2MJSS/2MJS/2MJ

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

中２数学

中２東大数学

８章　式の展開・因数分解 （４）

問題

【1】(1) $x^2+6x+5=\boldsymbol{(x+1)(x+5)}$　(2) $x^2-13x+12=\boldsymbol{(x-1)(x-12)}$

(3) $x^2+6x+9=\boldsymbol{(x+3)^2}$　(4) $x^2-10x+25=\boldsymbol{(x-5)^2}$

(5) $x^2-49=\boldsymbol{(x+7)(x-7)}$　(6) $y^2-12y-28=\boldsymbol{(y+2)(y-14)}$

(7) $b^2-18b+81=\boldsymbol{(b-9)^2}$　(8) $3x^2+7x+2=\boldsymbol{(x+2)(3x+1)}$

(9) $a^2-100b^2=\boldsymbol{(a+10b)(a-10b)}$　(10) $y^2+y-56=\boldsymbol{(y+8)(y-7)}$

(11) $a^2+3a-28=\boldsymbol{(a+7)(a-4)}$　(12) $2x^2-3x-5=\boldsymbol{(x+1)(2x-5)}$

【2】(1) $x^2+8xy+7y^2=\boldsymbol{(x+y)(x+7y)}$　(2) $x^2-3xy-4y^2=\boldsymbol{(x-4y)(x+y)}$

(3) $x^2+7xy+10y^2=\boldsymbol{(x+2y)(x+5y)}$　(4) $x^2+7xy-18y^2=\boldsymbol{(x+9y)(x-2y)}$

(5) $a^2-6ab-16b^2=\boldsymbol{(a+2b)(a-8b)}$　(6) $x^2-9ax+20a^2=\boldsymbol{(x-4a)(x-5a)}$

(7) $x^2+2xy-48y^2=\boldsymbol{(x+8y)(x-6y)}$　(8) $y^2-17yz+60z^2$
$=\boldsymbol{(y-12z)(y-5z)}$

(9) $3x^2+8xy+4y^2$
$=\boldsymbol{(x+2y)(3x+2y)}$

1	$2y$ →	$6y$
3	$2y$ →	$2y$
3	$4y^2$	$8y$

(10) $2x^2-3xy-20y^2$
$=\boldsymbol{(x-4y)(2x+5y)}$

1	$-4y$ →	$-8y$
2	$5y$ →	$5y$
2	$-20y^2$	$-3y$

(11) $3a^2-14ab-24b^2$
$=\boldsymbol{(a-6b)(3a+4b)}$

1	$-6b$ →	$-18b$
3	$4b$ →	$4b$
3	$-24b^2$	$-14b$

(12) $6p^2+11pq-10q^2$
$=\boldsymbol{(2p+5q)(3p-2q)}$

2	$5q$ →	$15q$
3	$-2q$ →	$-4q$
6	$-10q^2$	$11q$

(13) $8a^2-22ac-21c^2$
$=\boldsymbol{(2a-7c)(4a+3c)}$

2	$-7c$ →	$-28c$
4	$3c$ →	$6c$
8	$-21c^2$	$-22c$

(14) $20x^2+xy-12y^2$
$=\boldsymbol{(4x-3y)(5x+4y)}$

4	$-3y$ →	$-15y$
5	$4y$ →	$16y$
20	$-12y^2$	y

【3】(1)　$(x-y)^2-5(x-y)+4$　　［$x-y=A$ とおく］

$=A^2-5A+4$

$=(A-4)(A-1)$　　［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y-4)(x-y-1)}$

(2)　$12x^2-27(y-z)^2$

$=3\{4x^2-9(y-z)^2\}$

$=3\{2x+3(y-z)\}\{2x-3(y-z)\}$

$=\boldsymbol{3(2x+3y-3z)(2x-3y+3z)}$

(3)　$\left(x^2-6x\right)^2+\left(x^2-6x\right)-56$　　［$x^2-6x=A$ とおく］

$=A^2+A-56$

$=(A-7)(A+8)$　　［A をもとにもどす］

$=(x^2-6x-7)(x^2-6x+8)$

$=\boldsymbol{(x-7)(x+1)(x-2)(x-4)}$

(4)　$2(x+2y)^2+3(x+2y)-9$　　［$x+2y=A$ とおく］

$=2A^2+3A-9$

$=(A+3)(2A-3)$　　［A をもとにもどす］

$=\{(x+2y)+3\}\{2(x+2y)-3\}$

$=\boldsymbol{(x+2y+3)(2x+4y-3)}$

1	3	→ 6
2	-3	→ -3
2	-9	3

(5)　$3(x^2-2x)^2-(x^2-2x)-4$　　［$x^2-2x=A$ とおく］

$=3A^2-A-4$

$=(A+1)(3A-4)$　　［A をもとにもどす］

$=\{(x^2-2x)+1\}\{3(x^2-2x)-4\}$

$=(x^2-2x+1)(3x^2-6x-4)$

$=\boldsymbol{(x-1)^2(3x^2-6x-4)}$

1	1	→ 3
3	-4	→ -4
3	-4	-1

(6)
$$\begin{aligned} & 2x^3-6x^2-56x \\ =& 2x(x^2-3x-28) \\ =& \boldsymbol{2x(x-7)(x+4)} \end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned} & -x^2y^2+2xy+35 \\ =& -(x^2y^2-2xy-35) \\ =& \boldsymbol{-(xy-7)(xy+5)} \end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned} & 4a^3-8a^2b+3ab^2 \\ =& a(4a^2-8ab+3b^2) \\ =& \boldsymbol{a(2a-3b)(2a-b)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -3b & \longrightarrow & -6b \\ 2 & & -b & \longrightarrow & -2b \\ \hline 4 & & 3b^2 & & -8b \end{array}$$

(9)
$$\begin{aligned} & -6x^3+5x^2+6x \\ =& -x(6x^2-5x-6) \\ =& \boldsymbol{-x(2x-3)(3x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 4 \\ \hline 6 & & -6 & & -5 \end{array}$$

【4】(1)
$$\begin{aligned} x^2+9+6x =& x^2+6x+9 \\ =& \boldsymbol{(x+3)^2} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} a^2-36+9a =& a^2+9a-36 \\ =& \boldsymbol{(a+12)(a-3)} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 2y-35+y^2 =& y^2+2y-35 \\ =& \boldsymbol{(y+7)(y-5)} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} 32-20x+3x^2 =& 3x^2-20x+32 \\ =& \boldsymbol{(x-4)(3x-8)} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} 28a^2b^2-49b^4-4a^4 =& -(4a^4-28a^2b^2+49b^4) \\ =& \boldsymbol{-(2a^2-7b^2)^2} \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} & a^2-2ab+b^2+2a-2b+1 \\ =& (a^2-2ab+b^2)+(2a-2b)+1 \\ =& (a-b)^2+2(a-b)+1 \quad [a-b=A \text{ とおく}] \\ =& A^2+2A+1 \\ =& (A+1)^2 \quad [A \text{ をもとにもどす}] \\ =& \boldsymbol{(a-b+1)^2} \end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned} & x^2-2xy+y^2+2x-2y-24 \\ =& (x^2-2xy+y^2)+(2x-2y)-24 \\ =& (x-y)^2+2(x-y)-24 \quad [x-y=A \text{ とおく}] \\ =& A^2+2A-24 \\ =& (A+6)(A-4) \quad [A \text{ をもとにもどす}] \\ =& \boldsymbol{(x-y+6)(x-y-4)} \end{aligned}$$

(8) $x^2+y^2-2xy-z^2$

$=(x^2-2xy+y^2)-z^2$

$=(x-y)^2-z^2$ ［$x-y=A$ とおく］

$=A^2-z^2$

$=(A+z)(A-z)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y+z)(x-y-z)}$

(9) x^2-4y^2-6x+9

$=(x^2-6x+9)-4y^2$

$=(x-3)^2-4y^2$ ［$x-3=A$ とおく］

$=A^2-(2y)^2$

$=(A+2y)(A-2y)$ ［A をもとにもどす］

$=(x-3+2y)(x-3-2y)$

$=\boldsymbol{(x+2y-3)(x-2y-3)}$

(10) a^2+2a-b^2+1

$=(a^2+2a+1)-b^2$

$=(a+1)^2-b^2$ ［$a+1=A$ とおく］

$=A^2-b^2$

$=(A+b)(A-b)$ ［A をもとにもどす］

$=(a+1+b)(a+1-b)$

$=\boldsymbol{(a+b+1)(a-b+1)}$

(11) $x^2-y^2-z^2+2yz$

$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-(y-z)^2$ ［$y-z=A$ とおく］

$=x^2-A^2$

$=(x+A)(x-A)$ ［A をもとにもどす］

$=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$

$=\boldsymbol{(x+y-z)(x-y+z)}$

(12) $x^2+4y^2+4xy+5x+10y+6$

$=(x^2+4xy+4y^2)+(5x+10y)+6$

$=(x+2y)^2+5(x+2y)+6$ ［$x+2y=A$ とおく］

$=A^2+5A+6$

$=(A+2)(A+3)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x+2y+2)(x+2y+3)}$

(13) $a^2+b^2-c^2-d^2-2ab-2cd$

$=(a^2-2ab+b^2)-(c^2+2cd+d^2)$

$=(a-b)^2-(c+d)^2$ ［$a-b=A,\ c+d=B$ とおく］

$=A^2-B^2$

$=(A+B)(A-B)$ ［$A,\ B$ をもとにもどす］

$=\{(a-b)+(c+d)\}\{(a-b)-(c+d)\}$

$=\boldsymbol{(a-b+c+d)(a-b-c-d)}$

【5】 (1) $(x-3)^2+12x$

$=x^2-6x+9+12x$

$=x^2+6x+9$

$=\boldsymbol{(x+3)^2}$

(2) $(a-5)(a+1)-7$

$=a^2-4a-5-7$

$=a^2-4a-12$

$=\boldsymbol{(a-6)(a+2)}$

(3) $2(x+1)^2-(x-5)(x+2)$

$=2(x^2+2x+1)-(x^2-3x-10)$

$=x^2+7x+12$

$=\boldsymbol{(x+3)(x+4)}$

(4) $(x+2)(x-3)+2(3x+5)$

$=x^2-x-6+6x+10$

$=x^2+5x+4$

$=\boldsymbol{(x+4)(x+1)}$

(5) $(x-y)(x-y-5)-6$ ［$x-y=A$ とおく］

$=A(A-5)-6$

$=A^2-5A-6$

$=(A-6)(A+1)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y-6)(x-y+1)}$

(6) $(a^2+3a-2)(a^2+3a+1)-4$ 　［$a^2+3a=A$ とおく］

$=(A-2)(A+1)-4$

$=A^2-A-2-4$

$=A^2-A-6$

$=(A-3)(A+2)$ 　［A をもとにもどす］

$=(a^2+3a-3)(a^2+3a+2)$

$=\boldsymbol{(a^2+3a-3)(a+2)(a+1)}$

(7) $4(x-y)(x-y-3)+9$ 　［$x-y=A$ とおく］

$=4A(A-3)+9$

$=4A^2-12A+9$

$=(2A-3)^2$ 　［A をもとにもどす］

$=\{2(x-y)-3\}^2$

$=\boldsymbol{(2x-2y-3)^2}$

(8) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$ 　［$x^2+x=A$ とおく］

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+24+24$

$=A^2-14A+48$

$=(A-6)(A-8)$ 　［A をもとにもどす］

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(x^2+x-8)}$

(9) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144$

$=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-1)(x+2)\}-144$

$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)-144$ 　［$x^2+x=A$ とおく］

$=(A-12)(A-2)-144$

$=A^2-14A+24-144$

$=A^2-14A-120$

$=(A-20)(A+6)$ 　［A をもとにもどす］

$=(x^2+x-20)(x^2+x+6)$

$=\boldsymbol{(x+5)(x-4)(x^2+x+6)}$

(10) $(x-1)(x-3)(x+6)(x+8)-360$

$=\{(x-1)(x+6)\}\{(x-3)(x+8)\}-360$

$=(x^2+5x-6)(x^2+5x-24)-360$ ［$x^2+5x=A$ とおく］

$=(A-6)(A-24)-360$

$=A^2-30A+144-360$

$=A^2-30A-216$

$=(A+6)(A-36)$ ［A をもとにもどす］

$=(x^2+5x+6)(x^2+5x-36)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x+3)(x+9)(x-4)}$

【6】(1) $a(x-y)-b(x-y)$ ［$x-y=A$ とおく］

$=aA-bA$

$=A(a-b)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y)(a-b)}$

(2) $3a(a-b)-(a-b)$ ［$a-b=A$ とおく］

$=3aA-A$

$=A(3a-1)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(a-b)(3a-1)}$

(3) $3a(a+1)-a(a+1)$ ［$a+1=A$ とおく］

$=3aA-aA$

$=A(3a-a)$

$=2aA$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{2a(a+1)}$

(4) $3x^2(a-2b)-6x(a-2b)$ ［$a-2b=A$ とおく］

$=3x^2A-6xA$

$=3xA(x-2)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{3x(a-2b)(x-2)}$

(5) $a(3x-y)+2b(y-3x)$

$=a(3x-y)-2b(3x-y)$ ［$3x-y=A$ とおく］

$=aA-2bA$

$=A(a-2b)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(a-2b)(3x-y)}$

(6) $x^2(y-z)+y^2(z-y)$

$=x^2(y-z)-y^2(y-z)$

$=(x^2-y^2)(y-z)$

$=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(y-z)}$

【7】(1)

$$ab+a+b+1$$
$$=(a+1)b+(a+1)$$
$$=\boldsymbol{(a+1)(b+1)}$$

(2)

$$ax+by-bx-ay$$
$$=a(x-y)+(by-bx)$$
$$=a(x-y)-b(x-y)$$
$$=\boldsymbol{(a-b)(x-y)}$$

(3)

$$x^3-x^2-x+1$$
$$=(x^3-x^2)-(x-1)$$
$$=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-1)$$
$$=\boldsymbol{(x-1)^2(x+1)}$$

(4)

$$a^2b^2-a^2-b^2+1$$
$$=a^2(b^2-1)-(b^2-1)$$
$$=(a^2-1)(b^2-1)$$
$$=\boldsymbol{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)}$$

(5)

$$x^2+xy+2x+y+1$$
$$=y(x+1)+(x^2+2x+1)$$
$$=y(x+1)+(x+1)^2$$
$$=(x+1)(y+x+1)$$
$$=\boldsymbol{(x+1)(x+y+1)}$$

(6)

$$x^2+ab-ax-bx$$
$$=x(x-a)-b(x-a)$$
$$=\boldsymbol{(x-a)(x-b)}$$

(7)

$$a^2-ab-bc+ac$$
$$=c(a-b)+(a^2-ab)$$
$$=c(a-b)+a(a-b)$$
$$=\boldsymbol{(a-b)(a+c)}$$

(8)

$$2ab^2-3ab-2a+b-2$$
$$=a(2b^2-3b-2)+b-2$$
$$=a(b-2)(2b+1)+(b-2)$$
$$=(b-2)\{a(2b+1)+1\}$$
$$=\boldsymbol{(b-2)(2ab+a+1)}$$

(9)

$$ab-ac-b^2+2bc-c^2$$
$$=(ab-ac)-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a(b-c)-(b-c)^2 \quad [b-c=A \text{ とおく}]$$
$$=aA-A^2$$
$$=A(a-A) \quad [A \text{ をもとにもどす}]$$
$$=(b-c)\{a-(b-c)\}$$
$$=\boldsymbol{(b-c)(a-b+c)}$$

【8】(1)
$$\begin{aligned}&5x(2x-1)-3(2x-1)^2\\=&(2x-1)(5x-6x+3)\quad［(2x-1)\text{ でくくった}］\\=&(2x-1)(-x+3)\\=&\boldsymbol{-2x^2+7x-3}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&2(x-2)^2-3(x-2)(x-6)\\=&(x-2)(2x-4-3x+18)\quad［(x-2)\text{ でくくった}］\\=&(x-2)(-x+14)\\=&\boldsymbol{-x^2+16x-28}\end{aligned}$$

(3) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100+1$ より，10000 から 200 を引いて 1 を加えればよい．よって，**9801**

(4) $1001^2-999^2=(1001+999)(1001-999)=2000\times2=\mathbf{4000}$

(5) $512^2-488^2=(512+488)(512-488)=1000\times24=\mathbf{24000}$

(6)
$$\begin{aligned}\frac{50^2+53^2-47^2}{2\times50\times53}&=\frac{50^2+(53+47)\times(53-47)}{2\times50\times53}\\&=\frac{50^2+100\times6}{2\times50\times53}\\&=\frac{50+12}{2\times53}\\&=\mathbf{\frac{31}{53}}\end{aligned}$$

(7) $12345678=a$ とおくと，与えられた式は
$12345678^2-12345677\times12345679=a^2-(a-1)(a+1)=a^2-a^2+1=\mathbf{1}$

(8) $9876=a$ とおくと，与えられた式は
$$\begin{aligned}&9876\times9876-9875\times9877+9878\times9879-9877\times9880\\&=a^2-(a-1)(a+1)+(a+2)(a+3)-(a+1)(a+4)\\&=a^2-(a^2-1)+(a^2+5a+6)-(a^2+5a+4)\\&=a^2-a^2+1+a^2+5a+6-a^2-5a-4=\mathbf{3}\end{aligned}$$

【9】(1)

$$\begin{aligned} & xy - x - y^2 + 1 \\ =& x(y-1) - (y^2-1) \\ =& x(y-1) - (y+1)(y-1) \\ =& \boldsymbol{(y-1)(x-y-1)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & xy + y^2 + x + 2y + 1 \\ =& x(y+1) + (y^2+2y+1) \\ =& x(y+1) + (y+1)^2 \\ =& \boldsymbol{(y+1)(x+y+1)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2yz + 2zx - 2xy \\ =& 2z(x-y) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ =& 2z(x-y) + (x-y)^2 \\ =& (x-y)(2z + x - y) \\ =& \boldsymbol{(x-y)(x-y+2z)} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & a^2bc + ab^2c + ab^2 + a^2b \\ =& ab\{c(a+b) + (a+b)\} \\ =& ab\{(c+1)(a+b)\} \\ =& \boldsymbol{ab(a+b)(c+1)} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} & a^2bc + abd + bc - ab^2 - ac^2 - cd \\ =& d(ab-c) + a^2bc + bc - ab^2 - ac^2 \\ =& d(ab-c) + (a^2bc - ac^2) + (bc - ab^2) \\ =& d(ab-c) + ac(ab-c) - b(ab-c) \\ =& (ab-c)(d + ac - b) \\ =& \boldsymbol{(ab-c)(ac-b+d)} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} & 6a^2b^2 + 4a^2b - 6ab^2 - 4ab \\ =& 2ab(3ab + 2a - 3b - 2) \\ =& 2ab\{3b(a-1) + 2(a-1)\} \\ =& 2ab\{(3b+2)(a-1)\} \\ =& \boldsymbol{2ab(a-1)(3b+2)} \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z \\ =& x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) + x + y - z \\ =& x^2 - (y-z)^2 + x + y - z \\ =& \{x + (y-z)\}\{x - (y-z)\} + x + y - z \\ =& (x+y-z)(x-y+z) + (x+y-z) \\ =& \boldsymbol{(x+y-z)(x-y+z+1)} \end{aligned}$$

【10】1 つの文字について整理し，文字係数のたすきがけを行う

(1) $x^2 + (3y+2)x + (y-1)(2y+3) = \boldsymbol{(x+y-1)(x+2y+3)}$

1	╳	$y-1$ →	$y-1$
1		$2y+3$ →	$2y+3$
1		$(y-1)(2y+3)$	$3y+2$

(2) $a^2+3ab+4a+2b^2+5b+3=a^2+(3b+4)a+(2b^2+5b+3)$

$=a^2+(3b+4)a+(b+1)(2b+3)=\boldsymbol{(a+b+1)(a+2b+3)}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & b+1 & \longrightarrow\ b+1 \\ 1 & & 2b+3 & \longrightarrow\ 2b+3 \\ \hline 1 & & (b+1)(2b+3) & \quad 3b+4 \end{array}$$

(3) $x^2-2y^2-xy-3x+3y+2$

$=x^2-(y+3)x-(2y^2-3y-2)$

$=x^2-(y+3)x-(y-2)(2y+1)$

$=\boldsymbol{(x+y-2)(x-2y-1)}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & y-2 & \longrightarrow\ y-2 \\ 1 & & -(2y+1) & \longrightarrow\ -2y-1 \\ \hline 1 & & -(y-2)(2y+1) & \quad -y-3 \end{array}$$

(4) $2x^2+5xy+3y^2-x-3y-6$

$=2x^2+(5y-1)x+(3y^2-3y-6)$

$=2x^2+(5y-1)x+3(y+1)(y-2)$

$=\boldsymbol{(x+y-2)(2x+3y+3)}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & y-2 & \longrightarrow\ 2y-4 \\ 2 & & 3(y+1) & \longrightarrow\ 3y+3 \\ \hline 2 & & 3(y+1)(y-2) & \quad 5y-1 \end{array}$$

【11】(1) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=\boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

(2) ① $x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2$

$=\left(x^2+4\right)^2-(2x)^2$

$=\boldsymbol{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$

② $4x^4-13x^2y^2+y^4=4x^4-4x^2y^2+y^4-9x^2y^2$

$=\left(2x^2-y^2\right)^2-(3xy)^2$

$=\boldsymbol{(2x^2+3xy-y^2)(2x^2-3xy-y^2)}$

③ $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2$

$=\boldsymbol{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}$

添削課題

【1】(1)

$x^2-2xy+y^2-z^2$

$=(x-y)^2-z^2$

$=\{(x-y)+z\}\{(x-y)-z\}$

$=\boldsymbol{(x-y+z)(x-y-z)}$

(2)

$x^2-2xy+y^2+x-y-6$

$=(x^2-2xy+y^2)+x-y-6$

$=(x-y)^2+(x-y)-6$　［$x-y=A$ とおく］

$=A^2+A-6$

$=(A+3)(A-2)$　［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y+3)(x-y-2)}$

(3)

$a^2-10ab+25b^2+7a-35b+12$

$=(a-5b)^2+7(a-5b)+12$　［$a-5b=A$ とおく］

$=A^2+7A+12$

$=(A+3)(A+4)$　［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(a-5b+3)(a-5b+4)}$

(4)

x^2-y^2+6y-9

$=x^2-(y^2-6y+9)$

$=x^2-(y-3)^2$　［$y-3=A$ とおく］

$=x^2-A^2$

$=(x+A)(x-A)$　［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x+y-3)(x-y+3)}$

(5)

$4x^2-y^2-2y-1$

$=4x^2-(y^2+2y+1)$

$=4x^2-(y+1)^2$　［$2x=A,\ y+1=B$ とおく］

$=A^2-B^2$

$=(A+B)(A-B)$　［$A,\ B$ をもとに戻す］

$=\boldsymbol{(2x+y+1)(2x-y-1)}$

(6) $9a^2-4b^2+4bc-c^2$

$=(3a)^2-(4b^2-4bc+c^2)$

$=(3a)^2-(2b-c)^2$ ［$3a=A,\ 2b-c=B$ とおく］

$=A^2-B^2$

$=(A+B)(A-B)$ ［$A,\ B$ をもとに戻す］

$=\{3a+(2b-c)\}\{3a-(2b-c)\}$

$=\boldsymbol{(3a+2b-c)(3a-2b+c)}$

【2】(1) $-12x^2+3y^2=-3(4x^2-y^2)=\boldsymbol{-3(2x+y)(2x-y)}$

<別解>

与式 $=3(y^2-4x^2)=\boldsymbol{3(y+2x)(y-2x)}=\boldsymbol{3(2x+y)(-2x+y)}$ でもよい

(2) $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=\boldsymbol{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$

(3) $(a^2-4a+2)(a^2-4a-11)-14$ ［$a^2-4a=A$ とおく］

$=(A+2)(A-11)-14$

$=A^2-9A-22-14$

$=A^2-9A-36$

$=(A+3)(A-12)$ ［A をもとにもどす］

$=(a^2-4a+3)(a^2-4a-12)$

$=\boldsymbol{(a-1)(a-3)(a+2)(a-6)}$

(4) $1-x^2+y^2-x^2y^2$

$=(1-x^2)+y^2(1-x^2)$

$=(1-x^2)(1+y^2)$

$=\boldsymbol{(1+x)(1-x)(1+y^2)}$

【3】(1) $3xy-x-6y+2$

$=x(3y-1)-2(3y-1)$

$=\boldsymbol{(3y-1)(x-2)}$

(2) $a^2-ab+4a-2b+4$

$=-b(a+2)+a^2+4a+4$

$=-b(a+2)+(a+2)^2$

$=\boldsymbol{(a+2)(a-b+2)}$

(3)

$$x^2-2xy+5x-4y+6$$
$$=-2xy-4y+x^2+5x+6$$
$$=-2y(x+2)+(x+2)(x+3)$$ ［$x+2=A$ とおく］
$$=-2yA+A(x+3)$$
$$=(-2y+x+3)A$$ ［A をもとにもどす］
$$=(x-2y+3)(x+2)$$

(4)

$$2a^2-6ab-12+5a+9b$$
$$=-6ab+9b+2a^2+5a-12$$ ［$2a^2+5a-12$ をたすきがけで分解］
$$=-3b(2a-3)+(a+4)(2a-3)$$ ［$2a-3=A$ とおく］
$$=-3bA+(a+4)A$$
$$=(-3b+a+4)A$$ ［A をもとにもどす］
$$=(a-3b+4)(2a-3)$$

(5)

$$ab^2-(a+c)b+c$$
$$=ab^2-ab-bc+c$$
$$=ab(b-1)-c(b-1)$$
$$=\boldsymbol{(ab-c)(b-1)}$$

(6)

$$x^4+36y^2-9x^2-4x^2y^2$$
$$=x^4-9x^2-4x^2y^2+36y^2$$
$$=x^2(x^2-9)-4y^2(x^2-9)$$ ［$x^2-9=A$ とおく］
$$=x^2A-4y^2A$$
$$=(x^2-4y^2)A$$ ［A をもとにもどす］
$$=(x^2-4y^2)(x^2-9)$$
$$=(x+2y)(x-2y)(x+3)(x-3)$$

(7)

$$x^2y+2xy^2-5xy-3x^2+2y^2-3x-6y$$ ［x で整理］
$$=(y-3)x^2+(2y^2-5y-3)x+2y^2-6y$$ ［$2y^2-5y-3$ をたすきがけで分解］
$$=(y-3)x^2+(y-3)(2y+1)x+2y(y-3)$$ ［$y-3=A$ とおく］
$$=Ax^2+A(2y+1)x+2yA$$
$$=\{x^2+(2y+1)x+2y\}A$$ ［A をもとにもどす］
$$=\{x^2+(2y+1)x+2y\}(y-3)$$
$$=(x+2y)(x+1)(y-3)$$

【4】(1)

$$
\begin{aligned}
&97 \times 63 + 9 \times 7 \times 3 \\
=&97 \times 63 + 63 \times 3 \\
=&(97 + 3) \times 63 \\
=&100 \times 63 \\
=&\mathbf{6300}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&283^2 - 217^2 \\
=&(283 + 217)(283 - 217) \\
=&500 \times 66 \\
=&\mathbf{33000}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{134^2 + 135^2 - 133^2}{2 \times 134 \times 135} &= \frac{134^2 + (135 + 133)(135 - 133)}{2 \times 134 \times 135} \\
&= \frac{134^2 + 2 \times 134 \times 2}{2 \times 134 \times 135} \\
&= \frac{134 + 4}{2 \times 135} = \frac{138}{2 \times 135} \\
&= \frac{69}{135} \\
&= \mathbf{\frac{23}{45}}
\end{aligned}
$$

小テスト

【1】(1) $(\boldsymbol{x+3})(\boldsymbol{x-3})$

(2) $(\boldsymbol{x-y})(\boldsymbol{x-3y})$

(3) $(\boldsymbol{m+2})(\boldsymbol{m-5})$

(4) $(\boldsymbol{y+4})(\boldsymbol{y-14})$

(5) $(\boldsymbol{p+16})(\boldsymbol{p-3})$

(6) $(\boldsymbol{a+8b})(\boldsymbol{a-4b})$

(7) $(\boldsymbol{7x-3y})^{\boldsymbol{2}}$

(8) $(\boldsymbol{n+10})(\boldsymbol{n-12})$

(9) $(\boldsymbol{p+6q})(\boldsymbol{p-12q})$

(10) $(\boldsymbol{2x+7y})^{\boldsymbol{2}}$

９章　相似（１）

問題

【1】△ JKL と△ QPR において,

$$\mathrm{JK : QP = KL : PR = LJ : RQ (= 2 : 3)}$$

3 組の辺の比が等しいから,

△ JKL∽ △ QPR（3 辺比相等）

△ GHI と△ ONM において,

$$\mathrm{GI : OM = HI : NM (= 7 : 5)}$$

$$\angle \mathrm{GIH} = \angle \mathrm{OMN}$$

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから,

△ GHI∽ △ ONM（2 辺比夾角相等）

△ DEF と△ TSU において,

$\angle \mathrm{D} = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$ より, $\angle \mathrm{D} = \angle \mathrm{T}$

$\angle \mathrm{F} = \angle \mathrm{U}$

2 組の角がそれぞれ等しいから,

△ DEF∽ △ TSU（2 角相等）

【2】(1) $6 : x = 18 : 15$ より,

$$18x = 6 \times 15$$

$$18x = 90$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

(2) $x : 8 = 14 : 12$ より,

$$12x = 14 \times 8$$

$$12x = 112$$

$$\boldsymbol{x = \frac{28}{3}}$$

(3) $9 : 4 = x : 6$ より,

$$4x = 9 \times 6$$

$$4x = 54$$

$$\boldsymbol{x = \frac{27}{2}}$$

(4) $x : 9 = 15 : y = 10 : 7.5 = 4 : 3$

$x : 9 = 4 : 3$ より,

$$3x = 9 \times 4$$

$$\boldsymbol{x = 12}$$

$15 : y = 4 : 3$ より,

$$4y = 15 \times 3$$

$$\boldsymbol{y = \frac{45}{4}}$$

(5) $4 : x = 6 : y = 18 : 15 = 6 : 5$

$4 : x = 6 : 5$ より，

$$6x = 4 \times 5$$

$$\boldsymbol{x = \frac{10}{3}}$$

$6 : y = 6 : 5$ より，$\boldsymbol{y = 5}$

(6) $6 : x = 8 : (x + y) = 4 : 3$

$6 : x = 4 : 3$ より，

$$4x = 6 \times 3$$

$$\boldsymbol{x = \frac{9}{2}}$$

$8 : (x + y) = 4 : 3$ に $x = \frac{9}{2}$ を代入して，

$$8 : \left(\frac{9}{2} + y\right) = 4 : 3$$

$$4 \times \left(\frac{9}{2} + y\right) = 8 \times 3$$

$$18 + 4y = 24$$

$$4y = 6$$

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{2}}$$

【3】(1) $\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{AC} : \mathrm{A'C'}$ より，

$$10 : 5 = x : 4$$

$$5x = 40$$

$$\boldsymbol{x = 8}$$

同様に，$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'}$ より，

$$10 : 5 = 12 : y$$

$$10y = 60$$

$$\boldsymbol{y = 6}$$

(2) 相似な図形の対応する角はそれぞれ等しいので，$\boldsymbol{x = 63(^\circ)}$

$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{AC} : \mathrm{A'C'}$ より，

$$4 : y = 6 : 8$$

$$6y = 32$$

$$\boldsymbol{y = \frac{16}{3}}$$

(3) $\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'}$ より，

$$x : 12 = 4 : 9$$

$$9x = 48$$

$$\boldsymbol{x = \frac{16}{3}}$$

相似な図形の対応する角はそれぞれ等しいので，$\angle\mathrm{B'} = \angle\mathrm{B} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{C'} = \angle\mathrm{C} = 55^\circ$

よって，$y = 180 - (60 + 55) = \boldsymbol{65(^\circ)}$

【4】 $\triangle$ ABD∽ $\triangle$ CBA∽ $\triangle$ CAD

【5】(1) AB // ED より，2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle$ ABC∽ $\triangle$ DEC

よって，対応する辺の比は等しいから，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}:\mathrm{DE} &= \mathrm{AC}:\mathrm{DC} \\ 15:5 &= 9:x \\ 15x &= 45 \\ x &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

(2) 2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle$ AED∽ $\triangle$ ACB

よって，対応する辺の比は等しいから，

$$\begin{aligned} \mathrm{ED}:\mathrm{CB} &= \mathrm{AE}:\mathrm{AC} \\ x:5 &= (7-3):6 = 2:3 \\ 3x &= 10 \\ x &= \mathbf{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

(3) 2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle$ DBA∽ $\triangle$ EBF

よって，対応する辺の比は等しいから，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}:\mathrm{FB} &= \mathrm{AD}:\mathrm{FE} \\ (x+4):5 &= 6:3 = 2:1 \\ x+4 &= 10 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle$ ABC∽ $\triangle$ EBF

よって，対応する辺の比は等しいから，

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}:\mathrm{BF} &= \mathrm{AB}:\mathrm{EB} \\ (y+5):5 &= (x+4):4 \\ (y+5):5 &= (6+4):4 = 5:2 \\ 2y+10 &= 25 \\ 2y &= 15 \\ y &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle$ DBA∽ $\triangle$ ABC

よって，対応する辺の比は等しいから，

$$\begin{aligned} \mathrm{DA}:\mathrm{AC} &= \mathrm{AB}:\mathrm{CB} \\ 6:z &= (x+4):(y+5) \\ 6:z &= (6+4):\left(\frac{15}{2}+5\right) = 4:5 \end{aligned}$$

$$4z = 30$$

$$z = \frac{15}{2}$$

以上より,

$$\boldsymbol{x = 6,\ y = \frac{15}{2},\ z = \frac{15}{2}}$$

(4) $\angle$A 共通, $\angle$ADB $=$ $\angle$AEC $= 90^\circ$ より, 2 組の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle$ ABD∽ $\triangle$ ACE

よって, 対応する辺の比は等しいから,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AE}$$

$$(x+3) : (4+5) = 4 : 3$$

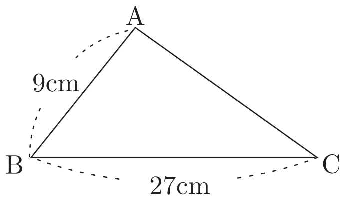
$$(x+3) : 9 = 4 : 3$$

$$3(x+3) = 36$$

$$x + 3 = 12$$

$$x = \mathbf{9}$$

【6】(1) $\triangle$ ABC と $\triangle$ DBA において,



AB : DB $= 9 : 3 = 3 : 1$

BC : BA $= 27 : 9 = 3 : 1$

$\angle$B は共通

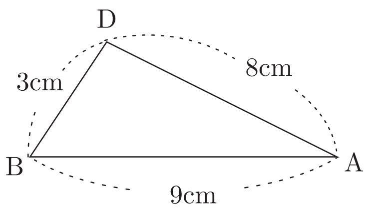
2 組の辺の比が等しくその間の角が等しいから,

$\triangle$ ABC∽ $\triangle$ DBA

よって, $\triangle$ ABC と相似な図形は,

$\triangle$ **DBA**

(2) (1) より, $\triangle$ ABC∽ $\triangle$ DBA だから,



対応する辺の比は等しいことより,

AC : DA $= 3 : 1$

AC : 8 $= 3 : 1$

AC $=$ **24(cm)**

【7】(1) $\triangle$ FDB と $\triangle$ EFC において,

$\angle$B $=$ $\angle$C $= 60^\circ$ ……①

$\angle$CFD $=$ $\angle$B $+$ $\angle$FDB $= 60^\circ +$ $\angle$FDB　［外角と内対角の関係］

一方, $\angle$CFD $= 60^\circ +$ $\angle$EFC

したがって, $\angle$FDB $=$ $\angle$EFC ……②

①, ② より, 2 組の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle$ FDB∽ $\triangle$ EFC　(証明終)

(2) 正三角形の一辺の長さは,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DB} = \mathrm{DF} + \mathrm{DB} = 15(\mathrm{cm})$$

AE $= x$cm とおくと, FE $= x$cm , FC $=$ BC $-$ BF $= 15 - 3 = 12$(cm)

(1) より,

$$\mathrm{BD} : \mathrm{CF} = \mathrm{DF} : \mathrm{FE}$$
$$8 : 12 = 7 : x$$
$$x = 10.5$$
$$\therefore\ \mathrm{AE} = \mathbf{10.5(cm)}$$

【8】△ ABD∽ △ ADE より

$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ADE} \cdots\cdots ①$$
$$\angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{EAD} \cdots\cdots ②$$

外角の定理より

$$\angle\mathrm{ABD} + \angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{ADC}$$
$$= \angle\mathrm{ADE} + \angle\mathrm{EDC}$$

① より, ∠DAB=∠EDC

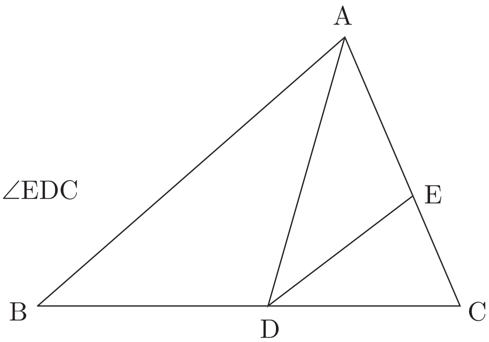
②より, ∠DAB=∠DAC なので

$$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{EDC}$$

これと ∠C 共通だから,

2 組の角がそれぞれ等しいので

△ ADC∽ △ DEC　（証明終）



【9】△ ABE と△ ACD において，

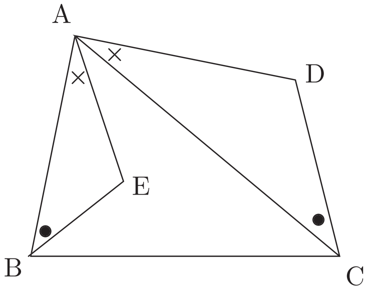
仮定より，

$\angle ABE = \angle ACD$

$\angle BAE = \angle CAD$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

△ ABE∽ △ ACD



対応する辺の比は等しいから，

AB : AC = AE : AD

ゆえに，$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$ ……①

△ AED と△ ABC において，

仮定より，

$\angle BAE = \angle CAD$

$\angle EAC$ は共通

ゆえに，$\angle EAD = \angle BAC$ ……②

① を変形して，

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ より，2 組の辺の比が等しくその間の角が等しいから，

△ AED∽ △ ABC　（証明終）

【10】△ ABC∽ △ ADB より

$\angle BCA = \angle DBA = x$ とおく

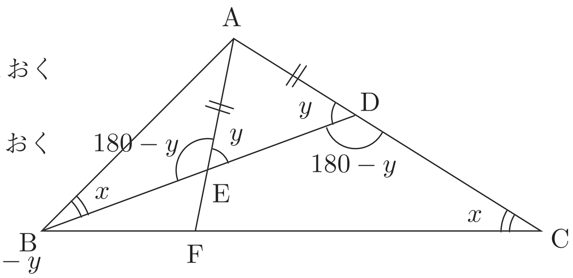
一方，AD = AE より

$\angle ADE = \angle AED = y$ とおく

△ ABE と△ BCD において

$\angle ABE = \angle BCD = x$

$\angle BEA = \angle CDB = 180 - y$



よって，2 つの角がそれぞれ等しいので，

△ ABE∽ △ BCD　（証明終）

【11】(1) $\triangle$ ABC と $\triangle$ HBA において，

仮定より，

$$\angle BAC = \angle BHA = 90^\circ$$
$$\angle ABC = \angle HBA \text{（共通）}$$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

$$\triangle ABC \backsim \triangle HBA \cdots\cdots ①$$

$\triangle$ ABC と $\triangle$ HAC において，

同様にして，

$$\triangle ABC \backsim \triangle HAC \cdots\cdots ②$$

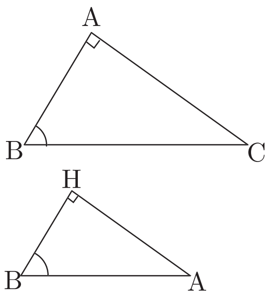
①，② より，

$$\triangle ABC \backsim \triangle HBA \backsim \triangle HAC$$ （証明終）

(2) ① より，$\triangle ABC \backsim \triangle HBA$ だから，

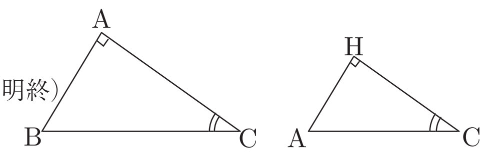
対応する辺の比は等しいことより，

$$AB : HB = BC : BA$$
$$AB^2 = BH \times BC$$ （証明終）



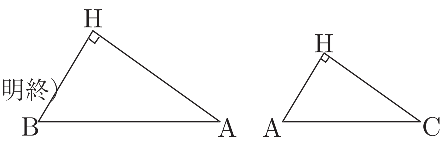
(3) ② より，$\triangle ABC \backsim \triangle HAC$ だから，対応する辺の比は等しいことより，

$$AC : HC = BC : AC$$
$$AC^2 = CH \times CB$$ （証明終）



(4) (1) の結論より，$\triangle HBA \backsim \triangle HAC$ だから，対応する辺の比は等しいことより，

$$AH : CH = HB : HA$$
$$AH^2 = HB \times HC$$ （証明終）



【12】仮定 $CA = CE$ より,

$$\angle AEC = \angle EAC \cdots\cdots ①$$

同様に $CA = CD$ より,

$$\angle CAD = \angle CDA \cdots\cdots ②$$

一方, $\angle AEC + \angle EAC + \angle CAD + \angle CDA = 180^\circ$

なので, ①, ② より,

$$2(\angle EAC + \angle CAD) = 180^\circ$$

$$\therefore \angle EAC + \angle CAD = \angle DAE = 90^\circ \cdots\cdots ③$$

ここで,

$$\begin{aligned} \angle BAD &= \angle BAC - \angle DAC \\ &= 90^\circ - \angle DAC \quad [\because \text{仮定}] \\ &= \angle DAE - \angle DAC \quad [\because ③] \\ &= \angle CAE \\ &= \angle AEC \cdots\cdots ④ \quad [\because ①] \end{aligned}$$

$\triangle BAD$, $\triangle BEA$ において,

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle BEA \quad [\because ④] \\ \angle B \text{ は共通} \end{cases}$$

以上より 2 つの角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle BAD \backsim \triangle BEA$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいので,

$$AB : BD = BE : AB$$

$$\therefore AB^2 = BD \times BE \quad \text{(証明終)}$$

【13】(1) △ ABE と△ ECF において，

$\angle ABE = \angle ECF = 90°$ ……①

$\angle AEF = 90°$ だから，

$\angle AEB + \angle FEC = 90°$ ……②

一方，△ ABE において，

$\angle AEB + \angle EAB = 90°$ ……③

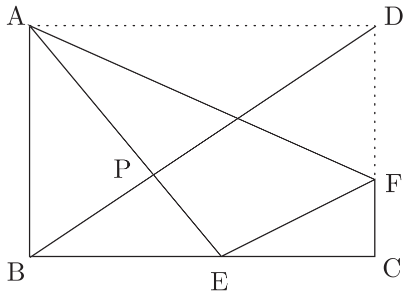
②，③ より，

$\angle EAB = \angle FEC$ ……④

①，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから，

△ ABE∽ △ ECF　（証明終）

(2) △ APD と△ EPB において，



AD // BC より，

$\angle DAP = \angle BEP$

対頂角は等しいから，

$\angle APD = \angle EPB$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

△ APD∽ △ EPB

対応する辺の比は等しいから，

$$\frac{PD}{PB} = \frac{AD}{EB}$$ ……①

また，△ AEF≡ △ ADF より，

AD = AE ……②

①，② より，

$$\frac{PD}{PB} = \frac{AE}{EB}$$ ……③

(1) の結論より，

△ ABE∽ △ ECF だから，

対応する辺の比は等しいので，

$$\frac{EF}{CF} = \frac{AE}{BE}$$ ……④

また，△ AEF≡ △ ADF より，

EF = DF ……⑤

④，⑤ より，

$$\frac{DF}{CF} = \frac{AE}{BE}$$ ……⑥

③，⑥ より，

$$\frac{PD}{PB} = \frac{FD}{FC}$$ （証明終）

添削課題

【1】(1) ∠A 共通，∠ACB=∠CDA= 90° より

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$

$\therefore AB : AC = AC : AD$

$5 : 4 = 4 : x$

$$\boldsymbol{x = \frac{16}{5}}$$

$AB : BC = AC : CD$

$5 : 3 = 4 : y$

$$\boldsymbol{y = \frac{12}{5}}$$

(2) ∠BAC=∠BCA かつ ∠ACD=∠ADC

および ∠BCA=∠ACD（共通）

より，$\triangle BAC \backsim \triangle ADC$

$BA : AC = AD : DC$

$12 : 4 = 4 : DC$

$$DC = \frac{4 \times 4}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = BC - DC = 12 - \frac{4}{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{x = \frac{32}{3}}$$

(3) ∠ABC=∠AED，∠A 共通より

$\triangle ABC \backsim \triangle AED$

$\therefore AB : BC = AE : ED$

$8 : 7 = 4 : x$

$$\boldsymbol{x = \frac{7}{2}}$$

$AB : AC = AE : AD$

$8 : 5 = 4 : AD$

$$AD = \frac{5}{2}$$

$$y = AB - AD = 8 - \frac{5}{2}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{11}{2}}$$

(4) ∠BAE=∠BCD，∠B 共通より

$\triangle ABE \backsim \triangle CBD$

$AB : BE = CB : BD$

$(x + 8) : 6 = 16 : 8$

$x + 8 = 12$

$\boldsymbol{x = 4}$

∠DAF=∠ECF，∠AFD=∠CFE より

$\triangle DAF \backsim \triangle ECF$

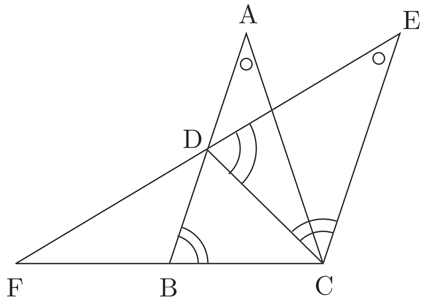
$AD : DF = CE : EF$

$4 : y = 10 : 4$

$$y = \frac{4 \times 4}{10}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{8}{5}}$$

【2】(1) $\triangle$ ADC と $\triangle$ ECF において，



$\triangle ABC \equiv \triangle EDC$

$\angle DAC = \angle CEF$ $\cdots$①

また，$\triangle$ ABC が二等辺三角形であることより，$\triangle$ EDC も二等辺三角形であるから

$\angle ABC = \angle EDC = \angle ECD = a$

とおくと，$\triangle$ CBD において，$\angle$ADC は外角だから

$\angle ADC = \angle DBC + \angle DCB$

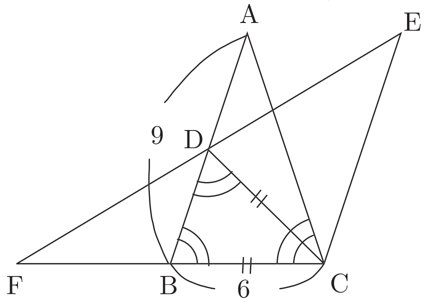
$= a + \angle DCB$ $\cdots$②

ここで，$\angle ECF = \angle ECD + \angle DCB = a + \angle DCB$ $\cdots$③

②, ③ より，$\angle ADC = \angle ECF$ $\cdots$④

①, ④ より，2 角がそれぞれ等しいから，$\triangle ADC \backsim \triangle ECF$ （証明終）

(2) $\triangle$ ABC で $AB = AC$ より



$\angle ABC = \angle ACB = a$ $\cdots$(ア)

$\triangle$ CDB で $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$ より，

$BC = DC$

よって, $\triangle$ CDB は二等辺三角形だから

$\angle CBD = \angle CDB = a$ $\cdots$(イ)

(ア)，(イ) より，2 角がそれぞれ等しいといえるから，

$\triangle CDB \backsim \triangle ABC$．これより

$DB : BC = CD : AB$

$DB : 6 = 6 : 9$

$BD = \dfrac{36}{9} = \mathbf{4\ (cm)}$

(3) $EC = AC = 9$ (cm)

(2) より，$AD = AB - BD = 5$ (cm)

(1) で，$\triangle ADC \backsim \triangle ECF$ より

$AC : EF = AD : EC$

$9 : EF = 5 : 9$

$EF = \dfrac{81}{5}$ (cm)

$ED = EC = 9$ (cm) だから

$FD : DE = (EF - ED) : DE$

$= \left(\dfrac{81}{5} - 9\right) : 9 = \dfrac{36}{5} : 9 = \mathbf{4 : 5}$

小テスト

【1】(1) $(\boldsymbol{x+y})(\boldsymbol{x-z})$

(2) $(\boldsymbol{3a+b-1})(\boldsymbol{3a-b-1})$

(3) $(\boldsymbol{a+2})(\boldsymbol{a-2})(\boldsymbol{a+3})(\boldsymbol{a-3})$

(4) $(\boldsymbol{a-2c})(\boldsymbol{a-b+2c})$

(5) $(\boldsymbol{x^2-2x-5})(\boldsymbol{x^2-2x-6})$

１０章　相似（２）

問題

【1】(1) DE // BC だから

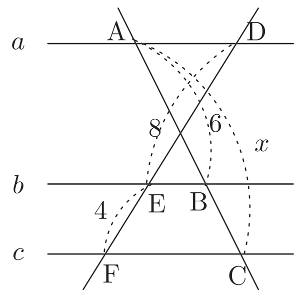
$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$
$$\frac{x}{x+20}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$
$$3x=x+20$$
$$2x=20$$
$$x=\mathbf{10}$$

(2) DE // BC だから,

$$\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{BC}$$
$$\frac{12-x}{x}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$
$$3(12-x)=x$$
$$36-3x=x$$
$$-4x=-36$$
$$x=\mathbf{9}$$

(3) a // b // c だから,

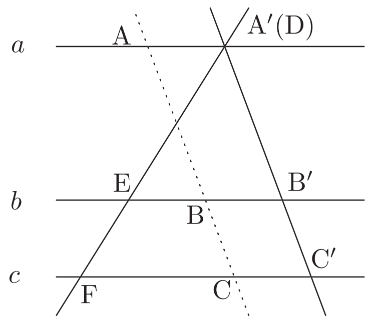
$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$
$$\frac{6}{x-6}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$$
$$6=2(x-6)$$
$$6=2x-12$$
$$-2x=-18$$
$$x=\mathbf{9}$$



＜別解＞

a // b // c だから,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$$
$$\frac{6}{x}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$
$$18=2x$$
$$x=\mathbf{9}$$

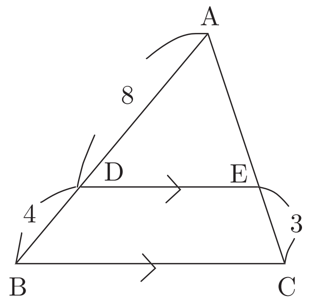


【2】(1) BC // DE だから,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{AE}{3} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

$$AE = \mathbf{6\ (cm)}$$

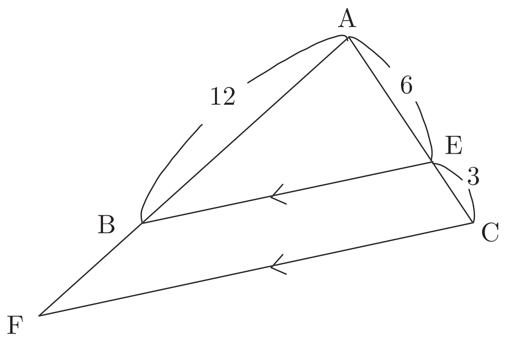


(2) BE // FC だから, (1) より,

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{12}{BF} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

$$BF = \mathbf{6\ (cm)}$$



【3】AB // CD より,

$AE : DE = AB : DC = 6 : 9 = 2 : 3$

したがって,

$DE : DA = 3 : (3 + 2) = 3 : 5$

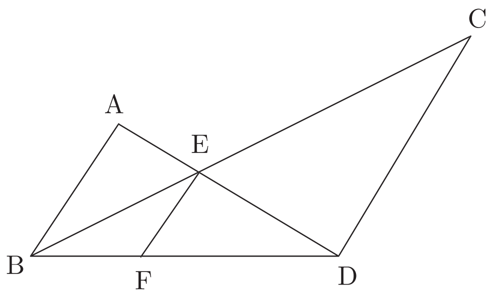
ここで,

AB // EF より,

$EF : AB = DE : DA = 3 : 5$

よって,

$EF : 6 = 3 : 5$ より, $EF = \mathbf{\frac{18}{5}}$ **(cm)**



【4】(1) △PAQ∽△PCB より，$AQ : CB = AP : CP = 2 : 3$

ここで，四角形 ABCD は平行四辺形より，$AD = BC$ だから，

$AQ : QD = AQ : (AD - AQ) = 2 : (3 - 2) = \mathbf{2 : 1}$

(2) △RQD∽△RBC だから，(1) より，

$RD : RC = QD : BC = QD : AD = 1 : 3$

よって，$RD : DC = RD : (RC - RD) = 1 : (3 - 1) = \mathbf{1 : 2}$

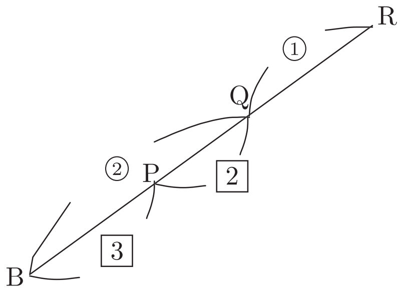
[△RQD∽△BQA を用いてもよい]

(3) (1) より，$BP : PQ = BC : AQ = 3 : 2$

(2) より，$BQ : QR = CD : DR = 2 : 1$

よって，

$$BP : PQ : QR = 3 : 2 : \frac{3+2}{2} = \mathbf{6 : 4 : 5}$$



【5】BQ の延長と，BC に平行で A を通る直線との交点を D とする．

△ARD∽△PRB より

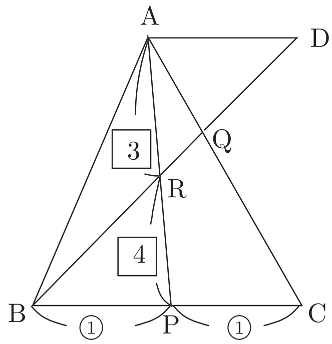
$AD : PB = AR : PR = 3 : 4$

よって，

$AD : BC = 3 : (4 + 4) = 3 : 8$

ここで，△ADQ∽△CBQ なので

$AQ : CQ = AD : CB = \mathbf{3 : 8}$



＜別解＞

P を通り，BQ に平行な直線をひき，A と C の交点を D とすると，BQ // PD より，

$QD : DC = BP : PC = 1 : 1$

$AQ : QD = AR : RP = 3 : 4$

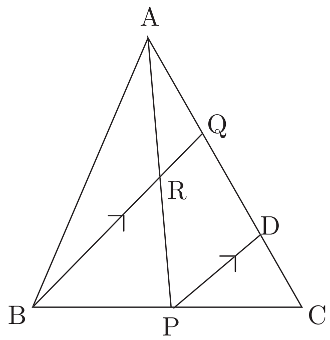
であるから，

	QD : DC =	1 : 1
AQ :	QD =	3 : 4
AQ :	QD : DC =	3 : 4 : 4

よって，

$AQ : QC = AQ : (QD + DC)$

$= 3 : (4 + 4) = \mathbf{3 : 8}$



【6】AC // EF だから，

$\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{BF}{FC}$ ……①

AD // EG だから，

$\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{BG}{GD}$ ……②

①，②より，

$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BG}{GD}$

よって，

FG // CD　（証明終）

【7】(1) AE : EC = 2 : 3 より，

AE : AC = 2 : (2 + 3) = 2 : 5 だから，

$AE : 18 = 2 : 5$

$5AE = 36$

$AE = \dfrac{36}{5}$ ……①

PE // BA だから，

$\dfrac{PE}{BA}=\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{PE}{24}=\dfrac{3}{5}$

$PE=\dfrac{72}{5}$ ……②

いま，四角形 ADPE において，DA // PE，PD // EA だから，四角形 ADPE は平行四辺形.

よって，求める四角形 ADPE の周の長さは，①，②より，

$$\begin{aligned}2(AE+PE) &= 2\times\left(\frac{36}{5}+\frac{72}{5}\right)\\ &= 2\times\frac{108}{5}\\ &= \mathbf{\frac{216}{5}\ (cm)}\end{aligned}$$

(2) PE // BA だから，

$\dfrac{CP}{CB}=\dfrac{CE}{CA}$

$\dfrac{CP}{20}=\dfrac{3}{5}$

$CP = 12$

(1) より，四角形 ADPE は平行四辺形だから，

AE = DP

ゆえに，DP : EC = AE : EC = 2 : 3

PD // CA だから，

$$\begin{aligned}\frac{QP}{QC} &= \frac{DP}{EC}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

ゆえに，QP : QC = 2 : 3 だから，

QP : PC = 2 : (3 − 2) = 2 : 1

PC $=12$ (cm) より，

$QP : 12 = 2 : 1$

$QP = 24$

よって，

$$\begin{aligned} BQ &= QC - BC \\ &= (QP + PC) - BC \\ &= (24 + 12) - 20 \\ &= \mathbf{16\ (cm)} \end{aligned}$$

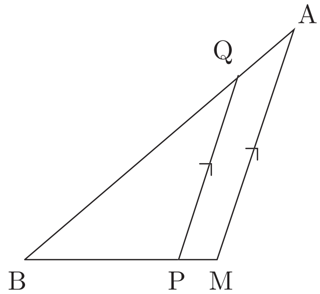
【8】(1) M は BC の中点だから，

$BM = MC = \frac{1}{2}BC = 10$

PQ // MA だから，

$\frac{PQ}{MA} = \frac{BP}{BM} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

よって，$PQ : AM = \mathbf{4 : 5}$



(2) $BM = 10$ (cm)，$BP = 8$ (cm) だから，

$$\begin{aligned} PM &= BM - BP \\ &= 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

PR // MA だから，

$\frac{MA}{PR} = \frac{CM}{CP} = \frac{10}{10+2} = \frac{5}{6}$

$\frac{12}{PR} = \frac{5}{6}$

$PR = \frac{72}{5}$

(1) より，$PQ : MA = 4 : 5$ だから，

$PQ : 12 = 4 : 5$

$5PQ = 48$

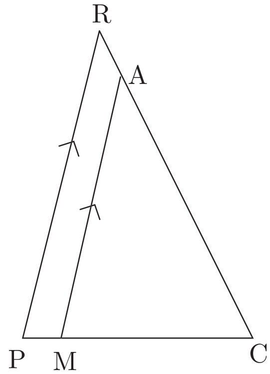
$PQ = \frac{48}{5}$

ゆえに，$RQ = PR - PQ = \frac{72}{5} - \frac{48}{5} = \frac{24}{5}$

よって，

$PQ : QR = \frac{48}{5} : \frac{24}{5} = 2 : 1$

$PQ : QR = \mathbf{2 : 1}$



(3) PR // MA だから，

$CR : RA = CP : PM = 12 : 2 = 6 : 1$

すなわち，$CR : RA = \mathbf{6 : 1}$

(4) $\mathrm{BP}=x$ (cm) とする.

QP // AM だから,

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MA}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BM}}=\frac{x}{10}$$

$$\frac{\mathrm{PQ}}{12}=\frac{x}{10}$$

$$\mathrm{PQ}=\frac{6}{5}x$$

また,

$$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{MA}}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{MC}}=\frac{20-x}{10}$$

$$\frac{\mathrm{PR}}{12}=\frac{20-x}{10}$$

$$\mathrm{PR}=\frac{6}{5}(20-x)$$

ここで, $\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}=\frac{6}{5}x+\frac{6}{5}(20-x)=24$ ……① .

P が M または B にあるとき,

$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}=2\mathrm{AM}=24$ …②

①, ②より, 点 P が線分 BM 上のどこにあっても,

$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}=24(\mathrm{cm})$ (一定) (証明終)

【9】(1) ① △ABC, △APQ において, PQ // BC より, 錯角が等しいので

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{APQ}$

$\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{PQA}$

2 つの角がそれぞれ等しいので,

△ABC ∽ △APQ

相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので,

AP : AB = AQ : AC = PQ : BC (証明終)

② AP : AB = AQ : AC より,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}$$

両辺の逆数をとって,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}$$

両辺に 1 を加えると,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}}+1=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}+1$$

$$\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AP}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{AQ}}{\mathrm{AQ}}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}}$$

よって,

AP : PB = AQ : QC (証明終)

(2) ① $\triangle$ APQ, $\triangle$ ABC において，

仮定より AP : AB = AQ : AC

対頂角は等しいので，$\angle PAQ = \angle BAC$

以上より，2 辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle APQ \backsim \triangle ABC$

相似な図形の対応する角の大きさは等しいので，$\angle APQ = \angle ABC$

これから錯角が等しくなるので，PQ // BC　（証明終）

② AP : PB = AQ : QC より，

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

両辺の逆数をとって，

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ}$$

$$\frac{AP + AB}{AP} = \frac{AQ + AC}{AQ}$$

$$1 + \frac{AB}{AP} = 1 + \frac{AC}{AQ}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

すなわち，AB : AP = AC : AQ（AP : AB = AQ : AC）

よって，① で証明したことから，PQ // BC　（証明終）

【10】仮定より，$\angle BAD = \angle CAD \cdots$ ①

また，AD // QR より

$\angle ARQ = \angle BAD$(錯角) $\cdots$ ②

$\angle AQR = \angle CAD$(同位角) $\cdots$ ③

ここで C を通り AB に平行な直線を引き，

RP の延長との交点を E とすると AR//EC

より，

$\angle ARQ = \angle CEP \cdots$ ④

①〜④ より

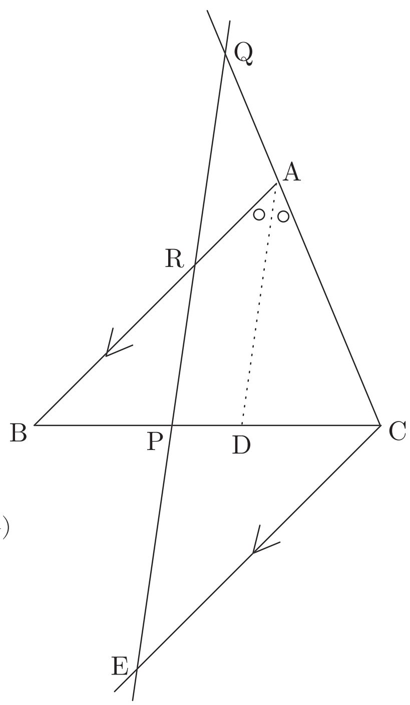
$\angle CQE = \angle QEC$

$\therefore CQ = CE \cdots$ ⑤

さらに，BR//EC より，

BP : PC = BR : CE

= BR : CQ　［⑤より］　（証明終）



添削課題

【1】CD // EF より，AE : EC = AF : FD = 2 : 1

DE // BC より

$AD : DB = AE : EC$

$(4+2) : DB = 2 : 1$

$BD = \frac{1}{2} \times 6 = \mathbf{3}$

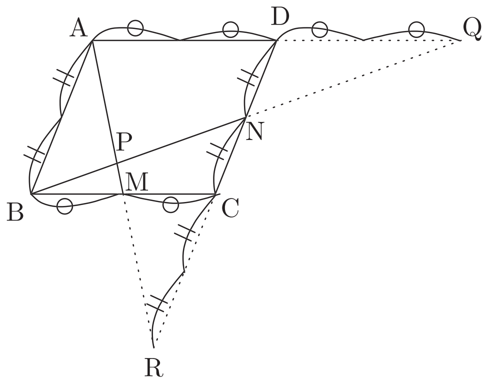
【2】(1) 右の図のように，Q, R をとって

$DQ : BC = DN : NC = 1 : 1$

$AP : PM = AQ : BM$

$= 2BC : \frac{1}{2}BC$

$= \mathbf{4 : 1}$



(2)

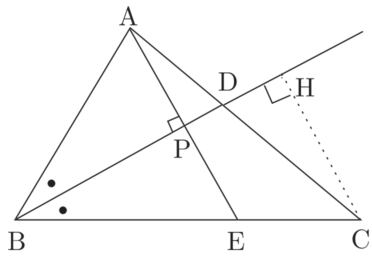
$AB : CR = BM : MC = 1 : 1$

$BP : PN = AB : NR$

$= AB : \frac{3}{2}AB$

$= \mathbf{2 : 3}$

【3】(1) 右の図のように，C から BD に下ろした垂線の足を H とする．



△ ABP と △ CBH において

$\angle ABP = \angle CBH$,

$\angle APB = \angle CHB \ (= 90^\circ)$

したがって，2 組の角がそれぞれ等しいので，

△ ABP ∽ △ CBH

$\therefore\ AP : CH = AB : BC = 4 : 6 = 2 : 3$

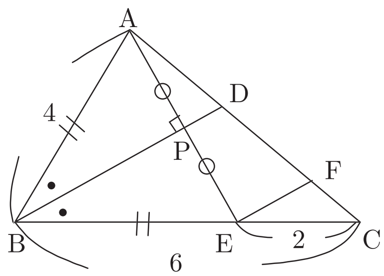
さらに，△ DAP と △ DCH において，

$\angle ADP = \angle CDH, \quad \angle DPA = \angle DHC \ (= 90^\circ)$

したがって，2 組の角がそれぞれ等しいので，△ DAP∽ △ DCH

$\therefore\ AD : DC = AP : CH = 2 : 3$ （証明終）

(2) 右の図で，EF // BD とする．



△ BAP と △ BEP において

BP 共通,

$\angle ABP = \angle EBP$,

$\angle APB = \angle EPB$

よって，

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ BAP ≡ △ BEP

ゆえに，$AP = PE$ ⋯①

$BA = BE = 4$ より

$EC = 6 - 4 = 2$ ⋯②

①より，$PD : EF = AP : AE = 1 : 2$

$\therefore\ PD = \frac{1}{2}EF$

②より，$BD : EF = BC : EC = 3 : 1$ $\therefore\ BD = 3EF$．よって

$BP : PD = (BD - PD) : PD = \left(3 - \frac{1}{2}\right)EF : \frac{1}{2}EF = \mathbf{5 : 1}$

小テスト

【1】 $\triangle$ **ABC** $\backsim$ $\triangle$ **WXV** (2 角がそれぞれ等しい)
$\triangle$ **JKL** $\backsim$ $\triangle$ **QRP** (3 辺の比が等しい)
$\triangle$ **GHI** $\backsim$ $\triangle$ **UTS** (2 辺の比が等しく，その間の角も等しい)

2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	