M2JD

本科 1 期 6 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 東大理系数学Ⅲ

Lecture 8　微分法 (6)　3 角関数の導関数 - 解答

演習問題 8 − 1

次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^2 + \cos x$　(2) $y = e^x + \sin x$　(3) $y = \dfrac{1}{x^2} + \tan x$

(4) $y = \sqrt{x}\sin x$　(5) $y = x^2 \tan x$　(6) $y = \dfrac{x}{\cos x + 2}$

(7) $y = \cos 3x$　(8) $y = \tan(x^2 - x + 1)$　(9) $y = \sin(\cos x)$

(10) $y = \sin^3 x$　(11) $y = \sqrt{x + \sin x}$　(12) $y = \cos^3(2x + 1)$

解答・解説

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x - \sin x$　(答)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = e^x + \cos x$　(答)

(3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$　(答)

(4) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x \qquad \text{(答)}$$

(5) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \tan x + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} \qquad \text{(答)}$$

(6) 商の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot (\cos x + 2) - x \cdot (-\sin x)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{\cos x + x\sin x + 2}{(\cos x + 2)^2} \qquad \text{(答)}$$

(7) 合成関数の微分法を用いる．$t = 3x$，$y = \cos t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot (3x)' = -3\sin 3x \qquad \text{(答)}$$

(8) 合成関数の微分法を用いる．$t = x^2 - x + 1$，$y = \tan t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot (x^2 - x + 1)' = \frac{2x - 1}{\cos^2(x^2 - x + 1)} \qquad \text{(答)}$$

(9) $t = \cos x$，$y = \sin t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \cos t \cdot (-\sin x) = -\cos(\cos x)\sin x \qquad \text{(答)}$$

(10) $t = \sin x$，$y = t^3$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} &= 3t^2\cos x \\ &= 3\sin^2 x\cos x \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(11) 合成関数の微分法を用いる．$t = x + \sin x$，$y = t^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (x + \sin x)' = \frac{1 + \cos x}{2\sqrt{x + \sin x}} \qquad \text{(答)}$$

(12) 合成関数の微分法を用いる．$t = 2x + 1$，$u = \cos t$，$y = u^3$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = 3u^2 \cdot (-\sin t) \cdot 2 = -6\cos^2 t\sin t = -6\cos^2(2x+1)\sin(2x+1). \qquad \text{(答)}$$

演習問題 8 − 2

$f(x) = \cos x + 1$，$g(x) = \dfrac{a}{bx^2 + cx + 1}$ とするとき

$$f(0) = g(0), \qquad f'(0) = g'(0), \qquad f''(0) = g''(0)$$

となるように定数 a，b，c の値を定めよ．

解答・解説

$f(x) = \cos x + 1$ より

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x$$

$g(x) = \dfrac{a}{bx^2 + cx + 1}$ より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-a(2bx + c)}{(bx^2 + cx + 1)^2} \\ g''(x) &= \frac{-2ab(bx^2 + cx + 1)^2 + 2a(2bx + c)^2(bx^2 + cx + 1)}{(bx^2 + cx + 1)^4} \\ &= \frac{-2ab(bx^2 + cx + 1) + 2a(2bx + c)^2}{(bx^2 + cx + 1)^3} \end{aligned}$$

$f(0) = g(0)$ より

$$2 = a \quad \cdots\cdots ①$$

$f'(0) = g'(0)$ より

$$0 = -ac \quad \cdots\cdots ②$$

$f''(0) = g''(0)$ より

$$-1 = -2ab + 2ac^2 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ より

$$a = 2,\ b = \frac{1}{4},\ c = 0 \qquad (答)$$

演習問題 8 − 3

関数 $y = \dfrac{1}{x+1}$ について，n 次導関数が

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

解答・解説

(I) $n = 1$ のとき

$$y' = y^{(1)} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

より成り立つ．

(II) $n = k$ のとき

$$y^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)} &= (-1)^k k! \frac{-\{(x+1)^{k+1}\}'}{\{(x+1)^{k+1}\}^2} \\
&= (-1)^{k+1} k! \frac{(k+1)(x+1)^k}{(x+1)^{2k+2}} \\
&= (-1)^{k+1} (k+1) k! \frac{(x+1)^k}{(x+1)^{2k+2}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+1)^{k+2}}
\end{aligned}$$

より $n = k+1$ のときも成り立つ．

以上より，数学的帰納法によって，任意の自然数 n に対して

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

は成り立つ． 〔証明終〕

演習問題 8 − 4

$y = \cos x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$ の逆関数を $y = f(x)$ とおく．$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ における，$f(x)$ の第 2 次導関数の値 $f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を求めよ．

解答・解説

条件より，$x = \cos y\,(0 \leqq y \leqq \pi)$．ゆえに，$0 < y < \pi$ において

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} \\
&= \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= \frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{\sin y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sin y}\right) \\
&= \frac{\cos y}{\sin^2 y}\cdot\left(-\frac{1}{\sin y}\right) \\
&= -\frac{\cos y}{\sin^3 y}
\end{aligned}$$

ここで，$x = \cos y$ について，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入して，$y = \dfrac{\pi}{6}$．ゆえに

$$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = -4\sqrt{3} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 8 − 5

何回でも微分可能である関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して，$h(x)=f(x)g(x)$ とおくとき

$$h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の n 次導関数であり，$f^{(0)}(x)=f(x)$ とする．

解答・解説

$h(x)=f(x)g(x)$ のとき

$$h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\sum_{k=0}^{1}{}_1\mathrm{C}_k f^{(1-k)}(x)g^{(k)}(x)\\&={}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)+{}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

より ① が成立する．

(II) $n=l$ (l は 1 以上の整数) のとき成り立つとすると

$$h^{(l)}(x)=\sum_{k=0}^{l}{}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&h^{(l+1)}(x)\\
=&\left\{h^{(l)}(x)\right\}'\\
=&\left\{\sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x)\right\}'\\
=&\sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k \left(\left\{f^{(l-k)}(x)\right\}' g^{(k)}(x)+f^{(l-k)}(x)\left\{g^{(k)}(x)\right\}'\right)\\
=&\sum_{k=0}^{l} {}_l\mathrm{C}_k \left\{f^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(l-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right\}\\
=&\,{}_l\mathrm{C}_0 f^{(l+1)}(x)g^{(0)}(x)+{}_l\mathrm{C}_1 f^{(l)}(x)g^{(1)}(x)+\cdots+{}_l\mathrm{C}_l f^{(1)}(x)g^{(l)}(x)\\
&\quad+{}_l\mathrm{C}_0 f^{(l)}(x)g^{(1)}(x)+{}_l\mathrm{C}_1 f^{(l-1)}(x)g^{(2)}(x)+\cdots+{}_l\mathrm{C}_l f^{(0)}(x)g^{(l+1)}(x)\\
=&\,{}_l\mathrm{C}_0 f^{(l+1)}(x)g^{(0)}(x)+({}_l\mathrm{C}_1+{}_l\mathrm{C}_0)f^{(l)}(x)g^{(1)}(x)+({}_l\mathrm{C}_2+{}_l\mathrm{C}_1)f^{(l-1)}(x)g^{(2)}(x)\\
&\quad+\cdots+({}_l\mathrm{C}_l+{}_l\mathrm{C}_{l-1})f^{(1)}(x)g^{(l)}(x)+{}_l\mathrm{C}_l f^{(0)}(x)g^{(l+1)}(x)
\end{aligned}
$$

ここで，${}_l\mathrm{C}_0={}_{l+1}\mathrm{C}_0$，${}_l\mathrm{C}_l={}_{l+1}\mathrm{C}_{l+1}$ ，${}_l\mathrm{C}_k+{}_l\mathrm{C}_{k-1}={}_{l+1}\mathrm{C}_k$ に注意すると

$$
h^{(l+1)}(x)=\sum_{k=0}^{l+1} {}_{l+1}\mathrm{C}_k f^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)
$$

よって，$n=l+1$ で成立する．

以上，(I)(II) から ① が示された． 〔証明終〕

添削課題 8 − 1

次の関数を微分せよ．

(1) $y = x + \cos x$　(2) $y = \sqrt[3]{x} + \tan x$　(3) $y = x^2 \sin x$

(4) $y = \dfrac{\sin x}{x}$　(5) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$　(6) $y = e^x \sin x$

(7) $y = \sin 3x$　(8) $y = \cos(2x + 1)$　(9) $y = \sin(x^2 - 1)$

(10) $y = \tan(2x + 3)$　(11) $y = \sin^4 x$　(12) $y = \cos^2 3x$

(13) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$　(14) $y = \sqrt{x^2 + \cos x}$

解答・解説

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sin x$　(答)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$　(答)

(3) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x = 2x \sin x + x^2 \cos x \qquad \text{(答)}$$

(4) 商の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \qquad \text{(答)}$$

(5) 商の微分法を用いる．

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \cos x)'(1 + \cos x) - (1 - \cos x)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(1 + \cos x) + \sin x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6) 積の微分法を用いる．

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) \qquad \text{(答)}$$

(7) $t = 3x$，$y = \sin t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 3 = 3 \cos 3x \qquad \text{(答)}$$

(8) $t = 2x + 1$，$y = \cos t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot 2 = -2\sin(2x+1) \qquad \text{(答)}$$

(9) $t = x^2 - 1$，$y = \sin t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x\cos(x^2-1) \qquad \text{(答)}$$

(10) $t = 2x + 3$，$y = \tan t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2(2x+3)} \qquad \text{(答)}$$

(11) $t = \sin x$，$y = t^4$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 4t^3\cos x = 4\sin^3 x\cos x \qquad \text{(答)}$$

(12) 合成関数の微分法を用いる． $t = 3x$，$u = \cos t$，$y = u^2$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = 2u \cdot (-\sin t) \cdot 3 = -6\cos t \sin t = -6\cos 3x \sin 3x \qquad \text{(答)}$$

(13) 商の微分法と合成関数の微分法を用いる．

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin x)'\sqrt{2x^2+1} - \sin x\left(\sqrt{2x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2} \\
&= \frac{\cos x\sqrt{2x^2+1} + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\sin x}{2x^2+1} \\
&= \frac{(2x^2+1)\cos x - 2x\sin x}{(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(14) $t = x^2 + \cos x$，$y = t^{\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (2x - \sin x) = \frac{2x - \sin x}{2\sqrt{x^2+\cos x}} \qquad \text{(答)}$$

添削課題 **8 − 2**

$f(x) = \cos x$ とする．$\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ を n の式で表せ．

解答・解説 $f(x) = \cos x$ より

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x$$

であり，$f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x)$ であるから，求める n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right). \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (答)$$

Lecture 9　微分法 (7)　接線，曲線の凹凸とグラフ - 解答

演習問題 $9-1$

次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフの，点 $(2,\ \sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 関数 $y=\sin x$ のグラフの，$x=\dfrac{\pi}{3}$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y=xe^x+1$ の，$x=1$ における接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフの，$x=\pi$ における接線の方程式を求めよ．

(5) 方程式

$$x^3+xy^2-2y^2=0 \quad (0 \leqq x < 2)$$

で表される曲線の，点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x)=\sqrt{x}$ とおく．$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，

$$f\left(2\right)=\sqrt{2}, \quad f'\left(2\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

求める接線の方程式は

$$y-f\left(2\right)=f'\left(2\right)\left(x-2\right). \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)=\sin x$ とおく．$f'(x)=\cos x$ であるから，

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

求める接線の方程式は

$$y-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right). \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

(3) $f(x)=xe^x+1$ とおく．

$$f'(x)=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=(x+1)e^x$$

より，$f(1)=e+1,\quad f'(1)=2e$. よって接線の方程式は

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$
$$\therefore \quad y=2ex-e+1. \qquad \text{(答)}$$

次に，法線の法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2e \end{pmatrix}$$

であるから，求める法線の方程式は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(e+1) \end{pmatrix} = 0.$$

$$\therefore \quad x + 2ey - 2e^2 - 2e - 1 = 0. \qquad \text{(答)}$$

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'x - (\sin x)(x)'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

よって $f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = -\dfrac{1}{\pi}$ であるから，求める接線の方程式は

$$y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi)$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{\pi}(x-\pi). \qquad \text{(答)}$$

(5) まず，

$$x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

として，$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2 + \left(y^2 + x \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx}\right) - 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(2-x)}.$$

よって，点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 1^2 + 1^2}{2 \cdot 1(2-1)} = 2.$$

よって求める接線の方程式は

$$y - 1 = 2(x-1) \qquad \therefore \quad y = 2x - 1. \qquad \text{(答)}$$

演習問題 9 − 2

$y = (3x - x^3)e^x$ が表す曲線を C とする．曲線 C の接線で，原点を通るものをすべて求めよ．

解答・解説

$$y' = (3 - 3x^2)e^x + (3x - x^3)e^x = -(x^3 + 3x^2 - 3x - 3)e^x$$

ゆえに，曲線 C 上の点 $(t,\ (3t - t^3)e^t)$ における接線の方程式は

$$y - (3t - t^3)e^t = -(t^3 + 3t^2 - 3t - 3)e^t(x - t) \qquad \cdots(\sharp)$$

この直線が原点を通ることから，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ を代入して

$$\begin{aligned} 0 - (3t - t^3)e^t &= -(t^3 + 3t^2 - 3t - 3)e^t(0 - t) \\ t^4 + 2t^3 - 3t^2 &= 0 \\ (t + 3)t^2(t - 1) &= 0 \\ t &= -3,\ 0,\ 1 \end{aligned}$$

ゆえに，$(\sharp)$ に代入して

$$y = -\frac{6}{e^3}x,\ y = 3x,\ y = 2ex \qquad (答)$$

演習問題 9 − 3

2 曲線 $y = \log x$，$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ のグラフが共有点を持ち，その点で共通の接線を持つとき，a を求めよ．また，その接線を求めよ．

解答・解説 $f(x) = \log x$, $g(x) = ax^2$ とする．$y = f(x)$, $y = g(x)$ の共有点の x 座標を $x = t$ として

$$f(t) = g(t),\ f'(t) = g'(t)$$

が成り立つ．すなわち

$$\log t = at^2 \quad \cdots(\sharp), \qquad \frac{1}{t} = 2at \quad \cdots(\sharp\sharp)$$

$(\sharp\sharp)$ より，$at^2 = \dfrac{1}{2}$ なので

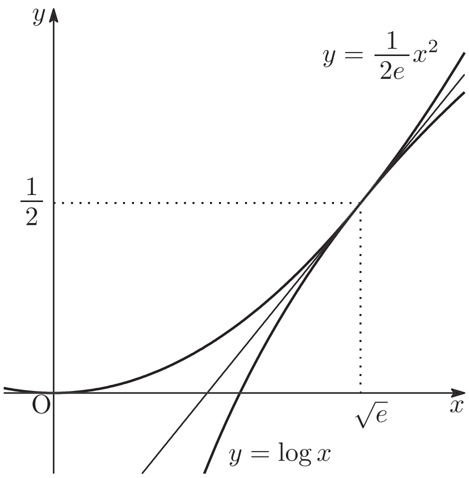
$$\log t = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad t = \sqrt{e}$$

ゆえに

$$a = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2e} \qquad (\text{答})$$

このとき，点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における共通接線は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2} \qquad (\text{答})$$



演習問題 9 − 4

次の関数の，増減，極値，凹凸，漸近線を調べ，グラフを描け．

(1) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$　　(2) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$　　(3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

解答・解説

(1) 定義域は実数全体．

$$y' = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$y'' = \frac{4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

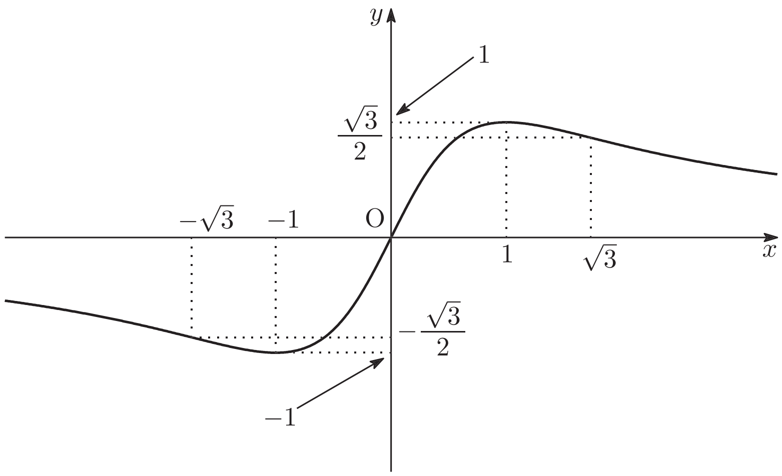
ゆえに，増減は次の通り．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘

また

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

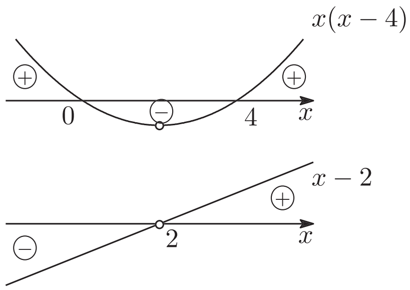
より，$y=0$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である．ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図の通り．



(2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}\quad(x \fallingdotseq 2)$ とおく．

$$\begin{aligned} f(x)&=x+2+\frac{4}{x-2},\\ f'(x)&=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2},\\ f''(x)&=\frac{8}{(x-2)^3}=\frac{8(x-2)}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

であり，$f'(x)$ と $x(x-4)$，$f''(x)$ と $x-2$ の符号がそれぞれ一致するから，下図を用いて次の表を得る．

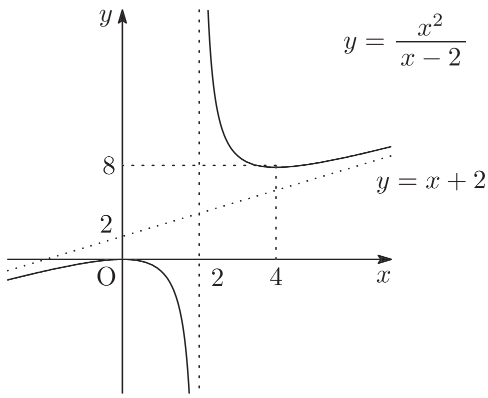


x	$\cdots$	0	$\cdots$	(2)	$\cdots$	4	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
f	↗	0	↘	$\times$	↘	8	↗

また $f(0)=0,\quad f(4)=8,\quad$ であり，さらに

$$\lim_{x\to 2\pm 0} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(x+2)\}=0 \qquad (\text{複号同順})$$

であるから漸近線は $y=x+2$，$x=2$．以上より，下図を得る．



(答)

(3) 定義域は，$x = \pm 2$ を除く実数全体.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)+4x}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4} \\
y' &= 1 + 4 \cdot \frac{(x^2-4) - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x^2-4)^2} \\
y'' &= -4 \cdot \frac{2x \cdot (x^2-4)^2 - (x^2+4) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{8x(x-2)(x+2)(x^2+12)}{(x^2-4)^4}
\end{aligned}
$$

従って，増減は次の通り.

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	$\times$	↘	0	↘	$\times$	↘	$3\sqrt{3}$	↗

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

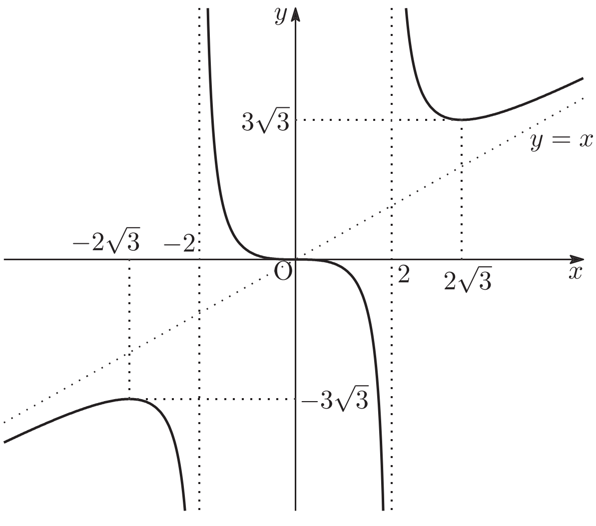
であり

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -2+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -2-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \{f(x) - x\} = 0$$

より，$x = 2$, $x = -2$, $y = x$ はこの曲線の漸近線である.

ゆえに，$y = f(x)$ のグラフの概形は下図の通り.



演習問題 9 − 5

次の関数の，増減，極値，凹凸，漸近線を調べ，グラフを描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は必要があれば証明なしに用いてよい．

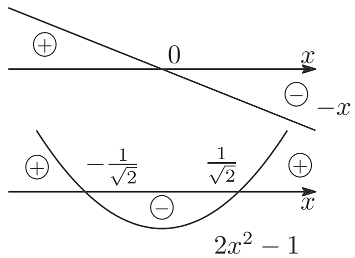
(1) $y=e^{-x^2}$　　(2) $y=xe^x$

解答・解説

(1) $f(x)=e^{-x^2}$ とおく．定義域は実数全体で，

$$\begin{aligned} f'(x)&=-2xe^{-x^2},\\ f''(x)&=-2\left\{e^{-x^2}+x\left(-2xe^{-x^2}\right)\right\}\\ &=2(2x^2-1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

であり，$f'(x)$ と $-x$，$f''(x)$ と $2x^2-1$ の符号がそれぞれ一致するから，下図より次の表を得る．

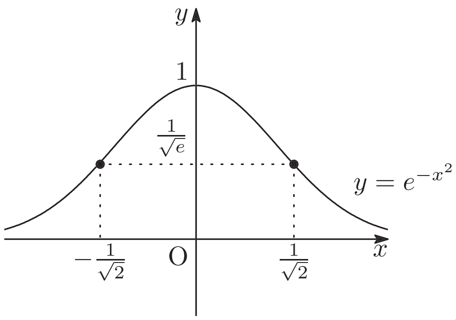


x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

さらに，

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

であるから，漸近線は $y=0$．以上より，下図を得る．



(答)

(2) 定義域は実数全体．

$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

したがって，増減は次の通り．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

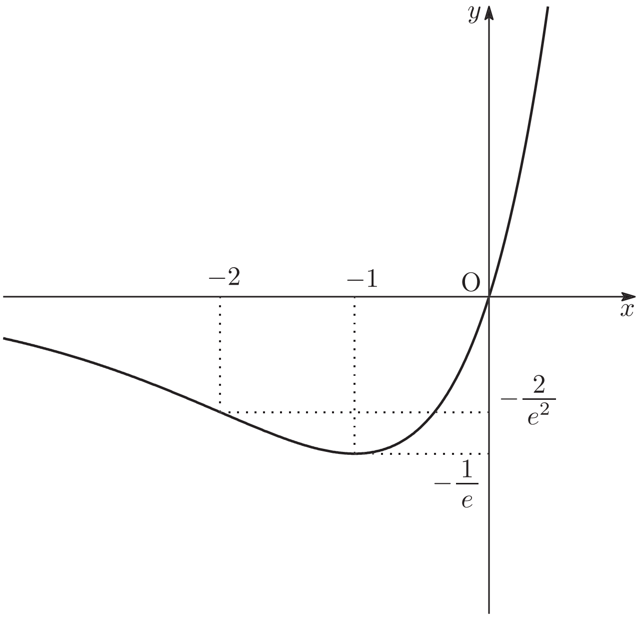
また，$x = -t$ とおくと

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{t \to \infty} (-te^{-t}) = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0$$

ゆえに，$y = 0$ はこの曲線の漸近線である，また

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty$$

なので，グラフは下図のようになる．



y
x
O
-2
-1
$-\dfrac{2}{e^2}$
$-\dfrac{1}{e}$

演習問題 9 − 6

a を実数とし，関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + ax + a}$ は，すべての実数 x に対し $f(x) > 0$ とする．

(1) a の取りうる値の範囲を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が最大値をとるときの x の値 p を，a を用いて表せ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ が 2 つの異なる変曲点を持つことを示せ．また，それら変曲点の y 座標を a を用いて表せ．

解答・解説

(1)

$$x^2 + ax + a = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$$

より

$$-\frac{a^2}{4} + a > 0 \qquad \therefore \quad 0 < a < 4 \qquad \cdots (\sharp) \qquad \text{(答)}$$

(2) $(\sharp)$ の下で

$$f'(x) = -\frac{2x + a}{(x^2 + ax + a)^2}$$

ゆえに，$x = -\dfrac{a}{2}$ のとき，$f(x)$ は最大値をとる． (答)

(3)

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(x^2 + ax + a)^2 - (2x + a) \cdot 2(x^2 + ax + a) \cdot (2x + a)}{(x^2 + ax + a)^4} \\ &= -2 \cdot \frac{(x^2 + ax + a) - (2x + a)^2}{(x^2 + ax + a)^3} \\ &= -2 \cdot \frac{-3x^2 - 3ax + (a - a^2)}{(x^2 + ax + a)^3} \end{aligned}$$

ここで，2 次方程式 $3x^2 + 3ax + (a^2 - a)$ の判別式を D とすれば

$$D = (3a)^2 - 4 \cdot 3(a^2 - a) = -3a(a - 4)$$

であり，$(\sharp)$ の範囲で $D > 0$ である．ゆえに，$y = f(x)$ は 2 つの異なる変曲点を持つ．
また，変曲点の x 座標を α とすれば，$3\alpha^2 + 3a\alpha = a - a^2$ より

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + a} = \frac{3}{4a - a^2} \qquad \text{(答)}$$

添削課題 9 − 1

次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の，点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=x\log x$ 上の，点 $(e^2, 2e^2)$ における接線および法線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 上の，点 $(1, e)$ における接線の方程式を求めよ．

解答・解説

(1)

$$y'=-\frac{1}{x^2}$$

より，傾きは $-\dfrac{1}{4}$．接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2) \qquad y=-\frac{1}{4}x+1 \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$y'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

より，傾きは $\log e^2+1=3$．接線の方程式は

$$y-2e^2=3(x-e^2) \qquad y=3x-e^2 \qquad \text{(答)}$$

また，法線の方程式は

$$y-2e^2=-\frac{1}{3}(x-e^2) \qquad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}e^2 \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$y'=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

より，$(1, e)$ における接線の傾きは 0．接線の方程式は

$$y=e \qquad \text{(答)}$$

添削課題 $\mathbf{9-2}$

点 $(0,\ 1)$ から曲線 $y=\log x$ に引いた接線の方程式を求めよ．

解答・解説

$y'=\dfrac{1}{x}$．ゆえに，曲線 $y=\log x$ 上の点 $(t,\log t)$ における接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$$

この直線が点 $(0,1)$ を通るのは

$$\begin{aligned}1-\log t&=\frac{1}{t}(0-t)\\ \log t&=2\\ t&=e^2\end{aligned}$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)\qquad\therefore\quad y=\frac{1}{e^2}x+1\qquad\text{(答)}$$

添削課題 **9 − 3**

次の関数の，増減，極値，凹凸，漸近線を調べ，グラフを描け．

(1) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ (2) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

解答・解説

(1)

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)}{(x^2+1)^3}$$

従って，増減は次の通り．

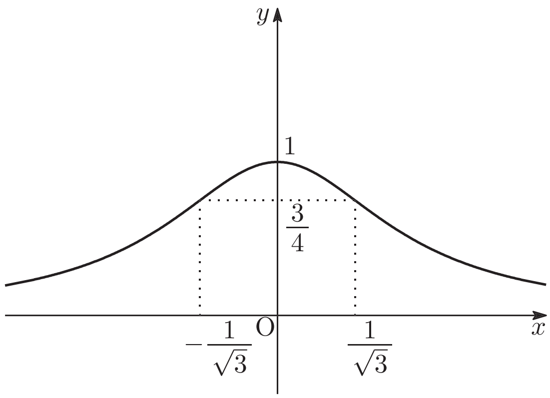
x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{3}{4}$	↗	1	↘	$\dfrac{3}{4}$	↘

また

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

より，$y=0$ はこの曲線の漸近線である．

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図の通り．



(2)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} \\
y' &= 1 + \frac{(x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2} \\
y'' &= \frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} \\
&= \frac{2x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}
\end{aligned}
$$

従って，増減は次の通り．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$\times$	↘	0	↘	$\times$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

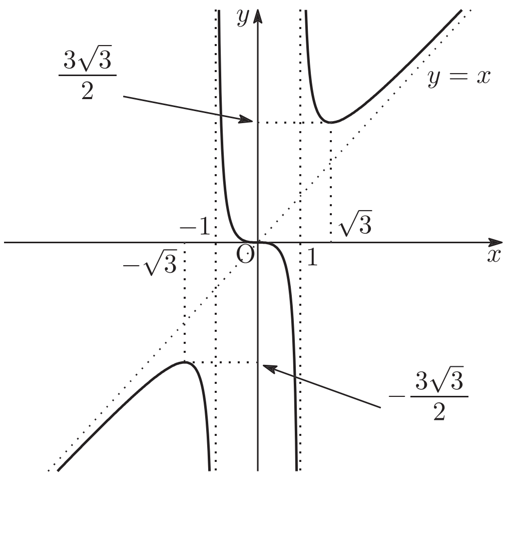
であり，

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \{f(x) - x\} = 0$$

より，$x=1,\ x=-1,\ y=x$ はこの曲線の漸近線である．

ゆえに，$y = f(x)$ のグラフの概形は下図の通り．



添削課題 **9 − 4**

関数 $f(x)=(x^2+ax+3)e^x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が極値を持たないような定数 a の範囲を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ が変曲点を持たないような定数 a の範囲を求めよ．

解答・解説

(1)

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x=\left\{x^2+(a+2)x+(a+3)\right\}e^x$$

$e^x\neq 0$ なので，$x^2+(a+2)x+(a+3)=0$ の判別式を D_1 とするとき，$f(x)$ が極値を持たない条件は

$$\begin{aligned} D_1 &\leqq 0 \\ (a+2)^2-4(a+3) &\leqq 0 \\ a^2-8 &\leqq 0 \\ -2\sqrt{2}\leqq a &\leqq 2\sqrt{2} \qquad (答) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(x)&=(2x+a+2)e^x+\left\{x^2+(a+2)x+(a+3)\right\}e^x \\ &=\left\{x^2+(a+4)x+(2a+5)\right\}e^x \end{aligned}$$

ゆえに，$x^2+(a+4)x+(2a+5)=0$ の判別式を D_2 とするとき，$f(x)$ が変曲点を持たない条件は

$$\begin{aligned} D_2 &\leqq 0 \\ (a+4)^2-4(2a+5) &\leqq 0 \\ a^2-4 &\leqq 0 \\ -2\leqq a &\leqq 2 \qquad (答) \end{aligned}$$

Lecture 10　微分法 (8)　方程式・不等式への応用 - 解答

演習問題 10 − 1

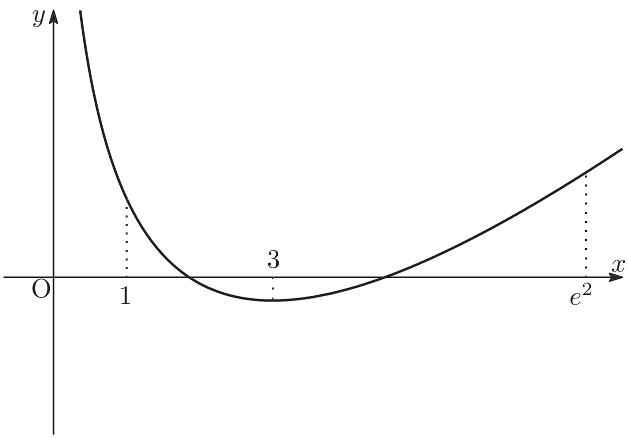
x の方程式
$$x - 3\log x = 0$$
の実数解の個数を求めよ．なお，$2.7 < e < 2.8$ は用いてよい．

解答・解説

$f(x) = x - 3\log x \,(x > 0)$ とする．
$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x} = \frac{x-3}{x}$$
より，$x = 3$ で極小値をとる．増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$3(1-\log 3)$	$\nearrow$

ここで，$e < 3$ より $\log 3 > 1$ なので
$$f(3) = 3(1-\log 3) < 0$$
である．また
$$f(1) = 1 - 0 = 1 > 0, \quad f(e^2) = e^2 - 3\cdot 2 = e^2 - 6 > (2.7)^2 - 6 = 1.29 > 0$$
であることから，方程式 $f(x) = 0$ は 2 個の異なる実数解を持つ．　　(答)



演習問題 10 − 2

x の方程式

$$x^3-3x^2-kx-k=0$$

が相異なる 3 個の実数解をもつ，k の範囲を求めよ．

解答・解説

$x=-1$ は与方程式の解ではない．ゆえに

$$x^3-3x^2=k(x+1)$$

$$\frac{x^3-3x^2}{x+1}=k \qquad \cdots(\sharp)$$

より，$(\sharp)$ の左辺を $f(x)$ とすることで，与方程式の解は曲線 $y=f(x)$，直線 $y=k$ の共有点の x 座標に読み替えられる．

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-2)^2-4}{x+1}=(x-2)^2-\frac{4}{x+1}$$

$$f'(x)=2(x-2)+\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{2(x-2)(x+1)^2+4}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x+1)^2}$$

ゆえに，$f(x)$ の増減は次の通り．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$9+6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$9-6\sqrt{3}$	$\nearrow$

また

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-1-0}f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-1+0}f(x)=-\infty$$

である．

以上より，求める範囲は

$$9-6\sqrt{3}<k<0,\ 9+6\sqrt{3}<k \qquad \text{(答)}$$

演習問題 10 − 3

$f(x) = x - 1 - \log x$ とする．$x > 0$ で $f(x) \geqq 0$ が成り立つこと示せ．

解答・解説

$$f(x) = x - 1 - \log x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

ゆえに，$f(x)$ の増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x > 0$ で

$$f(x) \geqq f(1) = 1 - 1 - 0 = 0$$

以上より示した．　〔証明終〕

演習問題 10 − 4

e は自然対数の底とする．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ を示せ．

(2) (1) の結果を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ を求めよ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．

解答・解説

(1) $x>0$ において

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$$

とおくと

$$f'(x)=e^x-1-x,\quad f''(x)=e^x-1$$

ここで，$f''(x)$ は単調増加で，$x>0$ より

$$f''(x)=e^x-1>e^0-1=0$$

よって，$f''(x)>0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加である．このとき

$$f'(x)=e^x-1-x>e^0-1-0=0$$

より，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ も単調増加である．つまり

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>e^0-1-0-\frac{0^2}{2}=0$$

したがって，$x>0$ において

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$$

が成り立つ． 〔証明終〕

(2) (1) の結果 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ より

$$\frac{1}{e^x}<\frac{1}{1+x+\dfrac{x^2}{2}}$$

したがって，$x>0$ のとき

$$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2}}$$

であるから

$$0 \leqq \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \leqq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{x}{2}} = 0$$

よって，はさみうちの原理によって

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，① において $e^x = t$ とすると $x = \log t$ であり

$$x \to \infty \iff t \to \infty$$

だから

$$① \iff \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

演習問題 10 − 5

次の問いに答えよ．

(1) $x>0$ のとき，$\log x < \sqrt{x}$ を示せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x\,(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

より，$\sqrt{x}-2=0$ すなわち $x=4$ で極小値をとる．増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$2-\log 4$	$\nearrow$

ここで．$2<e<3$ から

$$f(x)\geqq f(4)=2-\log 4=2-2\log 2>2-2\cdot 1=0$$

ゆえに，$x>0$ で $\log x<\sqrt{x}$ は成り立つ． 〔証明終〕

(2) (1) より，$x>1$ で

$$0<\log x<\sqrt{x}$$
$$0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0 \qquad \text{(答)}$$

演習問題 10 − 6

(1) 平均値の定理を用いて次を示せ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = 1$$

(2) e を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，平均値の定理を利用して，不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．

解答・解説

(1) $x \to 0$ を考えるので，$-1 < x < 1$ としてよい．$f(x) = \sin x$ はすべての実数 x で微分可能であるから，x と x^2 の間に平均値の定理を使うと

$$\frac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = f'(c) \iff \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = \cos c$$

を満たす c が x^2 と x の間に存在する．このとき，$x \to 0$ とすると，$c \to 0$ となるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = \lim_{c\to 0}\cos c = \cos 0 = 1$$

〔証明終〕

(2) $f(x) = \log(\log x)$ とおくと，$f(x)$ は $x \geqq e$ において微分可能であるから，区間 $[p,\ q]$ において平均値の定理を用いて

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(c)$$

となる c が，$e \leqq p < c < q$ に存在する．ここで

$$f'(x) = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x\log x}$$

より

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q - p} = \frac{1}{c\log c} \quad (e \leqq p < c < q)$$

また，$y = x\log x$ とすると，$y' = \log x + 1$ より，$x \geqq e$ において $y' > 0$ となり，$y = x\log x$ は $x \geqq e$ で単調増加であるから，$c > e$ より

$$c\log c > e\log e = e$$

よって

$$\frac{1}{c\log c} < \frac{1}{e}$$

であるから

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} < \frac{1}{e}$$

したがって，$q-p>0$ より

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つ．〔証明終〕

添削課題 **10 − 1**

$x > 0$ の範囲において，方程式

$$e^x = x + e$$

は解をただ 1 つ持つことを示せ．また，その解を α とするとき，$1 < \alpha < 1.5$ が成り立つことを示せ．ただし，e は自然対数の底であり，$2.7 < e < 2.8$ は用いてよい．

解答・解説

$$f(x) = e^x - x - e$$

とおく．

$$f'(x) = e^x - 1$$

より，$x > 0$ で単調増加．また

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 < 0, \\ f(1.5) &= e^{1.5} - 1.5 - e > e^{1.5} - 1.5 - 2.8 = e^{1.5} - 4.3 \end{aligned}$$

であり

$$(2.7)^3 < e^3 < (2.8)^3 \quad \therefore \quad 19.683 < e^3 < 21.952$$

また，$4.3^2 = 18.49 < 19.683$ であることから，$e^{1.5} > 4.3$．すなわち，$f(1.5) > 0$ である．
以上より，$1 < \alpha < 1.5$ が成り立つ．　〔証明終〕

添削課題 $\mathbf{10-2}$

方程式

$$x^2+3ax+3=\frac{1}{x}$$

の相異なる実数解の個数が 3 個となる a の範囲を求めよ．

解答・解説

$x=0$ は与えられた方程式の解ではないので，x で辺々を割ると

$$x+3a+\frac{3}{x}=\frac{1}{x^2}$$
$$a=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2} \qquad \cdots(\sharp)$$

ここで，$(\sharp)$ の右辺を $f(x)$ とおくと

$$f(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}$$
$$f'(x)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{3x^3}=\frac{-x^3+3x-2}{3x^3}=-\frac{(x-1)^2(x+2)}{3x^3}$$

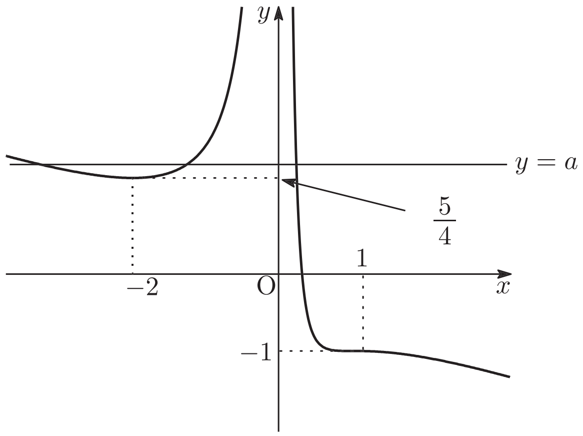
ゆえに，増減は次の通り．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	-1	$\searrow$

また

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to\pm0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

である．



ゆえに，求める a の範囲は $a>\frac{5}{4}$ 　　(答)

添削課題 **10 − 3**

$x > 0$ のとき，$x > \log(x^2+1)$ が成り立つことを示せ．

解答・解説

$$f(x) = x - \log(x^2+1)$$

とおく．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{(x^2+1)-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geqq 0$$

ゆえに，$f(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する．

$$f(x) > f(0) = 0 - \log 1 = 0$$

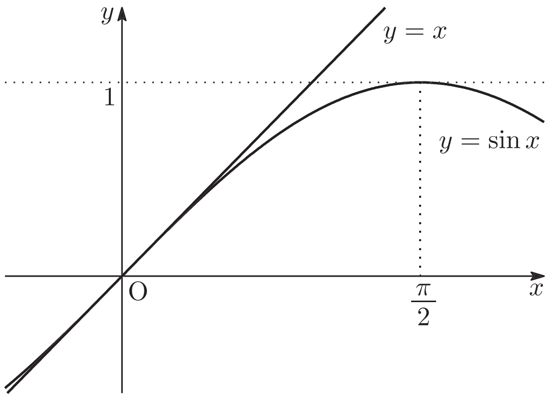
ゆえに，$x > 0$ で $x > \log(x^2+1)$ は成り立つ．　〔証明終〕

添削課題 10 − 4

$x\cos x < \sin x < x\ (0 < x < \pi)$ を示し，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$ を示せ．

解答・解説

$x > \sin x$ は下図の関係から明らか．



以下，$\sin x > x\cos x$ を示す．$g(x)=\sin x - x\cos x\,(0<x<\pi)$ とおく．

$$g'(x)=\cos x-(\cos x - x\sin x)=x\sin x>0$$

ゆえに，$g(x)$ は $0<x<\pi$ で単調に増加する．従って

$$g(x)>g(0)=0-0=0$$

以上より，$x\cos x<\sin x<x$ を示した．
また

$$-x<-\sin x<-x\cos x$$
$$0<x-\sin x<x(1-\cos x)$$
$$0<\frac{x-\sin x}{x^2}<\frac{1-\cos x}{x}$$

であり，

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos x}=0$$

であることから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$ 〔証明終〕

M2JD

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	