P3J

本科 1 期 6 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理

8章　熱力学第１法則：熱・仕事

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) A，B 内の気体の状態方程式は，

$$\begin{cases} p\cdot\dfrac{V}{2}=n_\mathrm{A}RT_\mathrm{A} \\[2ex] p\cdot\dfrac{V}{2}=n_\mathrm{B}RT_\mathrm{B} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} n_\mathrm{A}=\dfrac{pV}{2RT_\mathrm{A}} \\[2ex] n_\mathrm{B}=\dfrac{pV}{2RT_\mathrm{B}} \end{cases}$$

$n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}=n$ かつ $n_\mathrm{A}:n_\mathrm{B}=T_\mathrm{B}:T_\mathrm{A}$ なので，

$$\begin{cases} n_\mathrm{A}=\dfrac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}n \\[2ex] n_\mathrm{B}=\dfrac{T_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}n \end{cases}$$

(2) $n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}=n$ より，

$$\frac{pV}{2RT_\mathrm{A}}+\frac{pV}{2RT_\mathrm{B}}=n \qquad \therefore \quad p=\frac{2nRT_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}{V(T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B})}$$

(3) 合計の内部エネルギーは，

$$U=\frac{3}{2}pV=\frac{3nRT_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}$$

(4) 内部エネルギーの保存より，

$$\frac{3}{2}nRT_1=\frac{3nRT_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad T_1=\frac{2T_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}$$

T_1 と T_0 の差をとると，

$$T_1-T_0=\frac{2T_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}-\frac{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}{2}=-\frac{(T_\mathrm{A}-T_\mathrm{B})^2}{2(T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B})}$$

よって $T_1-T_0<0$ すなわち T_1 の方が T_0 より低い．

(5) (4) の状態で容器 A 内にある気体のモル数を $n_\mathrm{A}{}'$ とする．真空への自由膨張で気体がする仕事は 0 かつ全体が断熱なので，内部エネルギーは変化せず，

$$\frac{3}{2}n_\mathrm{A}{}'RT_2=\frac{3}{2}n_\mathrm{A}{}'RT_1 \qquad \therefore \quad T_2=\frac{2T_\mathrm{A}T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B}}$$

【2】

《解答》

(1) 気体からの力を受けたピストンが，力のつりあいを保ちつつ一定の大気圧に逆らって静かに上昇するから．

(2) 図 1 での状態方程式は，

$$p_0SL = nRT_0 \qquad \therefore \quad n = \frac{p_0SL}{RT_0}$$

(3) 図 2 での状態方程式と (2) より，

$$T_1 = \frac{p_0 \cdot 2SL}{nR} = 2T_0$$

(4) $W_1 = p_0SL$

(5) (2)，(3) に注意して，内部エネルギー変化は，

$$\varDelta U_1 = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}p_0SL$$

熱力学第 1 法則より，

$$\varDelta U_1 = +Q_1 - W_1 \qquad \therefore \quad Q_1 = \frac{5}{2}p_0SL$$

(6) 力のつりあいより，

$$0 = p_2S - p_0S - mg \qquad \therefore \quad p_2 = p_0 + \frac{mg}{S}$$

(7) 図 3 の気体の状態方程式と (2)，(6) より，

$$T_2 = \frac{p_2SL}{nR} = \left(1 + \frac{mg}{p_0S}\right)T_0$$

(8) (2)，(7) に注意して，内部エネルギー変化は，

$$\varDelta U_2 = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_0) = \frac{3}{2}mgL$$

また，定積変化で仕事は 0 なので，

$$\varDelta U_2 = +Q_2 + 0 \qquad \therefore \quad Q_2 = \frac{3}{2}mgL$$

【3】

《解答》

(a) 気体を注入した後の力のつりあいより，

$$0 = P_1 S - Mg - P_0 S \qquad \therefore \quad P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

(b) 気体を注入する前の力のつりあいより，

$$0 = k \cdot \frac{h}{4} - Mg - P_0 S \qquad \therefore \quad k = \frac{4(P_0 S + Mg)}{h}$$

(c) 状態方程式は，

$$\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) \cdot Sh = nRT_1 \qquad \therefore \quad n = \frac{(P_0 S + Mg)h}{RT_1}$$

(d) 力のつりあいより，

$$0 = P_2 S - Mg - P_0 S - kx$$

状態方程式は，

$$P_2 \cdot S(h + x) = nR \cdot \frac{5}{2} T_1 \quad \cdots (*)$$

これらより P_2 を消去すると，

$$(Mg + P_0 S + kx)(h + x) = \frac{5}{2} nRT_1$$

k，n を代入して整理すると，

$$(4x - h)(2x + 3h) = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{4} h$$

(e) $(*)$ に x，n を代入すると，

$$P_2 S \cdot \frac{5}{4} h = \frac{(P_0 S + Mg)h}{RT_1} \cdot \frac{5}{2} RT_1 \qquad \therefore \quad P_2 = 2\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)$$

(f) 内部エネルギーを，(1) の状態では U_1，(2) の状態では U_2 とすると，

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{3}{2} nRT_1 = \dfrac{3}{2} h(P_0 S + Mg) \\ U_2 = \dfrac{3}{2} nR \cdot \dfrac{5}{2} T_1 = \dfrac{15}{4} h(P_0 S + Mg) \end{cases} \qquad \therefore \quad \varDelta U = \frac{9}{4} h(P_0 S + Mg)$$

(g) 体積 $V\ (> Sh)$ のときのばねの縮みを X とすると，

$$V = S(h + X) \qquad \therefore \quad X = \frac{V}{S} - h$$

このときの圧力を P として，力のつりあいより，

$$0 = PS - Mg - P_0 S - kX$$

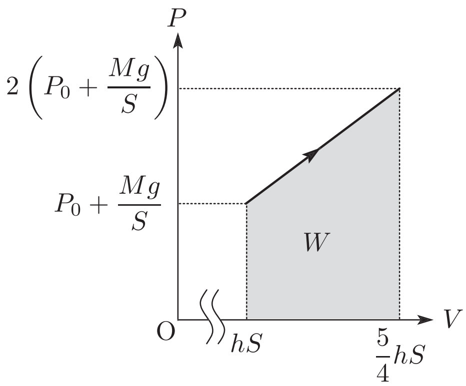
k，X を代入すると，

$$0 = PS - Mg - P_0S - \frac{4(P_0S + Mg)}{h} \cdot \left(\frac{V}{S} - h\right)$$

$$\therefore \quad P = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\left(\frac{4}{Sh}V - 3\right)$$

これをグラフに描くと下図となり，

$$W = \frac{1}{2}\left\{\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) + 2\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\right\} \cdot \frac{1}{4}hS$$
$$= \frac{3}{8}h(P_0S + Mg)$$



(h) 熱力学第 1 法則により，$\varDelta U = Q - W$ が成り立つので，

$$Q = \frac{9}{4}h(P_0S + Mg) + \frac{3}{8}h(P_0S + Mg)$$
$$= \frac{21}{8}h(P_0S + Mg)$$

【4】

《解答》

力のつりあいより，糸の張力は $f = Mg$ である．

(1) A 内の気体の圧力を p_0 とすると，ピストンの力のつりあいと状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = f - p_0 S \\ p_0 \cdot \dfrac{2}{3} hS = n_{\mathrm{A}} RT \end{cases}$$

これらより p_0 を消去すると，

$$0 = Mg - \frac{3n_{\mathrm{A}}RT}{2h} \qquad \therefore \quad n_{\mathrm{A}} = \frac{2Mgh}{3RT}$$

(2) A，B 内の気体の圧力を p_1，p_2 とすると，ピストンの力のつりあいと状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = f + p_2 S - p_1 S \\ p_1 \cdot \dfrac{1}{2} hS = n_{\mathrm{A}} RT \qquad \therefore \quad p_1 = \dfrac{2n_{\mathrm{A}}RT}{Sh} \\ p_2 \cdot \dfrac{1}{2} hS = n_{\mathrm{B}} RT \qquad \therefore \quad p_2 = \dfrac{2n_{\mathrm{B}}RT}{Sh} \end{cases}$$

これらより，p_1 と p_2 を消去すると，

$$0 = Mg + \frac{2n_{\mathrm{B}}RT}{h} - \frac{2n_{\mathrm{A}}RT}{h} \qquad \therefore \quad n_{\mathrm{B}} = n_{\mathrm{A}} - \frac{Mgh}{2RT}$$

さらに (1) を用いると，

$$n_{\mathrm{B}} = n_{\mathrm{A}} - \frac{3}{4} n_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4} n_{\mathrm{A}}$$

(3) A，B 内の気体の圧力を p_3，p_4，ピストンの高さを x とすると，ピストンの力のつりあいと状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = f + p_4 S - p_3 S \\ p_3 S(h-x) = n_{\mathrm{A}} R \cdot 2T \qquad \therefore \quad p_3 = \dfrac{2n_{\mathrm{A}}RT}{S(h-x)} \\ p_4 Sx = n_{\mathrm{B}} R \cdot 2T \qquad \therefore \quad p_4 = \dfrac{2n_{\mathrm{B}}RT}{Sx} \end{cases}$$

これらより，p_3 と p_4 を消去して，(1) と (2) をふまえると，

$$0 = Mg + \frac{2RT}{x} \times \frac{2Mgh}{3RT} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2RT}{h-x} \times \frac{2Mgh}{3RT}$$

これを整理すると，

$$3x^2 + 2hx - h^2 = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{3} h$$

(4) (3) の過程において，各部屋の気体を内界としたときのエネルギー収支の関係 (熱力学第 1 法則) は，

$$\mathrm{A}:\quad n_{\mathrm{A}}C_V(2T-T)=-\int p_{\mathrm{A}}\mathrm{d}V_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{A}}\quad\cdots①$$

$$\mathrm{B}:\quad n_{\mathrm{B}}C_V(2T-T)=-\int p_{\mathrm{B}}\mathrm{d}V_{\mathrm{B}}+Q_{\mathrm{B}}\quad\cdots②$$

ここで，

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{A}}=-S\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{d}V_{\mathrm{B}}=+S\mathrm{d}x\quad\left(\mathrm{d}x<0\text{ に注意. }x\text{ の変化 : }\frac{1}{2}h\to\frac{1}{3}h\right)$$

さらに，

$$W_{\mathrm{A}}=\int p_{\mathrm{A}}\mathrm{d}V_{\mathrm{A}}(>0),\qquad W_{\mathrm{B}}=\int p_{\mathrm{B}}\mathrm{d}V_{\mathrm{B}}(<0)$$

とおく．①，②式を辺々加えると，

$$(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})C_VT=-(W_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B}})+(Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}})\quad\cdots③$$

【W_{A}，W_{B} の計算あるいは導出】ピストンを内界にとりエネルギー収支の関係を導出する．ピストンを内界とする運動方程式を記述し，両辺に速度成分をかけて時刻 t で積分すると，

$$\begin{aligned}
&0\fallingdotseq f(\fallingdotseq Mg)+p_{\mathrm{B}}S-p_{\mathrm{A}}S\\
\therefore\quad &0=Mg\int\dot{x}\mathrm{d}t+\int p_{\mathrm{B}}S\dot{x}\mathrm{d}t-\int p_{\mathrm{A}}S\dot{x}\mathrm{d}t\quad\cdots④\\
\therefore\quad &0=Mg\left(\frac{h}{3}-\frac{h}{2}\right)+\int p_{\mathrm{B}}\mathrm{d}V_{\mathrm{B}}-\left(-\int p_{\mathrm{A}}\mathrm{d}V_{\mathrm{A}}\right)\quad\cdots⑤\\
\therefore\quad &0=-\frac{1}{6}Mgh+W_{\mathrm{B}}-(-W_{\mathrm{A}})\quad\cdots⑥
\end{aligned}$$

③，⑥より，

$$(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})C_VT=-\frac{1}{6}Mgh+Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}$$

$$\therefore\quad Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}=(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})C_VT+\frac{1}{6}Mgh$$

さらに，(2) の結果を代入すると，求める熱量 $Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}$ は，

$$Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}=\frac{5}{4}n_{\mathrm{A}}C_VT+\frac{1}{6}Mgh$$

《参考》

(4) は，ピストン＋おもり を内界とすることもできる．おもりの運動方程式にも速度成分をかけ時刻 t で積分した式などを用いると，同様の結論が導ける．

添削課題

《解答》

(1) 気体のモル数を n とすると，温度が T_1 のときの状態方程式は，

$$P_1 \cdot lS = nRT_1 \qquad \therefore \quad n = \frac{P_1 Sl}{RT_1}$$

(2) ばね定数を k，B が K_1 を離れるときの気体の圧力を P_2 として，B と C が受ける力のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = P_2 S - kl \\ 0 = kl - P_0 S \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} k = \dfrac{P_0 S}{l} \\ P_2 = P_0 \end{cases}$$

このときの気体の温度を T_2 とすると，状態方程式は，

$$P_0 \cdot lS = \frac{P_1 Sl}{RT_1} \cdot RT_2 \quad \therefore \quad T_2 = \frac{P_0}{P_1} T_1$$

(3) 気体の内部エネルギーを，温度が T_1 のときは U_1，T_2 のときは U_2 とすると，

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{3}{2} RT_1 \cdot \dfrac{P_1 Sl}{RT_1} = \dfrac{3}{2} P_1 Sl \\ U_2 = \dfrac{3}{2} R \cdot \dfrac{P_0}{P_1} T_1 \cdot \dfrac{P_1 Sl}{RT_1} = \dfrac{3}{2} P_0 Sl \end{cases}$$

B が K_1 を離れるまでに気体に与えた熱量を Q_{12} とすると，熱力学第 1 法則により $U_2 - U_1 = Q_{12} - 0$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{3}{2} P_0 Sl - \frac{3}{2} P_1 Sl \\ &= \frac{3}{2} Sl (P_0 - P_1) \end{aligned}$$

(4) C が K_2 に接触したときの温度を T_3 とすると，状態方程式は，

$$P_0 \cdot 2lS = \frac{P_1 Sl}{RT_1} \cdot RT_3 \quad \therefore \quad T_3 = \frac{2P_0}{P_1} T_1$$

(5) 温度が T_3 のときの気体の内部エネルギーを U_3 とすると，

$$U_3 = \frac{3}{2} R \cdot \frac{2P_0}{P_1} T_1 \cdot \frac{P_1 Sl}{RT_1} = 3P_0 Sl$$

B が K_1 を離れてから C が K_2 に接触するまでに気体に与えた熱量を Q_{23} とすると，熱力学第 1 法則により $U_3 - U_2 = Q_{23} - P_0 Sl$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \left(3P_0 Sl - \frac{3}{2} P_0 Sl \right) + P_0 Sl \\ &= \frac{5}{2} P_0 Sl \end{aligned}$$

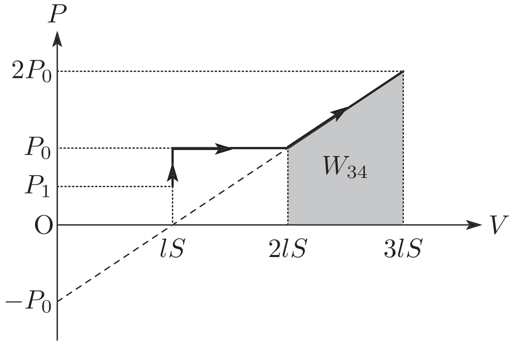
(6) C が K_2 に接触した後，ばねの縮みが x となったときの気体の体積を V とすると，

$$V = S(l + x) \qquad \therefore \quad x = \frac{V}{S} - l$$

このときの気体の圧力を P として，B が受ける力のつりあいより，

$$0 = PS - \frac{P_0 S}{l} \cdot \left(\frac{V}{S} - l \right) \qquad \therefore \quad P = \frac{P_0}{Sl} V - P_0$$

C が K_2 に接触する前の変化も含めて $P-V$ グラフを描くと下図のようになる．



(7) B が K_2 から l だけ離れた位置まで移動したとき，気体の圧力は $2P_0$ となっている。このときの気体の温度を T_4 とすると，状態方程式は，

$$2P_0 \cdot 3lS = \frac{P_1 Sl}{RT_1} \cdot RT_4 \quad \therefore \quad T_4 = \frac{6P_0}{P_1} T_1$$

このときの気体の内部エネルギーを U_4 とすると，

$$U_4 = \frac{3}{2} R \cdot \frac{6P_0}{P_1} T_1 \cdot \frac{P_1 Sl}{RT_1} = 9P_0 Sl$$

C が K_2 に接触した後で気体がした仕事を W_{34} とすると，

$$W_{34} = \frac{1}{2}(P_0 + 2P_0) \cdot Sl = \frac{3}{2} P_0 Sl$$

C が K_2 に接触した後で気体に与えた熱量を Q_{34} とすると，熱力学第 1 法則により $U_4 - U_3 = Q_{34} - W_{34}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} Q_{34} &= (9P_0 Sl - 3P_0 Sl) + \frac{3}{2} P_0 Sl \\ &= \frac{15}{2} P_0 Sl \end{aligned}$$

配点

100 点

(1)，(4) 各 10 点

(2)，(3)，(5)，(6) 各 15 点

(7)20 点

9章　熱サイクル

問題

■演習

【1】

《解答》

I (1) (a) 状態方程式より，

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{1\,\mathrm{mol} \times 8.3\,\mathrm{J/mol \cdot K} \times 300\,\mathrm{K}}{1\,\mathrm{m^3}}$$
$$= 2.5 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$$

(b) $\dfrac{3}{2}R = 12\,\mathrm{J/mol \cdot K}$

(c) 変化前後の状態方程式は，

$$\begin{cases} p_0 V_0 = nRT \\ (p_0 + \varDelta p)(V_0 + \varDelta V) = nR(T_0 + \varDelta T) \end{cases}$$

これらの差をとり，$\varDelta V \varDelta p$ を無視すると，

$$nR\varDelta T = p_0 \varDelta V + V_0 \varDelta p \quad \cdots ①$$

(d) ①で $\varDelta T = 0$ のとき，

$$\varDelta p = -\frac{p_0}{V_0} \times \varDelta V \quad \cdots ②$$

(e) 熱力学第 1 法則より，

$$nC_V \varDelta T = 0 - p_0 \varDelta V \qquad \therefore \quad \varDelta T = -\frac{p_0}{nC_V}\varDelta V$$

これを①に代入すると，

$$-\frac{R}{C_V} p_0 \varDelta V = p_0 \varDelta V + V_0 \varDelta p \qquad \therefore \quad \varDelta p = -\left(\frac{R}{C_V} + 1\right)\frac{p_0}{V_0}\varDelta V \quad \cdots ③$$

これを，$\varDelta p = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0}\varDelta V$ と比べて，

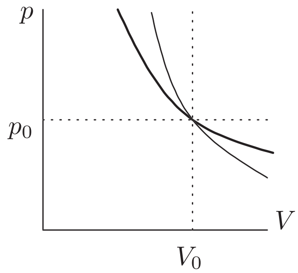
$$\gamma = \frac{R}{C_V} + 1 = \frac{C_V + R}{C_V}$$

(f) ①を $nRT_0 = p_0 V_0$ で割って，$\varDelta p = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0}\varDelta V$ を代入すると，

$$\frac{\varDelta T}{T_0} = \frac{\varDelta V}{V_0} - \gamma \frac{\varDelta V}{V_0} \qquad \therefore \quad \varDelta T = -(\gamma - 1)\frac{T_0}{V_0} \cdot \varDelta V$$

(g) (f) で $\gamma - 1 > 0$ なので，容積が増えると温度は下がる．

(2) ②，③からわかるとおり，等温曲線よりも断熱曲線の方が傾きが急なので次図.



II (1) 左右の部屋の容積変化は，$\varDelta V_{\mathrm{L}} = Sx$ および $\varDelta V_{\mathrm{R}} = -Sx$ と表せるので，

$$\begin{cases} \varDelta p_{\mathrm{L}} = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0} \varDelta V_{\mathrm{L}} = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0} Sx \\ \varDelta p_{\mathrm{R}} = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0} \varDelta V_{\mathrm{R}} = \gamma \dfrac{p_0}{V_0} Sx \end{cases}$$

(2) $F = (p_0 + \varDelta p_{\mathrm{L}})S - (p_0 + \varDelta p_{\mathrm{R}})S$

$= -\dfrac{2\gamma p_0 S^2}{V_0} x$

(3) 運動方程式は，

$$M\ddot{x} = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{V_0} x \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{MV_0} x$$

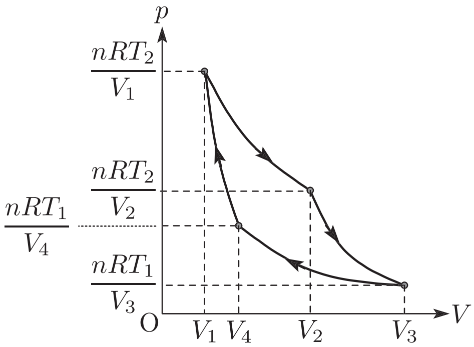
運動は，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{2\gamma p_0 S^2}{MV_0}}$ の単振動で，初期条件 $x(0) = A$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす解は，

$$x = A\cos(\omega t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2\gamma p_0 S^2}{MV_0}} t\right)$$

【2】

《解答》

(1)　過程①，③は等温曲線，過程②，④は断熱曲線となるので下図.



(2)　熱力学第 1 法則より，

$$0 = +Q_1 - W_1 \qquad \therefore \quad Q_1 = W_1$$

同様に，

$$0 = -Q_3 + W_3 \qquad \therefore \quad Q_3 = W_3$$

(3)　過程① の途中における圧力は，状態方程式より $p = \dfrac{nRT_2}{V}$ と表せることをふまえると，

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\mathrm{d}V \\ &= nRT_2(\log V_2 - \log V_1) \\ &= nRT_2 \log \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

同様に，過程③ の途中における圧力は，$p = \dfrac{nRT_1}{V}$ と表せるので，

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{V_3}^{V_4} (-p) \cdot \mathrm{d}V \\ &= \int_{V_4}^{V_3} \frac{nRT_1}{V}\mathrm{d}V \\ &= nRT_1(\log V_3 - \log V_4) \\ &= nRT_1 \log \frac{V_3}{V_4} \end{aligned}$$

(4)　断熱変化である過程②，④について，熱力学第 1 法則より，

$$\left\{ \begin{array}{l} nC_V(T_1 - T_2) = 0 - W_2 \\ nC_V(T_2 - T_1) = 0 + W_4 \end{array} \right. \qquad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} W_2 = nC_V(T_2 - T_1) \\ W_4 = nC_V(T_2 - T_1) \end{array} \right.$$

(5)　過程②，④について，

$$T_2{V_2}^{\gamma-1} = T_1{V_3}^{\gamma-1}, \qquad T_2{V_1}^{\gamma-1} = T_1{V_4}^{\gamma-1}$$

これらより，

$$\frac{T_2{V_2}^{\gamma-1}}{T_2{V_1}^{\gamma-1}} = \frac{T_1{V_3}^{\gamma-1}}{T_1{V_4}^{\gamma-1}} \qquad \therefore \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

(6)　(3)，(5) より，

$$\frac{W_3}{W_1} = \frac{nRT_1 \log \dfrac{V_3}{V_4}}{nRT_2 \log \dfrac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1}{T_2}$$

(7)　(4)，(6) の結果から，

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{T}} &= W_1 + W_2 - W_3 - W_4 \\ &= W_1 + nC_V(T_2 - T_1) - \frac{T_1}{T_2}W_1 - nC_V(T_2 - T_1) \\ &= W_1\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \end{aligned}$$

(8)　(2)，(7) より，

$$\frac{W_{\mathrm{T}}}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

【3】
《解答》

(a) A ➞ B での内部エネルギーの変化は $\varDelta U_{\mathrm{AB}} = 0$，また気体がする仕事は $W_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}p_0V_0$ なので，

$$0 = +Q_1 - \frac{3}{2}p_0V_0 \qquad \therefore \quad Q_1 = \frac{3}{2}p_0V_0$$

(b) B ➞ C での内部エネルギー変化は，

$$\varDelta U_{\mathrm{BC}} = \frac{3}{2}p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0 \cdot 2V_0 = -\frac{3}{2}p_0V_0$$

また気体がされる仕事は $W_{\mathrm{BC}} = p_0V_0$ なので，

$$-\frac{3}{2}p_0V_0 = -Q_2 + p_0V_0 \qquad \therefore \quad Q_2 = \frac{5}{2}p_0V_0$$

(c) V_0 の単位を [L] から [m^3] に書き換えて，p_0 と V_0 の数値を代入すると，

$$\begin{aligned}\varDelta U &= \frac{3}{2} \cdot 2p_0 \cdot V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 \\ &= \frac{3}{2} \times (1.0 \times 10^5\mathrm{Pa}) \times (1.0 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3) = 1.5 \times 10^2\mathrm{J}\end{aligned}$$

(d) 1 サイクルで気体がする正味の仕事は，

$$W_{\mathrm{T}} = W_{\mathrm{AB}} - W_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}p_0V_0$$

次に，吸収 <u>のみ</u> の熱量 Q を求める．A ➞ B での圧力，体積，温度が $(p,\ V,\ T)$ の状態から $(p + \varDelta p,\ V + \varDelta V,\ T + \varDelta T)$ へ変化する微小変化において気体が吸収する熱量を $\varDelta Q$ とすると，定積モル比熱 C_V の気体では，

$$nC_V\varDelta T = \varDelta Q - p\varDelta V \qquad \therefore \quad \varDelta Q = nC_V\varDelta T + p\varDelta V$$

また，変化前後の状態方程式の差をとることにより，

$$p\varDelta V + V\varDelta p = nR\varDelta T \qquad \therefore \quad \varDelta T = \frac{p\varDelta V + V\varDelta p}{nR}$$

さらに，直線 AB の式は，

$$p = 3p_0 - \frac{p_0}{V_0}V \qquad \therefore \quad \varDelta p = -\frac{p_0}{V_0}\varDelta V$$

これらより，V および $\varDelta V$ を用いて $\varDelta Q$ を表すと，

$$\varDelta Q = \frac{1}{R}\left\{3(C_V + R) - (2C_V + R)\frac{V}{V_0}\right\}p_0\varDelta V \quad \cdots ①$$

$\varDelta V > 0$ のとき，$\varDelta Q > 0$ となる範囲は，

$$V_0 \leqq V < \frac{3(C_V + R)}{2C_V + R}V_0 (= V_{\mathrm{S}}\text{とおく}) \quad \cdots ②$$

単原子分子理想気体で $C_V = \dfrac{3}{2}R$ のとき，$V_{\mathrm{S}} = \dfrac{15}{8}V_0$ までが吸熱となり，この間の吸収熱量 Q_{AS} は，

$$Q_{\mathrm{AS}} = \int_{V_0}^{\frac{15}{8}V_0} \left(\frac{15}{2} - 4\cdot\frac{V}{V_0}\right) p_0 \mathrm{d}V = \frac{49}{32}p_0V_0$$

また，B → C では放熱，C → A では吸熱と分かり，C → A では仕事が 0 なので C → A での吸収熱量 Q_{CA} は (c) の $\mathit{\Delta} U$ と等しい．

以上より，吸収のみの合計熱量は，

$$Q = Q_{\mathrm{AS}} + Q_{\mathrm{CA}} = \frac{97}{32}p_0V_0 \qquad \therefore \quad e_1 = \frac{W_{\mathrm{T}}}{Q} = \frac{16}{97}$$

(e) A から B へ等温変化させると，等温曲線は，直線 AB の下側に現れるので，気体がする仕事は $W_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}p_0V_0$ より小さい．これと (a) より，$Q_1 > W$．

(f) 2 原子分子理想気体の場合は，分子の回転運動によるエネルギーももつため，単原子分子理想気体より温度が変化しにくい．このため，同じ状態変化で気体に出入りする熱量は 2 原子分子理想気体の方が大きくなる．一方，気体がする正味の仕事は変化しないので，$e_2 < e_1$．

《解説》

(f) では「理由を簡潔に述べよ」と問われていたので上のように解答したが，(d) で，e_1 を求めたのと同様にして e_2 を求めることもできる．2 原子分子理想気体で $C_V = \dfrac{5}{2}R$ のとき，$V_{\mathrm{S}} = \dfrac{7}{4}V_0$ までが吸熱となり，

$$Q_{\mathrm{AS}} = \int_{V_0}^{\frac{7}{4}V_0} \left(\frac{21}{2} - 6\frac{V}{V_0}\right) p_0 \mathrm{d}V = \frac{27}{16}p_0V_0$$

また，C → A では仕事が 0 なので，

$$\frac{5}{2}\cdot 2p_0\cdot V_0 - \frac{5}{2}p_0V_0 = +Q_{\mathrm{CA}} + 0 \qquad \therefore \quad Q_{\mathrm{CA}} = \frac{5}{2}p_0V_0$$

気体がする正味の仕事は W_{T} のままなので，

$$e_2 = \frac{\frac{1}{2}p_0V_0}{\frac{27}{16}p_0V_0 + \frac{5}{2}p_0V_0} = \frac{8}{67} \qquad \therefore \quad e_1 > e_2$$

【4】

《解答》

A，B，C 各状態での気体の状態方程式は，モル数 n，気体定数を R として，

$$pS\cdot 3h = nRT \quad \cdots ①$$

$$pSh = nRT_{\mathrm{B}} \quad \cdots ②$$

$$p_{\mathrm{C}}S\cdot h = nRT \quad \cdots ③$$

(1) ①，②より，

$$p_{\mathrm{B}} = p,\ T_{\mathrm{B}} = \frac{T}{3}$$

(2)

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{A\to B}} = \frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{B}} - T) = -3pSh$$

$$W_{\mathrm{A\to B}} = +p(Sh - 3Sh) = -2pSh$$

また，熱力学第 1 法則より，

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{A\to B}} = -W_{\mathrm{A\to B}} + Q_{\mathrm{A\to B}} \qquad \therefore \quad Q_{\mathrm{A\to B}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{A\to B}} + W_{\mathrm{A\to B}} = -5pSh$$

(3) ①，③より，

$$p_{\mathrm{C}} = 3p$$

(4)

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{B\to C}} = \frac{3}{2}nR(T - T_{\mathrm{B}}) = 3pSh, \qquad W_{\mathrm{B\to C}} = 0$$

$$\therefore \quad Q_{\mathrm{B\to C}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{B\to C}} + W_{\mathrm{B\to C}} = +3pSh$$

(5) 液体の密度を ρ とすると，ピストンの運動方程式の鉛直上向き成分より，

$$0 = p_{\mathrm{C}}S - pS - \rho Sg(3h - h)$$

$p_{\mathrm{C}} = 3p$ を代入して，

$$\rho = \frac{3p - p}{2gh} = \frac{p}{gh}$$

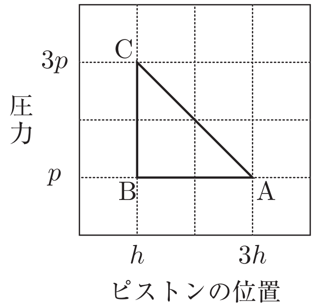
(6) ピストンの運動方程式の鉛直上向き成分より，

$$0 = p(x)S - pS - \rho Sg(3h - x) \qquad \therefore \quad p(x) = p + \frac{3h - x}{h}p = \left(4 - \frac{x}{h}\right)p$$

(7) 〜(9)

$$\varDelta U_{\mathrm{C\to A}} = 0$$

圧力とピストンの位置の変化を表すグラフは右図.



このとき,

$$W_{\mathrm{C\to A}} = \frac{1}{2}(3p+p)(3h-h)S = 4pSh$$
$$Q_{\mathrm{C\to A}} = \varDelta U_{\mathrm{C\to A}} + W_{\mathrm{C\to A}} = 4pSh$$

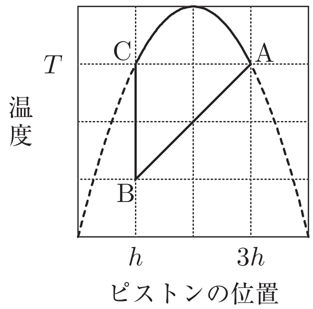
C から A までの状態方程式は，ピストンの位置を x として,

$$p(x)Sx = nRT(x)$$

これと (6) の $p(x)$ から,

$$\begin{aligned} T(x) &= \left(4-\frac{x}{h}\right)pSx\frac{1}{nR} \\ &= \left(4-\frac{x}{h}\right)pSx\cdot\frac{T}{3pSh} \\ &= \frac{(4h-x)x}{3h^2}T \\ &= -\frac{(x-2h)^2-4h^2}{3h^2}T \end{aligned}$$

温度とピストンの位置の変化を表すグラフは下図.



添削課題

《解答》

(1) A→B の途中における圧力は，状態方程式より $p=\dfrac{nRT_{\mathrm{H}}}{V}$ と表せる．よって，A→B で気体がする仕事は，

$$W_{\mathrm{AB}}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{nRT_{\mathrm{H}}}{V}\mathrm{d}V=nRT_{\mathrm{H}}\log\frac{V_2}{V_1}$$

熱力学第 1 法則より，

$$0=+Q_{\mathrm{AB}}-W_{\mathrm{AB}}\qquad\therefore\quad Q_{\mathrm{AB}}=nRT_{\mathrm{H}}\log\frac{V_2}{V_1}$$

(2) B→C では体積が一定なので，気体がする仕事は $W_{\mathrm{BC}}=0$ となる．このとき，熱力学第 1 法則より，

$$\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{H}})=-Q_{\mathrm{BC}}-0\qquad\therefore\quad Q_{\mathrm{BC}}=\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})$$

(3) C→D の途中における圧力は，状態方程式より $p=\dfrac{nRT_{\mathrm{L}}}{V}$ と表せる．よって，C→D で気体がされる仕事は，

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{CD}}&=-\int_{V_2}^{V_1}\frac{nRT_{\mathrm{L}}}{V}\mathrm{d}V\\&=\int_{V_1}^{V_2}\frac{nRT_{\mathrm{L}}}{V}\mathrm{d}V=nRT_{\mathrm{L}}\log\frac{V_2}{V_1}\end{aligned}$$

熱力学第 1 法則より，

$$0=-Q_{\mathrm{CD}}+W_{\mathrm{CD}}\qquad\therefore\quad Q_{\mathrm{CD}}=nRT_{\mathrm{L}}\log\frac{V_2}{V_1}$$

(4) D→A でも体積が一定なので，気体がされる仕事は $W_{\mathrm{DA}}=0$ となる．このとき，熱力学第 1 法則より，

$$\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})=+Q_{\mathrm{DA}}+0\qquad\therefore\quad Q_{\mathrm{DA}}=\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})$$

(5) 1 サイクルで気体がする正味の仕事を W とすると，

$$\begin{aligned}W&=(W_{\mathrm{AB}}+W_{\mathrm{BC}})-(W_{\mathrm{CD}}+W_{\mathrm{DA}})\\&=nRT_{\mathrm{H}}\log\frac{V_2}{V_1}-nRT_{\mathrm{L}}\log\frac{V_2}{V_1}\end{aligned}$$

また，1 サイクルの間に気体が吸収する熱量を Q とすると，

$$\begin{aligned}Q&=Q_{\mathrm{AB}}+Q_{\mathrm{DA}}\\&=nRT_{\mathrm{H}}\log\frac{V_2}{V_1}+\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})\end{aligned}$$

よって，このサイクルの熱効率は，

$$e=\frac{W}{Q}=\frac{(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})\log\dfrac{V_2}{V_1}}{T_{\mathrm{H}}\log\dfrac{V_2}{V_1}+\dfrac{3}{2}(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})}$$

(6) Q_{BC} を Q_{DA} として再利用した場合には，1 サイクルの間に気体が外部から吸収した Q_{AB} のうち W に変換できた割合が熱効率となるので，

$$e'=\frac{W}{Q_{\mathrm{AB}}}=\frac{T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}$$

これと (5) より，

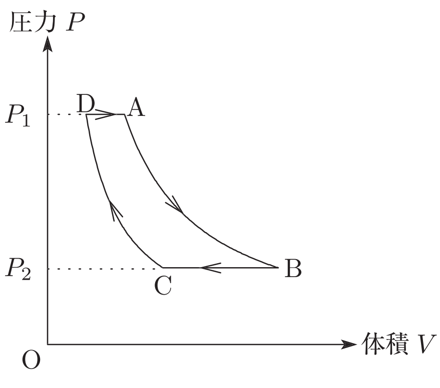
$$\frac{e'}{e}=\frac{T_{\mathrm{H}}\log\dfrac{V_2}{V_1}+\dfrac{3}{2}(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})}{T_{\mathrm{H}}\log\dfrac{V_2}{V_1}}$$

$$=1+\frac{3(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}})}{2T_{\mathrm{H}}\log\dfrac{V_2}{V_1}}>1 \qquad \therefore\quad e'>e$$

《解説》

本問の (6) のように「蓄熱器」を用いて熱を再利用するサイクルを「熱再生サイクル」と呼ぶ．熱再生サイクルでは，熱効率の分母に入る吸収熱量を小さくすることができるので，熱を再利用しない場合と比べて熱効率は必ず大きくなる．

熱再生サイクルの別の例として，スターリング・サイクルに含まれる体積一定の過程を圧力一定の過程で置き換えた下図のようなサイクルを考えて e' を求めると，e' はスターリング・サイクルの場合と一致することが分かる．(各自で確かめてみよ．) また，この e' がカルノー・サイクルの熱効率と同じになることにも注意してほしい．



$\boxed{\textbf{配点}}$

100 点

(1)〜(4) 各 15 点，(5)，(6) 各 20 点

１０章　電場と電位

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) $-y$ 方向に大きさ $\dfrac{V}{d}$

(2) 0

(3) $-q \cdot \dfrac{V}{d}$

(4) 0

(5) $-\dfrac{qV}{md}$

(6) 負

(7) $\dfrac{l}{v_0}$

(8) $\left|\dfrac{a_y}{2} \cdot \left(\dfrac{l}{v_0}\right)^2\right| = \dfrac{l^2 qV}{2m{v_0}^2 d}$

(9) 放物線

(10) 直線

【2】

《解答》

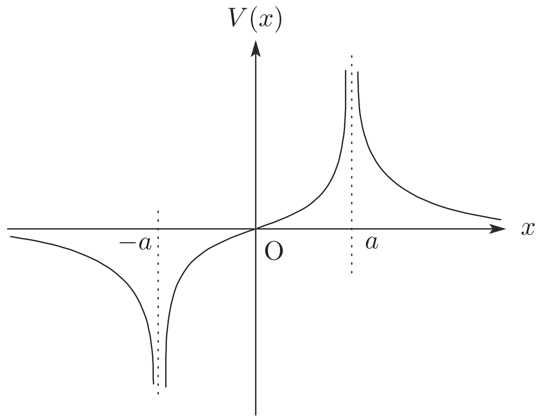
(1) $-x$ の向きに，

$$E = k\frac{Q}{(\sqrt{a^2+b^2})^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times 2$$
$$= \frac{2kQa}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

(2) 各領域での電位を合成すると，

$$V(x) = \begin{cases} k\dfrac{-Q}{(-a)-x} + k\dfrac{Q}{a-x} = -\dfrac{2kQa}{x^2-a^2} & [x < -a \text{ のとき}] \\ k\dfrac{-Q}{x-(-a)} + k\dfrac{Q}{a-x} = \dfrac{2kQx}{a^2-x^2} & [-a < x < a \text{ のとき}] \\ k\dfrac{-Q}{x-(-a)} + k\dfrac{Q}{x-a} = \dfrac{2kQa}{x^2-a^2} & [x > a \text{ のとき}] \end{cases}$$

これらをグラフに描くと下図のようになる．



(3) $V(y) = k\dfrac{-Q}{\sqrt{a^2+y^2}} + k\dfrac{Q}{\sqrt{a^2+y^2}} = 0$

(4) W は位置エネルギー eV の変化と一致するので，

$$W = e \cdot \frac{2kQ \cdot \dfrac{a}{2}}{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} - e \cdot 0 = \frac{4kQe}{3a}$$

また，放した後について，エネルギーの保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + e \cdot \frac{2kQ \cdot \left(-\dfrac{a}{2}\right)}{a^2 - \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2} = 0 + e \cdot \frac{2kQ \cdot \dfrac{a}{2}}{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} \qquad \therefore \quad v = 4\sqrt{\frac{kQe}{3am}}$$

(5) x 軸上の $|x| < a$ における電位は,

$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{x+a} = \frac{2kQa}{a^2-x^2}$$

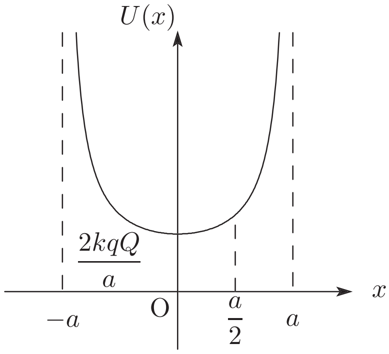
電荷 q の位置エネルギーは,

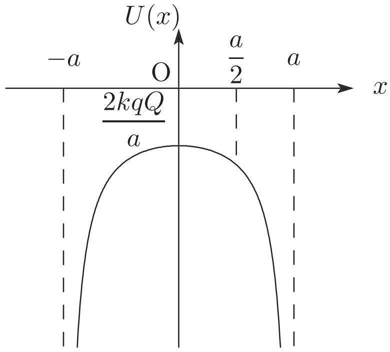
$$U(x) = qV(x) = \frac{2kqQa}{a^2-x^2}$$

よって，$q > 0$ のときの $U(x)$ は左下図，$q < 0$ のときの $U(x)$ は右下図のようになる．$q > 0$ のとき，粒子は U が最小となる $x = 0$ まわりで振動する．$x = \frac{a}{2}$ で静かに放したから，粒子が運動する範囲は,

$$|x| \leqq \frac{a}{2}$$

$q < 0$ のとき，粒子は $+x$ の向きに力を受けて移動し，やがて点 $(a,\ 0)$ の電荷と衝突する．





【3】

《解答》

(ア) $\dfrac{k_0Q}{(2d)^2}=\dfrac{k_0Q}{4d^2}$

(イ) ⑦

(ウ) $\dfrac{k_0Q}{2d}$

(エ) 外力の仕事を W_1 とすると，W_1 は位置エネルギーの変化と一致するので，

$$W_1=Q\cdot\frac{k_0Q}{2d}-Q\cdot 0=\frac{k_0Q^2}{2d}$$

(オ) $E_{\mathrm{C}}=\dfrac{k_0Q}{(\sqrt{2}d)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\dfrac{k_0Q}{\sqrt{2}d^2}$

(カ) $|(-e)\cdot E_{\mathrm{C}}|=\dfrac{k_0eQ}{\sqrt{2}d^2}$

(キ) エネルギーの保存より，

$$\frac{m}{2}{v_0}^2+(-e)\cdot\left(\frac{k_0Q}{d}\times 2\right)=0+(-e)\cdot\left(\frac{k_0Q}{\sqrt{2}d}\times 2\right)$$

$$\therefore\quad v_0=\sqrt{2(2-\sqrt{2})\frac{k_0eQ}{md}}$$

(ク) D の電界の x 成分は 0 で，y 成分は，

$$E_y=(-E_{\mathrm{C}})+\frac{k_0Q}{4d^2}=-\frac{k_0Q}{d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)$$

$E_x=0$ かつ $E_y<0$ なので，D での電界の方向は⑤と分かる．

(ケ) 外力の仕事を W_2 とすると，W_2 は位置エネルギーの変化と一致するので，

$$\begin{aligned}W_2&=(-Q)\cdot\left\{\frac{k_0Q}{\sqrt{2}d}\times 2+\frac{k_0\cdot(-Q)}{2d}\right\}-(-Q)\cdot 0\\&=-\frac{k_0Q^2}{d}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

(コ) はじめ無限に離れていたいくつかの電荷を，ある配置にするのに必要なエネルギー W は，その配置で蓄えられている位置エネルギー U_{ij} の和である．ここで，U_{ij} は点 i，j にある点電荷 q_{i}，q_{j} のペアがもつ位置エネルギーで，その距離が r_{ij} のとき $U_{\mathrm{ij}}=k_0\dfrac{q_{\mathrm{i}}q_{\mathrm{j}}}{r_{\mathrm{ij}}}$ と表せる．

以下はじめの配置 (次ページ図 (a)) で点 A，B，C，D に固定された電荷を順に①，②，③，④とする．

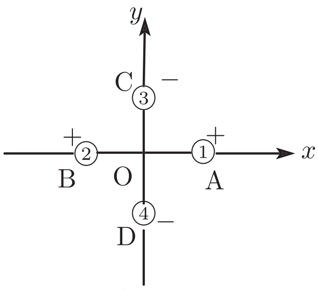


図 (a)

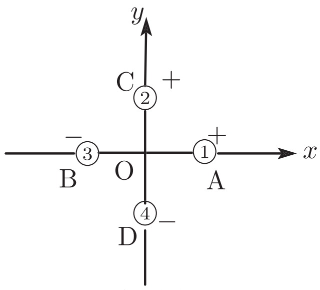


図 (b)

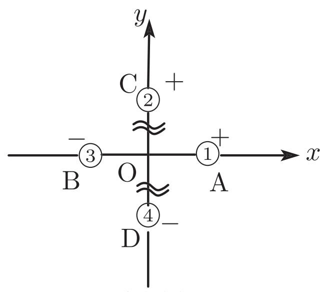


図 (c)

上図 (a) → (b) の移動では U_{14}，U_{23} が不変なので，その他のペアがもつ位置エネルギーの変化が外力の仕事と一致することとなり，

$$
\begin{aligned}
W_3 &= \Delta U_{12} + \Delta U_{13} + \Delta U_{24} + \Delta U_{34} \\
&= \left(\frac{k_0 Q^2}{\sqrt{2}d} - \frac{k_0 Q^2}{2d} \right) + \left\{ \frac{-k_0 Q^2}{2d} - \left(\frac{-k_0 Q^2}{\sqrt{2}d} \right) \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{-k_0 Q^2}{2d} - \left(\frac{-k_0 Q^2}{\sqrt{2}d} \right) \right\} + \left(\frac{k_0 Q^2}{\sqrt{2}d} - \frac{k_0 Q^2}{2d} \right) \\
&= 2(\sqrt{2} - 1) \frac{k_0 Q^2}{d}
\end{aligned}
$$

(サ) 上図 (b) → (c) の移動では U_{13} のみが不変なので，その他すべてのペアがもつ位置エネルギーの変化が外力の仕事と一致することとなり，

$$
W_4 = (\Delta U_{12} + \Delta U_{23}) + (\Delta U_{14} + \Delta U_{34}) + \Delta U_{24}
$$

ここで，①と③の電荷による y 軸上の合成電位は y によらずに 0 なので，

$$
\Delta U_{12} + \Delta U_{23} = 0, \qquad \Delta U_{14} + \Delta U_{34} = 0 \qquad \cdots (*)
$$

以上より，

$$
W_4 = \Delta U_{24} = 0 - \left(\frac{-k_0 Q^2}{2d} \right) = \frac{k_0 Q^2}{2d}
$$

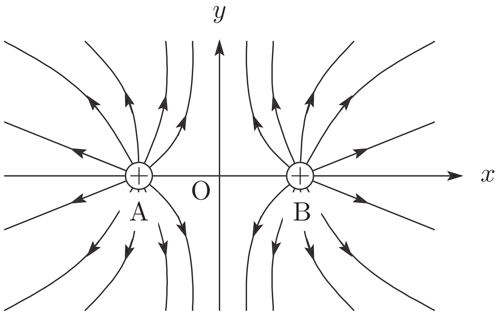
(注)$(*)$ について

①，③と②のみがある場合，②は①，③のつくる合成電場から $-x$ 向きの力を受ける．その力の向きと垂直な y 方向に②を移動させるときに必要な仕事は 0 である．このため，$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} = 0$ が成立する．同様に考えると，④を y 方向に移動させるときに必要な仕事も 0 なので，$\Delta U_{14} + \Delta U_{34} = 0$ が成立することも分かる．

【4】

《解答》

I (1) 右図



(2) クーロンの法則の比例定数を k_0 として，y 軸上位置 $y_1 = \pm 4.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$ での電位 V_1 は，

$$V_1 = 2 \times k_0 \frac{Q}{\sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + {y_1}^2}} = 1.8\,\mathrm{V}$$

電場の対称性より，荷電粒子は y 軸上を運動する．エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + eV_1$$

$$\therefore \quad v = \pm\sqrt{\frac{2eV_1}{m}} = \pm 8.0 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$$

符号は $+$ が $y_1 = +4.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$，$-$ が $y_1 = -4.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$

II (1) 題意より，

$$V(x,y) = k_0 \frac{Q}{\sqrt{\left(x + \dfrac{l}{2}\right)^2 + y^2}} + k_0 \frac{-\dfrac{Q}{2}}{\sqrt{\left(x - \dfrac{l}{2}\right)^2 + y^2}} = 0$$

整理して，

$$\left(x - \frac{5}{6}l\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}l\right)^2$$

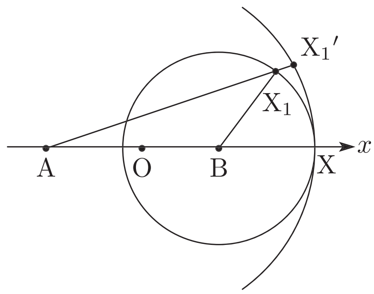
これは半径 $\dfrac{2}{3}l$，中心 $\left(\dfrac{5}{6}l, 0\right)$ の円を表す．

(2) $x < \dfrac{l}{2}$ では合力の和が 0 とならないので，x の領域は $x > \dfrac{l}{2}$．このとき，

$$0 = k_0 \frac{Q}{\left(x + \dfrac{l}{2}\right)^2} + k_0 \frac{-\dfrac{Q}{2}}{\left(x - \dfrac{l}{2}\right)^2}$$

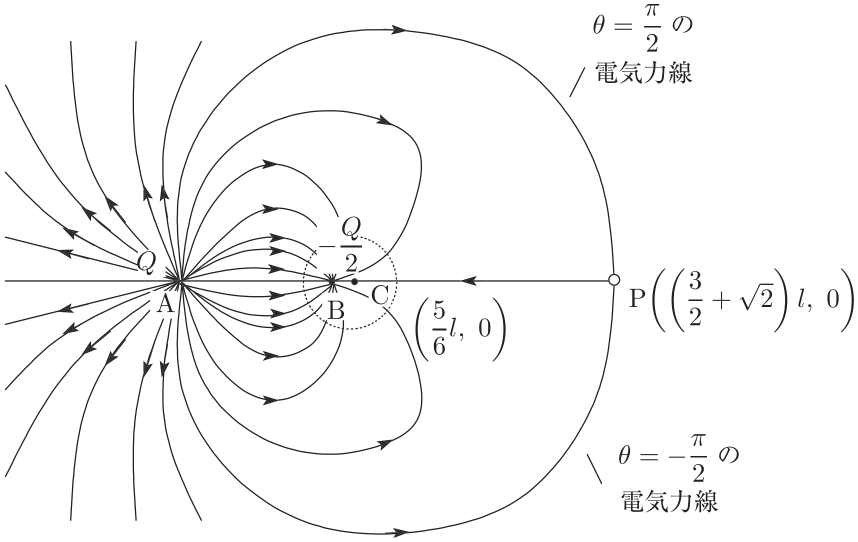
$$\therefore \quad x = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) l \qquad y = 0$$

(3) B を中心とする円周上では B による電位は等しい．その円周上で A による電位が最小なのは A 点からの距離がもっとも遠い右図の X 点．つまり x 軸上の点で合成電位は最小となる．



(4) ,(5) A 点近傍では電気力線の出方は点対称である．その電気力線のうち，A に関し $+x$ 側の領域に出るものは，A の電荷の半分の大きさをもつ B の電荷に入る．一方，$-x$ 側の領域に出るものは，無限遠方に伸びていく．よって，θ の範囲は下図より，

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



添削課題

《解答》

(1)　$\overline{\mathrm{OP}}=x$，$\overline{\mathrm{AP}}=x+a$ なので

$$E_x=k\frac{q}{x^2}-k\frac{4q}{(x+a)^2},\qquad E_y=0$$

(2)　$V(x,\ 0)=k\dfrac{q}{x}+k\dfrac{-4q}{x+a}=\dfrac{kq(a-3x)}{x(x+a)}$

(3)　位置 $(x,\ y)$ における電位は，

$$V(x,\ y)=k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2}}+k\frac{-4q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

$V(x,\ y)=0$ のとき，

$$k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2}}+k\frac{-4q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=0$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{a}{15}\right)^2+y^2=\left(\frac{4}{15}a\right)^2$$

よって，電位 $V=0$ の等電位線は，中心 $\left(\dfrac{a}{15},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{4}{15}a$ の円である．

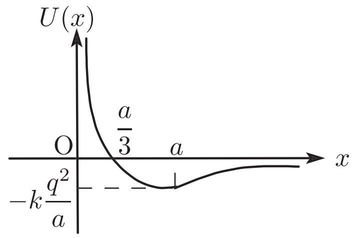
(4)　点 R の座標を $(x_{\mathrm{R}},\ 0)$ とすると，(1) で $x_{\mathrm{R}}+a\fallingdotseq x_{\mathrm{R}}$ と近似でき，

$$E_x\fallingdotseq k\frac{q}{{x_{\mathrm{R}}}^2}-k\frac{4q}{{x_{\mathrm{R}}}^2}$$
$$=-k\frac{3q}{{x_{\mathrm{R}}}^2}(<0)$$

Q が受けた力の向きと電場の向きが同じなので，Q の符号は正と分かる．

(5)　(2) をふまえると，x 軸の $x>0$ における位置エネルギーは，

$$U(x)=qV(x,\ 0)$$
$$=\frac{kq^2(a-3x)}{x(x+a)}$$



これを図示すると右図のようになる．

(6)　点 R での初期条件 $v_{\mathrm{R}}=0$，$U_{\mathrm{R}}\fallingdotseq 0$ をふまえて，エネルギーの保存より，

$$\frac{m}{2}v^2+U(x)=0\qquad\therefore\quad \frac{m}{2}v^2=\frac{kq^2(3x-a)}{x(x+a)}$$

$\dfrac{m}{2}v^2\geqq 0$ より，

$$\frac{kq^2(3x-a)}{x(x+a)}\geqq 0\qquad\therefore\quad x\geqq\frac{a}{3}$$

(7) (5) より $U(x)$ が最小となる位置は $x=a$ と分かり，この位置で運動エネルギーは最大となることをふまえると，

$$\frac{m}{2}{v_{\mathrm{max}}}^2=\frac{kq^2(3a-a)}{a(a+a)} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{max}}=q\sqrt{\frac{2k}{am}}$$

配点

100 点

(1)10 点，(2)10 点，(3)10 点，(4)10 点，(5)20 点，(6)20 点，(7)20 点

P3J
東大物理

Z-KAI

会員番号		氏　名	