4\ (a<0)$$

とおける．$(3,\ -8)$ を通るので

$$\begin{aligned} -8 &= a(3-1)^2+4 \\ -8 &= 4a+4 \\ 4a &= -12 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

これは $a<0$ をみたすので，
求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -3(x-1)^2+4 \\ &= -3(x^2-2x+1)+4 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -3x^2+6x+1} \end{aligned}$$

(6) $x=-2$ のとき最小値 -3 となることから，$a>0$
また，頂点は $(-2,\ -3)$
よって，求める 2 次関数は，

$$y = a(x+2)^2-3\ (a>0)$$

とおける．$(-1,\ 6)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 6 &= a(-1+2)^2-3 \\ 6 &= a-3 \\ a &= 9 \end{aligned}$$

これは $a>0$ をみたすので，
求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= 9(x+2)^2-3 \\ &= 9(x^2+4x+4)-3 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 9x^2+36x+33} \end{aligned}$$

【4】(1) 頂点が $(-3,\ 7)$ なので

$$y = a(x+3)^2 + 7 \quad (a \neq 0)$$

とおける．区間 $-5 \leqq x \leqq 1$ なので，$a < 0$ であり，最小値 -25 は $x = 1$ でとる．よって，$(1,\ -25)$ を代入して，

$$\begin{aligned} -25 &= a(1+3)^2 + 7 \\ -25 &= 16a + 7 \\ 16a &= -32 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

これは $a < 0$ をみたすので，求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -2(x+3)^2 + 7 \\ &= -2(x^2+6x+9) + 7 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -2x^2 - 12x - 11} \end{aligned}$$

(2) 区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ の端点でない点 $x = -1$ において，最小値 0 をとるから $a > 0$．また，頂点は $(-1,\ 0)$ よって，

$$y = a(x+1)^2 \ (a > 0)$$

とおける．$(1,\ 8)$ を通るので

$$\begin{aligned} 8 &= a(1+1)^2 \\ 8 &= 4a \\ a &= 2 \end{aligned}$$

これは $a > 0$ をみたすので，求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 \\ &= 2(x^2+2x+1) \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 2x^2 + 4x + 2} \end{aligned}$$

(3) 区間 $1 \leqq x \leqq 3$ の端点でない点 $x = \dfrac{3}{2}$ において，最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとるから，$a < 0$．また，頂点は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$．よって，

$$y = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \ (a < 0)$$

とおける．$(3,\ -1)$ を通るので

$$\begin{aligned} -1 &= a\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \\ -1 &= \frac{9}{4}a + \frac{5}{4} \\ a &= -1 \end{aligned}$$

これは $a < 0$ をみたすので，求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \\ &= -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{5}{4} \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -x^2 + 3x - 1} \end{aligned}$$

(4) 区間 $3 \leqq x \leqq 6$ の端点でない点 $x = 4$ において，最大値 8 をとるから $a < 0$ また，頂点は $(4,\ 8)$ よって，

$$y = a(x-4)^2 + 8 \ (a < 0)$$

とおける．また，$(6,\ 6)$ を通るので

$$\begin{aligned} 6 &= a(6-4)^2 + 8 \\ 6 &= 4a + 8 \\ 4a &= -2 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

これは $a < 0$ をみたすので，求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 8 \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -\frac{1}{2}x^2 + 4x} \end{aligned}$$

【5】(1) $x=-3$ のとき，最大になるから，
求める 2 次関数は

$$y=-(x+3)^2+q$$

とおくことができる．
これが (1, 3) を通るので，

$$\begin{aligned}3&=-(1+3)^2+q\\&=-16+q\\q&=19\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}y&=-(x+3)^2+19\\&=-x^2-6x+10\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a=-6,\ b=10}$

(2) $x=1$ のとき最小になるから，
求める 2 次関数は

$$y=(x-1)^2+q$$

とおくことができる．
これが $(-2,\ -1)$ を通るので

$$\begin{aligned}-1&=(-2-1)^2+q\\-1&=9+q\\q&=-10\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}y&=(x-1)^2-10\\&=x^2-2x-9\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a=-2,\ b=-9}$

(3) 最大値 1 なので，$a<0$. よって，

$$\begin{aligned}y&=ax^2-4x+a+1\\&=a\left(x^2-\frac{4}{a}x\right)+a+1\\&=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+a+1\end{aligned}$$

$x=\dfrac{2}{a}$ のとき，最大値 $-\dfrac{4}{a}+a+1$
をとるので

$$\begin{aligned}-\frac{4}{a}+a+1&=1\\a^2&=4\\a&=\pm2\end{aligned}$$

ここで，$a<0$ なので，$\boldsymbol{a=-2}$

＜別解＞
最大値 1 をとるので，$a<0$. よって，

$$y=a(x-p)^2+1\ (a<0)$$

とおける．展開すると

$$y=ax^2-2apx+ap^2+1$$

これと

$$y=ax^2-4x+a+1$$

より，係数比較すると

$$\begin{cases}2ap=4 & \cdots① \\ ap^2=a & \cdots②\end{cases}$$

②より，$a<0$ だから

$$\begin{aligned}p^2&=1\\p&=\pm1\end{aligned}$$

①に $p=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}2a&=4\\a&=2\end{aligned}$$

$a<0$ より不適.
次に①に $p=-1$ を代入すると

$$-2a=4 \qquad a=-2$$

よって，$\boldsymbol{a=-2}$

(4) 最小値 $-3a$ なので，$a>0$．また，グラフは 2 点 $(-1,\ -2)$, $(1,\ -2)$ を通るので

$$y = a(x+1)(x-1)-2 \quad (a>0)$$

とおける．

$$\begin{aligned} y &= a(x+1)(x-1)-2 \\ &= ax^2 - a - 2 \end{aligned}$$

よって，$x=0$ のとき最小値 $-a-2$ をとるので

$$\begin{aligned} -a-2 &= -3a \\ 2a &= 2 \qquad \therefore\ a=1 \end{aligned}$$

これは $a>0$ をみたしているので，$\boldsymbol{a=1}$
$a=1$ なので

$$y = ax^2 - a - 2 = x^2 - 3$$

よって，$\boldsymbol{b=0,\ c=-3}$ （答）$\boldsymbol{a=1,\ b=0,\ c=-3}$

【6】(1) (I) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + b \\ &= a(x^2-2x)+b \\ &= a(x-1)^2 - a + b \end{aligned}$$

となるから，グラフの頂点は $(1,\ -a+b)$ である．

(i) $a>0$ のとき，$x=1$ は区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ 内にあるので

$$x=1 \text{ のとき 最小値}：-a+b=-4 \ \cdots ①$$

をとる．さらに，端点のうち $x=-1$ のとき最大値 6 をとるから，

$$\begin{aligned} 6 &= a\cdot(-1)^2 - 2a\cdot(-1)+b \\ 6 &= 3a+b \ \cdots ② \end{aligned}$$

①，②を連立して $a=\dfrac{5}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$
これは $a>0$ をみたす．

(ii) $a<0$ のとき，$x=1$ は区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ 内にあるので

$$x=1 \text{ のとき 最大値}：-a+b=6 \ \cdots ③$$

をとる．さらに，端点のうち $x=-1$ のとき最小値 -4 をとるから

$$\begin{aligned} -4 &= a\cdot(-1)^2 - 2a\cdot(-1)+b \\ -4 &= 3a+b \ \cdots ④ \end{aligned}$$

③，④を連立して $a=-\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{7}{2}$
これは $a<0$ をみたす．

(II) $a=0$ のとき

$$f(x) = 0\cdot x^2 - 2\cdot 0\cdot x + b = b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．したがって，最大値 6，最小値 -4 とはならない．

(I)(II) より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 0} \textbf{ のとき，} \quad \boldsymbol{a = \frac{5}{2},\ b = -\frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき，} \quad \boldsymbol{a = -\frac{5}{2},\ b = \frac{7}{2}} \end{cases}$$

(2) (I) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - ax + b \\ &= a(x^2 - x) + b \\ &= a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a + b \end{aligned}$$

となるから，グラフの頂点は $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}a + b\right)$ である．

(i) $a > 0$ のとき，$x = \frac{1}{2}$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ 内にあるので，

$$x = \frac{1}{2} \text{のとき，最小値：} -\frac{1}{4}a + b = -1 \quad \cdots ①$$

をとる．さらに，端点のうち，$x = -2$ のとき，最大値 4 をとるから

$$\begin{aligned} &4 = a \cdot (-2)^2 - a \cdot (-2) + b \\ &4 = 6a + b \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，②を連立して $a = \frac{4}{5}$，$b = -\frac{4}{5}$

これは $a > 0$ をみたす．

(ii) $a < 0$ のとき，$x = \frac{1}{2}$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ 内にあるので

$$x = \frac{1}{2} \text{のとき，最大値：} -\frac{1}{4}a + b = 4 \quad \cdots ③$$

をとる．さらに，端点のうち，$x = -2$ のとき，最小値 -1 をとるから

$$\begin{aligned} &-1 = a \cdot (-2)^2 - a \cdot (-2) + b \\ &-1 = 6a + b \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

③，④を連立して $a = -\frac{4}{5}$，$b = \frac{19}{5}$

これは $a < 0$ をみたす．

(II) $a = 0$ のとき

$$f(x) = 0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + b = b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．

したがって，最大値 4，最小値 -1 とはならない．

(I)(II) より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 0} \textbf{ のとき，} \quad \boldsymbol{a = \frac{4}{5},\ b = -\frac{4}{5}} \\ \boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき，} \quad \boldsymbol{a = -\frac{4}{5},\ b = \frac{19}{5}} \end{cases}$$

(3) (I) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + 2ax + 3a + b \\
&= a(x+1)^2 + 2a + b
\end{aligned}
$$

となるから，グラフの頂点は $(-1,\ 2a+b)$ である．

(i) $a > 0$ のとき，$x = -1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ 内にあるので

$x = -1$ のとき，最小値：$2a + b = -5$ $\cdots$①

をとる．さらに，端点のうち $x = 1$ のとき最大値 7 をとるから

$$
\begin{aligned}
&7 = a \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3a + b \\
&7 = 6a + b \ \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，②を連立して，$a = 3,\ b = -11$

これは $a > 0$ をみたす．

(ii) $a < 0$ のとき，$x = -1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ 内にあるので

$x = -1$ のとき，最大値：$2a + b = 7$ $\cdots$③

をとる．さらに端点のうち $x = 1$ のとき最小値 -5 をとるから

$$
\begin{aligned}
&-5 = a \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3a + b \\
&-5 = 6a + b \ \cdots ④
\end{aligned}
$$

③，④を連立して $a = -3,\ b = 13$

これは $a < 0$ をみたす．

(II) $a = 0$ のとき

$$
f(x) = 0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 3 \cdot 0 + b = b
$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．

したがって，最大値 7，最小値 -5 とはならない．

(I)(II) より

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a > 0} \textbf{ のとき，} \ \boldsymbol{a = 3,\ b = -11} \\
\boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき，} \ \boldsymbol{a = -3,\ b = 13}
\end{cases}
$$

(4) (I) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 - 2ax + b \\
&= a(x-1)^2 - a + b
\end{aligned}
$$

となるからグラフの頂点は $(1,\ -a+b)$ である．

(i) $a > 0$ のとき，$x = 1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので

$x = 1$ のとき，最小値：$-a + b = -1$ $\cdots$①

をとる．さらに，端点のうち $x = -2$ のとき最大値 17 をとるから

$$
\begin{aligned}
&17 = a \cdot (-2)^2 - 2a \cdot (-2) + b \\
&17 = 8a + b \ \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，②を連立して，$a = 2,\ b = 1$

これは $a > 0$ をみたす．

(ii) $a<0$ のとき，$x=1$ は区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので

$$x=1 \text{ のとき，最大値：} -a+b=17 \ \cdots③$$

をとる．さらに，端点のうち $x=-2$ のとき最小値 -1 をとるから，

$$\begin{aligned}&-1=a\cdot(-2)^2-2a\cdot(-2)+b\\&-1=8a+b \ \cdots④\end{aligned}$$

③，④を連立して，$a=-2$，$b=15$

これは $a<0$ をみたす．

(II) $a=0$ のとき

$$f(x)=0\cdot x^2-2\cdot 0\cdot x+b=b$$

となり，$f(x)$ の値は一定である．

したがって，最大値 17，最小値 -1 とはならない．

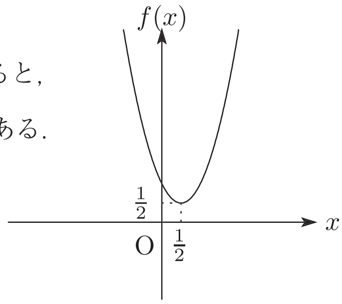
(I)(II) より

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>0} \textbf{ のとき，} \quad \boldsymbol{a=2,\ b=1}\\ \boldsymbol{a<0} \textbf{ のとき，} \quad \boldsymbol{a=-2,\ b=15}\end{cases}$$

【7】(1) $x+y=1$ より，$y=1-x \ \cdots①$

よって，

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(1-x)^2\\&=x^2+1-2x+x^2\\&=2x^2-2x+1\\&=2(x^2-x)+1\\&=2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1\\&=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1\\&=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$



となる．そこで，$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ とすると，

右のグラフより，最大値はなく，最小値は $\frac{1}{2}$ である．

$x=\frac{1}{2}$ を①に代入して

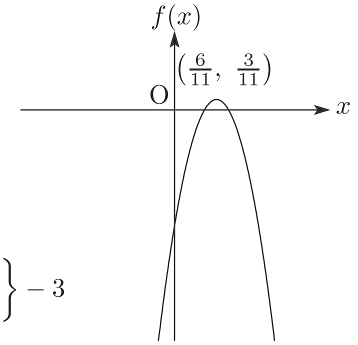
$$y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，**最大値：なし，最小値：**$\boldsymbol{\frac{1}{2}} \ \left(\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}}\right)$

(2) $2x+y=1$ より，$y=1-2x$ $\cdots$①

よって，

$$\begin{aligned}
x^2-3y^2 &= x^2-3(1-2x)^2 \\
&= x^2-3(1-4x+4x^2) \\
&= -11x^2+12x-3 \\
&= -11\left(x^2-\frac{12}{11}x\right)-3 \\
&= -11\left\{\left(x-\frac{6}{11}\right)^2-\frac{36}{121}\right\}-3 \\
&= -11\left(x-\frac{6}{11}\right)^2+\frac{36}{11}-3 \\
&= -11\left(x-\frac{6}{11}\right)^2+\frac{3}{11}
\end{aligned}$$



となる．$f(x)=-11\left(x-\dfrac{6}{11}\right)^2+\dfrac{3}{11}$ とすると，

右のグラフより，最大値 $\dfrac{3}{11}$，最小値なしとなる．

$x=\dfrac{6}{11}$ を①に代入して，$y=1-2\cdot\dfrac{6}{11}=-\dfrac{1}{11}$

よって，**最大値：$\boldsymbol{\dfrac{3}{11}}$ $\boldsymbol{\left(x=\dfrac{6}{11},\ y=-\dfrac{1}{11}\right)}$，最小値：なし**

(3) $x-2y=1$ より，$x=1+2y$ $\cdots$①

よって，

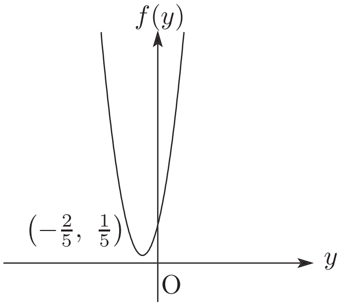
$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (1+2y)^2+y^2 \\
&= 5y^2+4y+1 \\
&= 5\left(y^2+\frac{4}{5}y\right)+1 \\
&= 5\left\{\left(y+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right\}+1 \\
&= 5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}+1 \\
&= 5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$f(y)=5\left(y+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$ とすると，

右のグラフより，最大値なし，最小値 $\dfrac{1}{5}$ となる．

$y=-\dfrac{2}{5}$ のとき①より

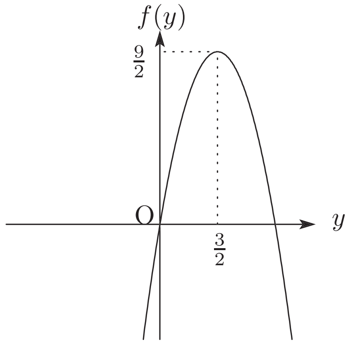
$$x=1+2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$$



よって，**最大値：なし，最小値：$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$ $\boldsymbol{\left(x=\dfrac{1}{5},\ y=-\dfrac{2}{5}\right)}$**

(4) $x+2y=6$ より，$x=6-2y$ $\cdots$①
よって，

$$\begin{aligned}xy &= (6-2y)\cdot y\\ &= -2y^2+6y\\ &= -2(y^2-3y)\\ &= -2\left\{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}\\ &= -2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$



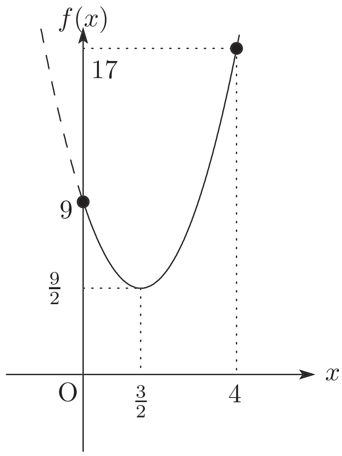
$f(y)=-2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ とすると，右のグラフより，最大値 $\frac{9}{2}$，最小値なしとなる．
$y=\frac{3}{2}$ のとき①より

$$x=6-2\cdot\frac{3}{2}=3$$

よって，**最大値：$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ $\boldsymbol{\left(x=3,\ y=\frac{3}{2}\right)}$，最小値：なし**

【8】(1) $x+y=3$ より，$y=3-x$ $\cdots$①
$y \geqq -1$ より，

$$\begin{aligned}y=3-x &\geqq -1\\ -x &\geqq -4\\ x &\leqq 4\end{aligned}$$



よって，x の変域は $0 \leqq x \leqq 4$ $\cdots$②
である．
x^2+y^2 に①を代入して，

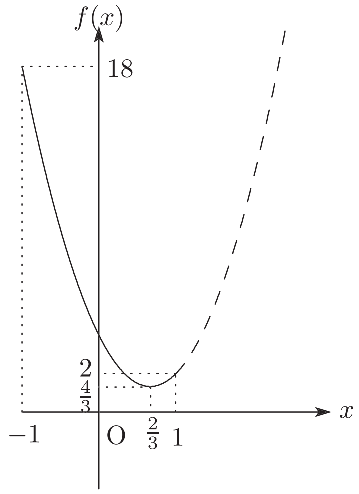
$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= x^2+(3-x)^2\\ &= 2x^2-6x+9\\ &= 2(x^2-3x)+9\\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+9\\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

となる．$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ とすると，
②の定義域についての右のグラフより，最大値は 17，最小値は $\frac{9}{2}$ となる．
$x=\frac{3}{2}$ を①に代入して，$y=\frac{3}{2}$．$x=4$ を①に代入して，$y=-1$
よって，**最大値：17 $\boldsymbol{(x=4,\ y=-1)}$，最小値：$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ $\boldsymbol{\left(x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}\right)}$**

(2) $2x+y=2$ より，$y=2-2x\ \cdots①$

$y \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} y=2-2x &\geqq 0 \\ -2x &\geqq -2 \\ x &\leqq 1 \end{aligned}$$



よって，x の変域は $-1 \leqq x \leqq 1\ \cdots②$ である．

$2x^2+y^2$ に①を代入して，

$$\begin{aligned} 2x^2+y^2 &= 2x^2+(2-2x)^2 \\ &= 6x^2-8x+4 \\ &= 6\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+4 \\ &= 6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{8}{3}+4 \\ &= 6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる．そこで，$f(x)=6\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ として，

②の定義域についての右のグラフより，最大値は 18，最小値は $\dfrac{4}{3}$ となる．

$x=\dfrac{2}{3}$ を①に代入して，$y=\dfrac{2}{3}$

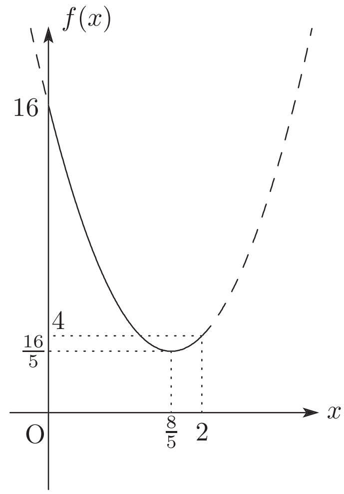
$x=-1$ を①に代入して，$y=4$

よって，**最大値：18 ($x=-1$，$y=4$)**，**最小値：$\dfrac{4}{3}$ $\left(x=\dfrac{2}{3},\ y=\dfrac{2}{3}\right)$**

(3) $2x+y=4$ より，$y=4-2x\ \cdots①$

$y \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} y=4-2x &\geqq 0 \\ -2x &\geqq -4 \\ x &\leqq 2 \end{aligned}$$



よって，x の変域は $0 \leqq x \leqq 2\ \cdots②$

である．x^2+y^2 に①を代入して，

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(4-2x)^2 \\ &= x^2+16-16x+4x^2 \\ &= 5x^2-16x+16 \\ &= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16 \\ &= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5} \end{aligned}$$

となる．そこで，$f(x)=5\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}$ として，

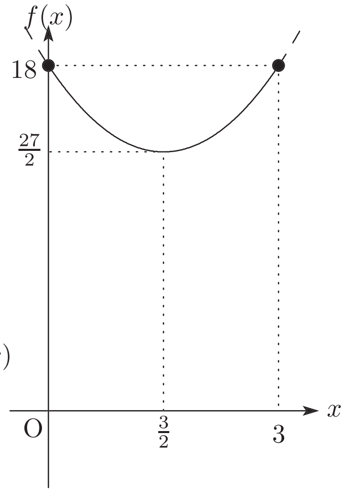
②の定義域についての右のグラフより，最大値は 16，最小値は $\dfrac{16}{5}$ である．

$x=\dfrac{8}{5}$ を①に代入して，$y=\dfrac{4}{5}$．また，$x=0$ を①に代入して，$y=4$.

よって，**最大値：16 ($x=0$，$y=4$)**，**最小値：$\dfrac{16}{5}$ $\left(x=\dfrac{8}{5},\ y=\dfrac{4}{5}\right)$**

(4) $2x+y=6$ より，$y=6-2x$ $\cdots$①
$y \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} y=6-2x &\geqq 0 \\ -2x &\geqq -6 \\ x &\leqq 3 \end{aligned}$$



よって，x の変域は $0 \leqq x \leqq 3$ $\cdots$②
となる．与式に①を代入して，

$$\begin{aligned} &4x^2+3xy+y^2-6x-3y \\ =&4x^2+3x(6-2x)+(6-2x)^2-6x-3(6-2x) \\ =&2x^2-6x+18=2(x^2-3x)+18 \\ =&2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+18 \\ =&2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+18 \\ =&2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2} \end{aligned}$$

となる．そこで，$f(x)=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}$ として，
②の定義域についての右のグラフより，最大値は 18，最小値は $\dfrac{27}{2}$ である．
①より，$x=0$ のとき，$y=6$ であり，$x=3$ のとき，$y=0$ であり，
$x=\dfrac{3}{2}$ のとき，$y=3$.
よって，**最大値：18 ($x=0$，$y=6$ または $x=3$，$y=0$)，**
最小値：$\dfrac{27}{2}$ $\left(x=\dfrac{3}{2}，y=3\right)$

【9】(1)

$$\begin{aligned} &\text{三角形 PQR} \\ =&\text{四角形 ABCD} - \text{三角形 BPQ} - \text{三角形 CQR} - \text{四角形 ADRP} \\ =&4-\frac{1}{2}\times 2x\times(2-x)-\frac{1}{2}\times 3x\times(2-2x)-\frac{1}{2}\times(x+2-3x)\times 2 \\ =&\boldsymbol{4x^2-3x+2} \end{aligned}$$

(2) 三角形 PQR の面積を $f(x)$ とすると，

$$\begin{aligned} f(x)&=4\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)+2 \\ &=4\left\{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{64}\right\}+2 \\ &=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}+2 \\ &=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16} \end{aligned}$$

$0 \leqq 3x \leqq 2$ より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}$ なので，$f(x)$ は $x=\dfrac{3}{8}$ のとき，最小値をとる．
よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{8}}$

【10】たての長さを x cm とすると，横は $12-x$ cm

$$
\begin{aligned}
12-x &> 0 \\
-x &> -12 \\
x &< 12
\end{aligned}
$$

よって，$0<x<12$ である．面積を $f(x)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(12-x) \\
&= -x^2+12x \\
&= -(x^2-12x) \\
&= -\{(x-6)^2-36\} \\
&= -(x-6)^2+36
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)$ は $x=6$ のとき，最大値 36 をとる．
ゆえに面積の最大値は，$\mathbf{36cm^2}$

【11】片方を x とすると，もう一辺は $18-x$

$$
\begin{aligned}
18-x &> 0 \\
-x &> -18 \\
x &< 18
\end{aligned}
$$

$0<x<18$ となる．斜辺を y とすると，

$$
\begin{aligned}
y^2 &= x^2+(18-x)^2 \\
&= 2x^2-36x+324 \\
&= 2(x^2-18x)+324 \\
&= 2\{(x-9)^2-81\}+324 \\
&= 2(x-9)^2-162+324 \\
&= 2(x-9)^2+162
\end{aligned}
$$

y は線分だから，$y>0$ で，y^2 が最小になれば y も最小になるので，
y の最小値は，$x=9$ のとき，$y=\sqrt{162}=\mathbf{9\sqrt{2}}$

添削課題

【1】 $y = -2x^2 + 8x - 5$
$= -2(x^2 - 4x) - 5$
$= -2(x-2)^2 + 3$

(1) **最大値：$\boldsymbol{3\ (x=2)}$，最小値：なし**

(2) 定義域が $0 \leqq x \leqq 5$ の場合,
最大値：$\boldsymbol{3\ (x=2)}$，最小値：$\boldsymbol{-15\ (x=5)}$

(3) 定義域が $-1 \leqq x \leqq 1$ の場合,
最大値：$\boldsymbol{1\ (x=1)}$，最小値：$\boldsymbol{-15\ (x=-1)}$

(4) 定義域が $-2 < x < 4$ の場合,
最大値：$\boldsymbol{3\ (x=2)}$，最小値：なし

【2】(1) 2 点 $(-3,\ 4)$, $(1,\ 4)$ を通るから，放物線の方程式を
$y = a(x+3)(x-1) + 4 \ \cdots$①
とおく．軸の方程式は
$$x = \frac{-3+1}{2} = -1$$
だから，頂点は $(-1,\ 2)$
①がこの点を通るから
$$2 = a \cdot 2 \cdot (-2) + 4$$
$$\therefore\ a = \frac{1}{2}$$
したがって，求める方程式は $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}$

(2) 頂点が $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$ だから，求める方程式を
$$y = a(x-1)^2 + \frac{4}{3}$$
とおく．点 $\left(-2,\ -\frac{14}{3}\right)$ を通るから
$$-\frac{14}{3} = 9a + \frac{4}{3}$$
$$\therefore\ a = -\frac{2}{3}$$
したがって，求める式は $\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}}$

【3】針金の長さを 1 とする．

円の半径を r とおくと，正方形の 1 辺の長さは $\dfrac{1-2\pi r}{4}$ だから，正方形と円の面積の和を S とすると，

$$\begin{aligned}S &= \left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2 \\ &= \frac{1}{16}\left\{(1-2\pi r)^2 + 16\pi r^2\right\} \\ &= \frac{1}{16}\{4\pi(\pi+4)r^2 - 4\pi r + 1\} \\ &= \frac{\pi(\pi+4)}{4}\left(r^2 - \frac{1}{\pi+4}r\right) + \frac{1}{16} \\ &= \frac{\pi(\pi+4)}{4}\left\{r - \frac{1}{2(\pi+4)}\right\}^2 + \frac{1}{4(\pi+4)}\end{aligned}$$

ただし，$r>0$，$\dfrac{1-2\pi r}{4}>0$ より，$0<r<\dfrac{1}{2\pi}$

したがって，$r=\dfrac{1}{2(\pi+4)}$ のとき，$S=\dfrac{1}{4(\pi+4)}$ で最小．

このとき，2 つの針金の長さの比は

$$(1-2\pi r):2\pi r = \frac{4}{\pi+4} : \frac{\pi}{\pi+4} = \boldsymbol{4:\pi}$$

【4】$u=2x^2+y^2$ とおく．

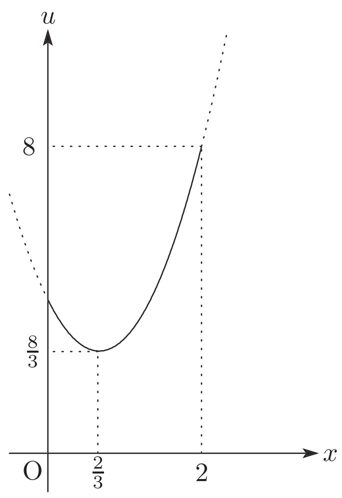
$x+y=2$ より，$y=2-x$

ここで，$y \geqq 0$ だから，$2-x \geqq 0$

ゆえに，$x \leqq 2$

したがって，

$$\begin{aligned}u &= 2x^2+(2-x)^2 \\ &= 3x^2-4x+4 \\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3} \quad 〔ただし, 0 \leqq x \leqq 2〕\end{aligned}$$



右のグラフより，

$x=2$ のとき，$u=8$ で最大．

このとき，$y=2-2=0$

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，$u=\dfrac{8}{3}$ で最小．

このとき，$y=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

よって，

最大値：8 ($x=2$，$y=0$ のとき)，最小値：$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$ $\left(x=\dfrac{2}{3}，y=\dfrac{4}{3}のとき\right)$

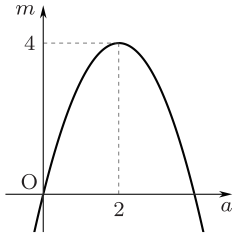
7章　2次関数（4）－2次関数の最大・最小 II －

問題

【1】(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + 4a \\ &= (x-a)^2 - a^2 + 4a \end{aligned}$$

よって，$x = a$ のとき，$f(x)$ は最小値 $-a^2 + 4a$ をとる．

$\therefore$ $\boldsymbol{m = -a^2 + 4a}$ **(**$\boldsymbol{x = a}$ **のとき)**



(2)
$$\begin{aligned} m &= -a^2 + 4a \\ &= -(a^2 - 4a) \\ &= -\{(a-2)^2 - 4\} \\ &= -(a-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

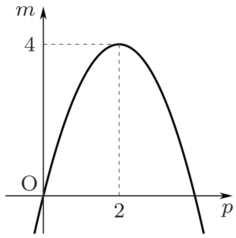
m のグラフは右図のようになるので，

$\boldsymbol{a = 2}$ **のとき,** $\boldsymbol{m}$ **は最大値 4 をとる**

【2】(1)
$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2px + 4p \\ &= (x+p)^2 - p^2 + 4p \end{aligned}$$

よって，$x = -p$ のとき，最小値 $-p^2 + 4p$ をとる．

$\therefore$ $\boldsymbol{m = -p^2 + 4p}$　**(**$\boldsymbol{x = -p}$ **のとき)**



(2)
$$\begin{aligned} m &= -p^2 + 4p \\ &= -(p^2 - 4p) \\ &= -\{(p-2)^2 - 4\} \\ &= -(p-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

m のグラフは右図のようになる．よって，

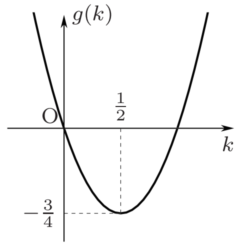
$\boldsymbol{p = 2}$ **のとき,** $\boldsymbol{m}$ **は最大値 4をとる．**

【3】(1)
$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4kx + k^2 - 3k \\ &= -2(x^2 - 2kx) + k^2 - 3k \\ &= -2\{(x-k)^2 - k^2\} + k^2 - 3k \\ &= -2(x-k)^2 + 2k^2 + k^2 - 3k \\ &= -2(x-k)^2 + 3k^2 - 3k \end{aligned}$$

よって，$x = k$ のとき，y は最大値 $3k^2 - 3k$ をとる．

$\therefore$ $\boldsymbol{g(k) = 3k^2 - 3k}$　**(**$\boldsymbol{x = k}$ **のとき)**

(2) $$g(k) = 3k^2 - 3k$$
$$= 3(k^2 - k)$$
$$= 3\left\{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}$$
$$= 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$



$g(k)$ のグラフは右図のようになる．
よって，$\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$ をとる．

【4】(1) $$y = (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x) + 10$$

ここで，$x^2 - 2x = t \ \cdots①$ とおくと，
$$y = t^2 + 6t + 10 \ \cdots②$$
となる．①より
$$t = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$
これより，t の変域は，$t \geqq -1 \ \cdots③$
次に，②を平方完成して
$$y = t^2 + 6t + 10 = (t+3)^2 + 1$$
よって，最大値：なし，最小値：5 $(t = -1)$
$t = -1$ を①に代入して
$$x^2 - 2x = -1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0 \qquad \therefore \ x = 1$$
したがって，**最小値：5 ($\boldsymbol{x = 1}$ のとき)**

(2) $$y = -(x^2 - 2x + 2)^2 + 6(x^2 - 2x + 2) + 1$$

ここで，$x^2 - 2x + 2 = t \ \cdots①$ とおくと，
$$y = -t^2 + 6t + 1 \ \cdots②$$
となる．①より
$$t = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$
これより，t の変域は，$t \geqq 1 \ \cdots③$
次に②を平方完成して
$$y = -t^2 + 6t + 1 = -(t-3)^2 + 10$$
よって，最大値：10 $(t = 3)$
$t = 3$ を①に代入して
$$x^2 - 2x + 2 = 3$$
$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$
したがって，**最大値：10 ($\boldsymbol{x = 1 \pm \sqrt{2}}$のとき)**

(3) $$y=-(x^2-4x+1)^2+2x^2-8x-1=-(x^2-4x+1)^2+2(x^2-4x+1)-3$$

と変形できる．ここで，$x^2-4x+1=t\ \cdots$① とおくと，

$$y=-t^2+2t-3\ \cdots②$$

となる．①より

$$t=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

これより t の変域は，$-3\leqq t\leqq 1\ \cdots$③
次に②を平方完成して

$$y=-t^2+2t-3=-(t-1)^2-2$$

よって，最大値：-2 $(t=1)$，最小値：-18 $(t=-3)$
$t=1$ を①に代入して

$$\begin{aligned}x^2-4x+1&=1\\ x(x-4)&=0 \qquad \therefore\ x=0,\ 4\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 3$ より，$x=0$
同様にして，$t=-3$ を①に代入して

$$\begin{aligned}x^2-4x+1&=-3\\ x^2-4x+4&=0 \qquad \therefore\ x=2\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 3$ より，$x=2$
したがって，**最大値：$\boldsymbol{-2}$ $\boldsymbol{(x=0)}$，最小値：$\boldsymbol{-18}$ $\boldsymbol{(x=2)}$**

(4) $$f(x)=a(x^2+2x+2)^2+2a(x^2+2x+2)+b$$

ここで，$x^2+2x+2=t\ \cdots$① とおくと，

$$g(t)=at^2+2at+b\ \cdots②$$

とおける．①より

$$t=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

これより，t の変域は，$t\geqq 1\ \cdots$③
次に②を平方完成して

$$g(t)=at^2+2at+b=a(t+1)^2-a+b$$

③の範囲で②を考えると，最小値 6 をもつので $a>0$
また，最小値：$g(1)=3a+b=6\ \cdots$④
$f(0)=11$ より，$x=0$ のとき，$t=0^2+2\cdot0+2=2$ なので，

$$\begin{aligned}g(2)&=a\cdot2^2+2a\cdot2+b\\ &=8a+b=11\ \cdots⑤\end{aligned}$$

④，⑤より

$$\begin{cases}3a+b=6\\ 8a+b=11\end{cases}$$

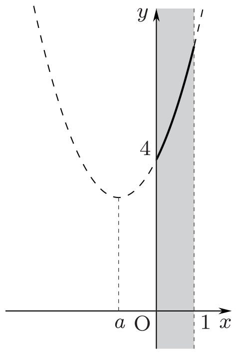
よって，$a=1$，$b=3$
$a>0$ より，条件をみたすので，$\boldsymbol{a=1}$**，**$\boldsymbol{b=3}$

【5】(1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax + 4 \\ &= (x-a)^2 - a^2 + 4 \end{aligned}$$

となり，下に凸なグラフで，頂点は $(a,\ -a^2+4)$ である．

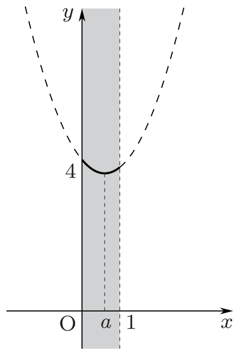
(i) $a < 0$ のとき



最小値は $x = 0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 0^2 - 2 \cdot a \cdot 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

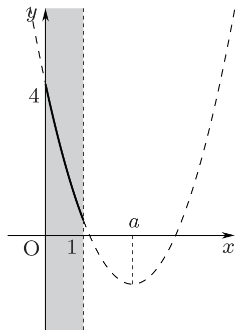
(ii) $0 \leqq a < 1$ のとき



最小値は $x = a$ のとき

$$\begin{aligned} y &= a^2 - 2a \cdot a + 4 \\ &= -a^2 + 4 \end{aligned}$$

(iii) $a \geqq 1$ のとき



最小値は $x = 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 1^2 - 2a \cdot 1 + 4 \\ &= -2a + 5 \end{aligned}$$

以上より，

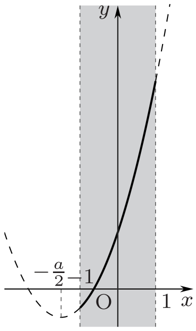
$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 0} \text{ のとき，} & \boldsymbol{4} & (\boldsymbol{x = 0} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{0 \leqq a < 1} \text{ のとき，} & \boldsymbol{-a^2 + 4} & (\boldsymbol{x = a} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{1 \leqq a} \text{ のとき，} & \boldsymbol{-2a + 5} & (\boldsymbol{x = 1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 2ax + a \\ &= 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + a \end{aligned}$$

となり，下に凸なグラフなので，頂点は $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{2} + a\right)$ である．

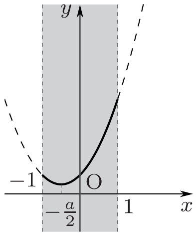
(i) $-\dfrac{a}{2} < -1$ のとき，
つまり $a > 2$ のとき



最小値は $x = -1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 2\cdot(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + a \\ &= -a + 2 \end{aligned}$$

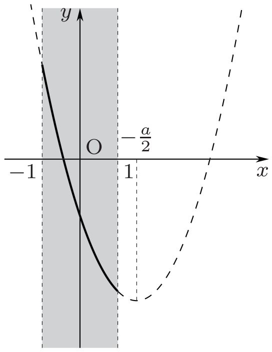
(ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{2} < 1$ のとき，
つまり $-2 < a \leqq 2$ のとき



最小値は $x = -\dfrac{a}{2}$ のとき

$$y = -\frac{a^2}{2} + a$$

(iii) $-\dfrac{a}{2} \geqq 1$ のとき，つまり $a \leqq -2$ のとき



最小値は $x = 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 2\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + a \\ &= 3a + 2 \end{aligned}$$

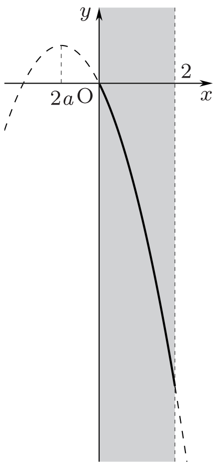
以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 2} \text{ のとき}, & \boldsymbol{-a+2} \quad (\boldsymbol{x = -1} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-2 < a \leqq 2} \text{ のとき}, & \boldsymbol{-\dfrac{a^2}{2} + a} \quad \left(\boldsymbol{x = -\dfrac{a}{2}} \text{ のとき}\right) \\ \boldsymbol{a \leqq -2} \text{ のとき}, & \boldsymbol{3a+2} \quad (\boldsymbol{x = 1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)
$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4ax \\ &= -(x - 2a)^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

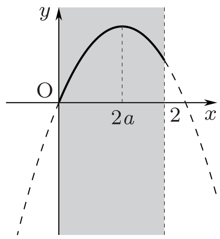
となり，上に凸なグラフで，頂点は $(2a,\ 4a^2)$ である．

(i) $2a < 0$ のとき，
つまり $a < 0$ のとき



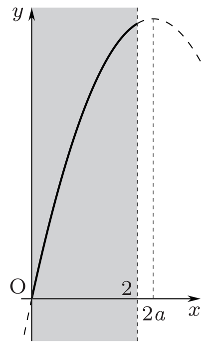
最大値は $x = 0$ のとき
$$\begin{aligned} y &= -0^2 + 4a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leqq 2a < 2$ のとき，
つまり $0 \leqq a < 1$ のとき



最大値は $x = 2a$ のとき
$$y = 4a^2$$

(iii) $2a \geqq 2$ のとき，
つまり $a \geqq 1$ のとき



最大値は $x = 2$ のとき
$$\begin{aligned} y &= -2^2 + 4a \cdot 2 \\ &= 8a - 4 \end{aligned}$$

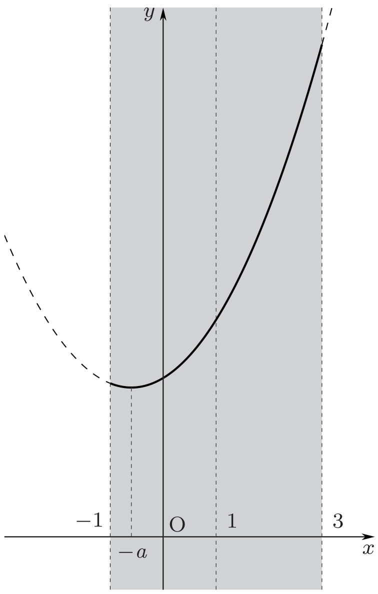
以上より，
$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 0} \text{ のとき,} & \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{x = 0} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{0 \leqq a < 1} \text{ のとき,} & \boldsymbol{4a^2} \quad (\boldsymbol{x = 2a} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{1 \leqq a} \text{ のとき,} & \boldsymbol{8a - 4} \quad (\boldsymbol{x = 2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4) $$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + 3 \\ &= (x+a)^2 - a^2 + 3 \end{aligned}$$

となり，下に凸なグラフで，頂点は $(-a,\ -a^2+3)$ である．

区間 $-1 \leqq x \leqq 3$ の真ん中は，$\dfrac{-1+3}{2} = 1$

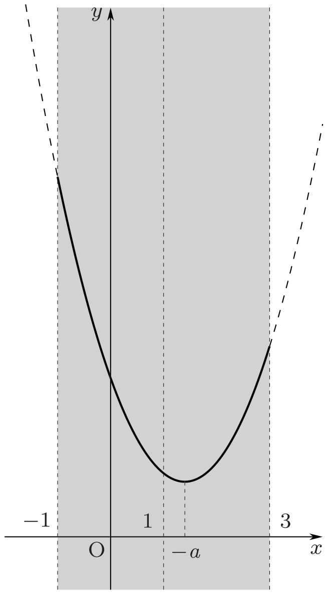
(i) $-a < 1$ のとき，つまり $a > -1$ のとき



最大値は $x = 3$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 3^2 + 2a \cdot 3 + 3 \\ &= 6a + 12 \end{aligned}$$

(ii) $-a \geqq 1$ のとき，つまり $a \leqq -1$ のとき



最大値は $x = -1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + 3 \\ &= -2a + 4 \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 < a} \textbf{ のとき, } \boldsymbol{6a + 12} \quad (\boldsymbol{x = 3} \textbf{ のとき}) \\ \boldsymbol{a \leqq -1} \textbf{ のとき, } \boldsymbol{-2a + 4} \quad (\boldsymbol{x = -1} \textbf{ のとき}) \end{cases}$$

【6】(1)

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$$

よって，$f(x)$ は下に凸なグラフで，頂点は $(3,\ 2)$ である．
最小値が 2 なので，最小値は $x=3$ のときにとる．
よって，$a \geqq 3$ である．
最大値 11 なので

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 11 &= 11 \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x-6) &= 0 \\ x &= 0,\ 6 \end{aligned}$$

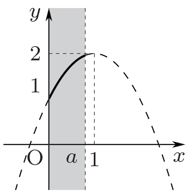
$x=0,\ 6$ で 11 をとることがわかる．
$x=0$ で最大値 11，$x=3$ で最小値 2 をとるには，$3 \leqq a < 6$
$x=6$ で最大値 11，$x=3$ で最小値 2 をとるには，$a=6$
よって，$\boldsymbol{3 \leqq a \leqq 6}$

(2)

$$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$$

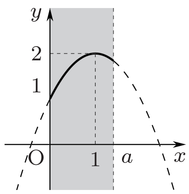
よって，上に凸なグラフで，頂点は $(1,\ 2)$ である．

(i) $0 < a < 1$ のとき，



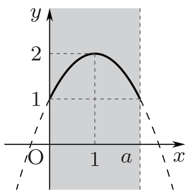
最大値は $x=a$ のとき $-a^2+2a+1$
最小値は $x=0$ のとき 1

(ii) $1 \leqq a < 2$ のとき



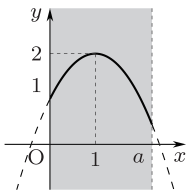
最大値は $x=1$ のとき 2
最小値は $x=0$ のとき 1

(iii) $a=2$ のとき



最大値は $x=1$ のとき 2
最小値は $x=0,\ 2$ のとき 1

(iv) $a>2$ のとき



最大値は $x=1$ のとき 2
最小値は $x=a$ のとき $-a^2+2a+1$

以上より，最大値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < 1} \text{ のとき，} \boldsymbol{-a^2+2a+1} & (\boldsymbol{x=a} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{1 \leqq a} \text{ のとき，} \boldsymbol{2} & (\boldsymbol{x=1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

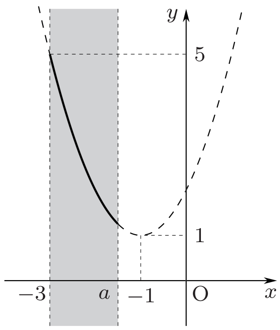
最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < 2} \text{ のとき, } \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{x = 0} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{a = 2} \text{ のとき, } \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{x = 0,\ 2} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{2 < a} \text{ のとき, } \boldsymbol{-a^2 + 2a + 1} & (\boldsymbol{x = a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)
$$y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

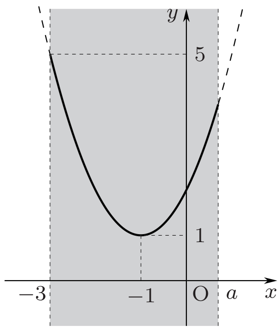
よって，下に凸なグラフで，頂点は $(-1,\ 1)$ である．

(i) $-3 < a < -1$ のとき



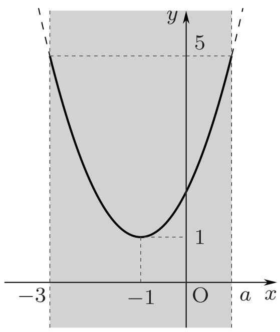
最大値は $x = -3$ のとき 5
最小値は $x = a$ のとき $a^2 + 2a + 2$

(ii) $-1 \leqq a < 1$ のとき



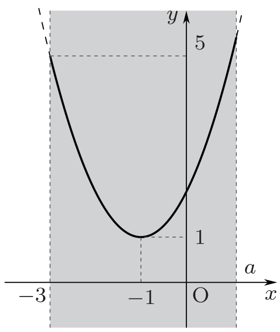
最大値は $x = -3$ のとき 5
最小値は $x = -1$ のとき 1

(iii) $a = 1$ のとき



最大値は $x = -3,\ 1$ のとき 5
最小値は $x = -1$ のとき 1

(iv) $a > 1$ のとき



最大値は $x = a$ のとき $a^2 + 2a + 2$
最小値は $x = -1$ のとき 1

以上より，最大値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-3 < a < 1} \text{ のとき, } \boldsymbol{5} & (\boldsymbol{x = -3} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{a = 1} \text{ のとき, } \boldsymbol{5} & (\boldsymbol{x = -3,\ 1} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{1 < a} \text{ のとき, } \boldsymbol{a^2 + 2a + 2} & (\boldsymbol{x = a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

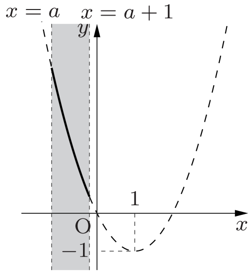
最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-3 < a < -1} \text{ のとき, } \boldsymbol{a^2 + 2a + 2} & (\boldsymbol{x = a} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-1 \leqq a} \text{ のとき, } \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{x = -1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

【7】(1) $$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

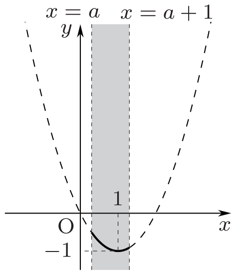
となり，下に凸なグラフで，頂点は $(1,\ -1)$ である．

(i) $a+1<1$
つまり $a<0$ のとき



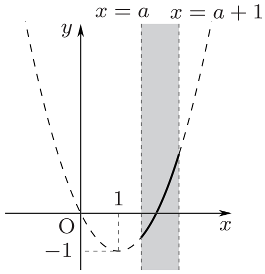
$$\begin{aligned} m(a) &= f(a+1) \\ &= (a+1)^2-2(a+1) \\ &= a^2-1 \end{aligned}$$

(ii) $a<1\leqq a+1$,
つまり $0\leqq a<1$ のとき



$$m(a)=f(1)=-1$$

(iii) $a\geqq 1$ のとき



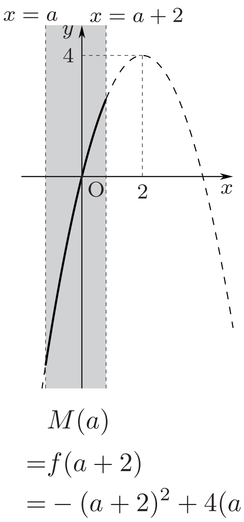
$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) \\ &= a^2-2a \end{aligned}$$

以上より $$m(a)=\begin{cases} \boldsymbol{a^2-1} & (\boldsymbol{a<0}) \\ \boldsymbol{-1} & (\boldsymbol{0\leqq a<1}) \\ \boldsymbol{a^2-2a} & (\boldsymbol{1\leqq a}) \end{cases}$$

(2) $$f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$$

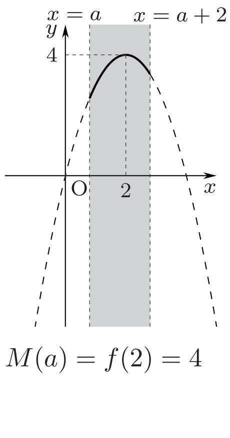
となり，上に凸なグラフで，頂点は $(2,\ 4)$ である．

(i) $a+2<2$
つまり $a<0$ のとき



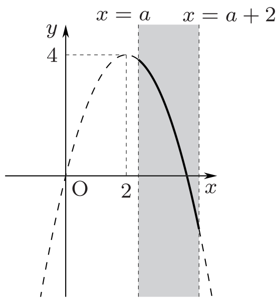
$$\begin{aligned} &M(a) \\ &=f(a+2) \\ &=-(a+2)^2+4(a+2) \\ &=-a^2+4 \end{aligned}$$

(ii) $a<2\leqq a+2$
つまり $0\leqq a<2$ の
とき



$$M(a)=f(2)=4$$

(iii) $a\geqq 2$ のとき



$$\begin{aligned} &M(a) \\ &=f(a) \\ &=-a^2+4a \end{aligned}$$

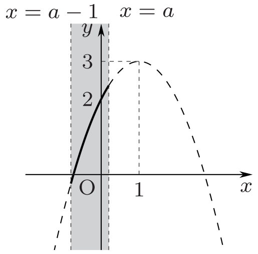
以上より　　$M(a)=\begin{cases}\boldsymbol{-a^2+4} & (\boldsymbol{a<0})\\ \boldsymbol{4} & (\boldsymbol{0\leqq a<2})\\ \boldsymbol{-a^2+4a} & (\boldsymbol{2\leqq a})\end{cases}$

(3)　　$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$

となり，上に凸なグラフで，頂点は $(1,\ 3)$ である．

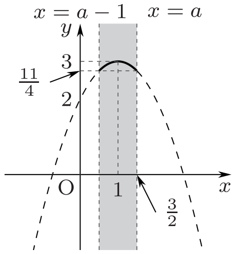
$a-1\leqq x\leqq a$ の真ん中は，$\dfrac{(a-1)+a}{2}=\dfrac{2a-1}{2}$

(i) $\dfrac{2a-1}{2}<1$ つまり，$a<\dfrac{3}{2}$ のとき



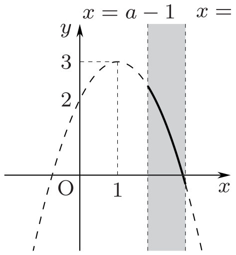
$$\begin{aligned}m(a)&=f(a-1)\\&=-(a-1)^2\\&\qquad+2(a-1)+2\\&=-a^2+4a-1\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{2a-1}{2}=1$ つまり $a=\dfrac{3}{2}$ のとき



$$\begin{aligned}m(a)&=f\left(\frac{3}{2}\right)\\&=-\left(\frac{3}{2}\right)^2\\&\qquad+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+2\\&=\frac{11}{4}\end{aligned}$$

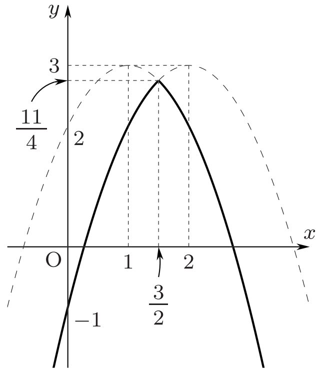
(iii) $\dfrac{2a-1}{2}>1$ つまり $a>\dfrac{3}{2}$ のとき



$$\begin{aligned}m(a)&=f(a)\\&=-a^2+2a+2\end{aligned}$$

以上より　　$m(a)=\begin{cases}-a^2+4a-1 & \left(a<\dfrac{3}{2}\right)\\ \dfrac{11}{4} & \left(a=\dfrac{3}{2}\right)\\ -a^2+2a+2 & \left(\dfrac{3}{2}<a\right)\end{cases}$

よって，$y = m(a)$ のグラフは次のようになる。

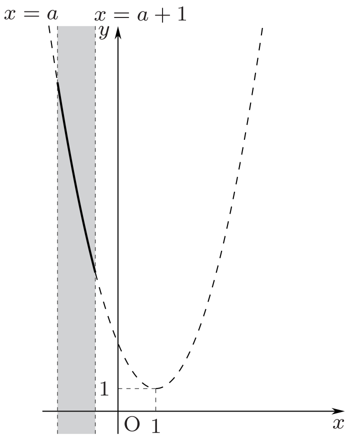


(4) $$f(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1$$

となり，下に凸なグラフで，頂点は $(1,\ 1)$ である．

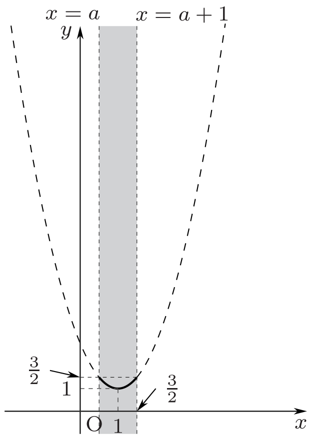
$a \leqq x \leqq a+1$ の真ん中は，$\dfrac{a+(a+1)}{2} = \dfrac{2a+1}{2}$

(i) $\dfrac{2a+1}{2} < 1$ つまり $a < \dfrac{1}{2}$ のとき



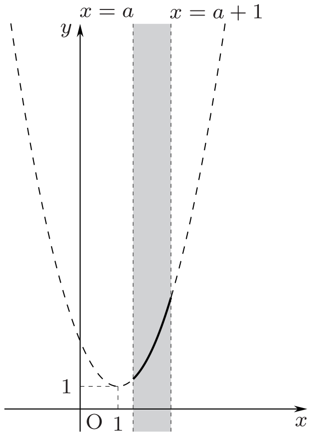
$$M(a) = f(a)$$
$$= 2a^2 - 4a + 3$$

(ii) $\dfrac{2a+1}{2} = 1$ つまり $a = \dfrac{1}{2}$ のとき



$$M(a) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3$$
$$= \frac{3}{2}$$

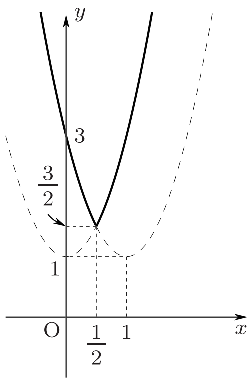
(iii) $\dfrac{2a+1}{2} > 1$ つまり $a > \dfrac{1}{2}$ のとき



$$
\begin{aligned}
M(a) &= f(a+1) \\
&= 2(a+1)^2 - 4(a+1) + 3 \\
&= 2a^2 + 1
\end{aligned}
$$

以上より $M(a) = \begin{cases} \boldsymbol{2a^2 - 4a + 3} & \left(\boldsymbol{a < \dfrac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{\dfrac{3}{2}} & \left(\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{2a^2 + 1} & \left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < a}\right) \end{cases}$

よって，$y = M(a)$ のグラフは次のようになる。



添削課題

【1】$t=x^2+6x+6$ とおくと，

$$t=(x+3)^2-3$$

ただし，$-5 \leqq x \leqq -1$ より，$-3 \leqq t \leqq 1$

$$\begin{aligned} y&=(x^2+6x+6)^2+8x^2+48x+50 \\ &=(x^2+6x+6)^2+8(x^2+6x+6)+2 \\ &=t^2+8t+2 \\ &=(t+4)^2-14 \end{aligned}$$

のグラフは，右の図のように $-3 \leqq t \leqq 1$ において単調増加するから $t=1$ のとき，$y=11$ で最大.

このとき，$x=-5,\ -1$

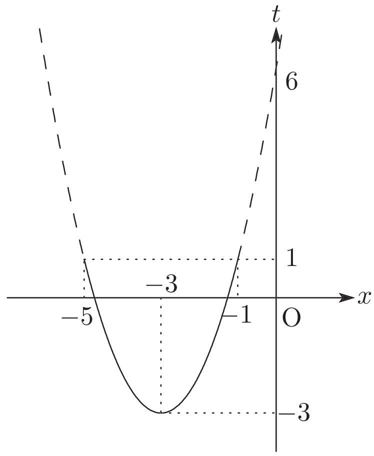
$t=-3$ のとき，$y=-13$ で最小.

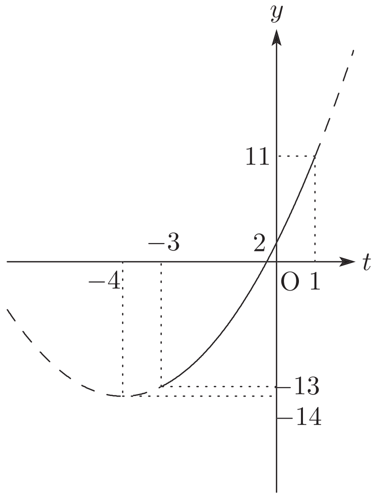
このとき，$x=-3$

したがって，

最大値：11　　($x=-5,\ -1$ のとき)

最小値：-13　($x=-3$ のとき)





【2】(1)

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+2px+2p+3 \\ &=(x+p)^2-p^2+2p+3 \end{aligned}$$

よって，$x=-p$ のとき最小となり

$$\boldsymbol{m=-p^2+2p+3}$$

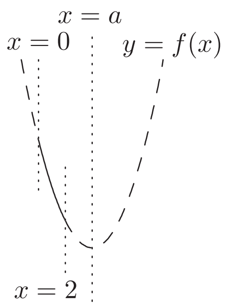
(2)

$$\begin{aligned} m&=-(p^2-2p)+3 \\ &=-(p-1)^2+4 \end{aligned}$$

より，m の最大値は，**4 ($p=1$ のとき)**

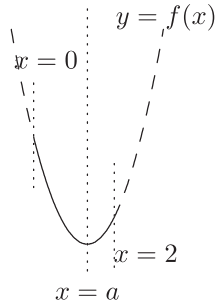
【3】　　$f(x) = x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$　〔$0 \leqq x \leqq 2$〕

(i) $2 \leqq a$ のとき



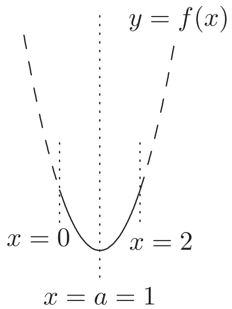
最大値は $f(0) = 0$
最小値は $f(2) = 4 - 4a$

(ii) $1 < a < 2$ のとき



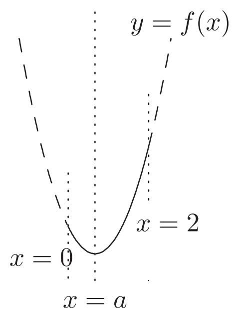
最大値は $f(0) = 0$
最小値は $f(a) = -a^2$

(iii) $a = 1$ のとき



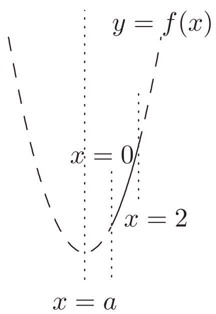
最大値は $f(0) = f(2) = 0$
最小値は $f(a) = f(1) = -1$

(iv) $0 < a < 1$ のとき



最大値は $f(2) = 4 - 4a$
最小値は $f(a) = -a^2$

(v) $a \leqq 0$ のとき



最大値は $f(2) = 4 - 4a$
最小値は $f(0) = 0$

(i)〜(v) より，最大値は，

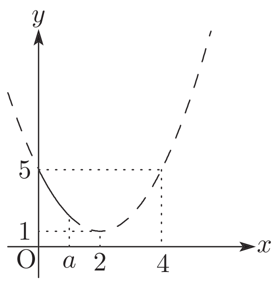
$$\begin{cases} \mathbf{0} & \textbf{(}\mathbf{1 \leqq a}\textbf{ のとき)} \\ \mathbf{4 - 4a} & \textbf{(}\mathbf{a < 1}\textbf{ のとき)} \end{cases}$$

また最小値は，

$$\begin{cases} \mathbf{4 - 4a} & \textbf{(}\mathbf{2 \leqq a}\textbf{ のとき)} \\ \mathbf{-a^2} & \textbf{(}\mathbf{0 < a < 2}\textbf{ のとき)} \\ \mathbf{0} & \textbf{(}\mathbf{a \leqq 0}\textbf{ のとき)} \end{cases}$$

【4】　$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$　〔$0 \leqq x \leqq a$〕

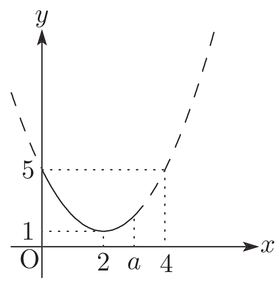
(i) $0 < a \leqq 2$ のとき



$M(a) = f(0) = 5$

$m(a) = f(a) = (a-2)^2 + 1$

(ii) $2 < a < 4$ のとき



$M(a) = f(0) = 5$

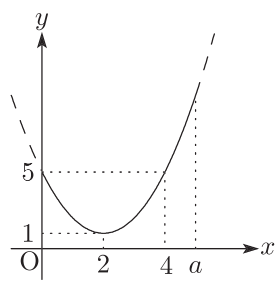
$m(a) = f(2) = 1$

(iii) $a = 4$ のとき

$M(a) = f(0) = f(4) = 5$

$m(a) = f(2) = 1$

(iv) $4 < a$ のとき



$M(a) = f(a) = (a-2)^2 + 1$

$m(a) = f(2) = 1$

(i)〜(iv) より

$$M(a) = \begin{cases} \mathbf{5} & \textbf{(}\mathbf{0 < \boldsymbol{a} \leqq 4}\ \textbf{のとき)} \\ \mathbf{(\boldsymbol{a}-2)^2+1} & \textbf{(}\mathbf{4 < \boldsymbol{a}}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$$

$$m(a) = \begin{cases} \mathbf{(\boldsymbol{a}-2)^2+1} & \textbf{(}\mathbf{0 < \boldsymbol{a} \leqq 2}\ \textbf{のとき)} \\ \mathbf{1} & \textbf{(}\mathbf{2 < \boldsymbol{a}}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$$