本科 1 期 6 月度

解答

Z会東大進学教室

高 2 東大物理

8章　力学的エネルギーの保存（2）

問題

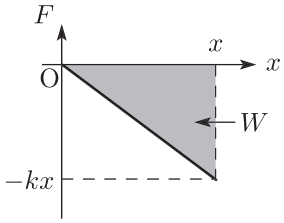
■演習

【1】

《解答》

(1) $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2$

(2) 伸び x の位置で作用する弾性力は，右向き正として $F=-kx$ なので，$F-x$ グラフは右図のようになり，このグラフと x 軸の間の符号付き面積が仕事に相当するので，



$$W=-\frac{1}{2}kx^2$$

(3) 運動エネルギーと仕事の関係より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}kx^2 \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2$$

これは，力学的エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2$ が一定に保たれることを意味している．

(4) (3) で $x=A$ のとき $v=0$ となるので，

$$0+\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2 \qquad \therefore \quad A=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

【2】

《解答》

(1) A が受ける力のつり合いより,

$$0 = Mg\cos\theta - T \qquad \therefore \quad T = Mg\cos\theta$$

(2) B が受ける力のつり合いより,

$$0 = T - kx \qquad \therefore \quad kx = T$$

これと (1) より,

$$kx = Mg\cos\theta \qquad \therefore \quad x = \frac{Mg\cos\theta}{k}$$

(3) A の運動方程式は,

$$Ma_1 = Mg\cos\theta \qquad \therefore \quad a_1 = g\cos\theta$$

(4) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}MV^2 + Mg\cdot(-L\cos\theta) = 0 + Mg\cdot 0 \qquad \therefore \quad V = \sqrt{2gL\cos\theta}$$

(5) B の運動方程式は,

$$ma_2 = kx \qquad \therefore \quad a_2 = \frac{kx}{m}$$

これと (2) より,

$$a_2 = \frac{k}{m}\cdot\frac{Mg\cos\theta}{k} = \frac{Mg\cos\theta}{m}$$

(6) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \therefore \quad v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

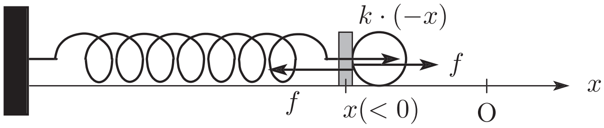
これと (2) より,

$$v = \frac{Mg\cos\theta}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{Mg\cos\theta}{\sqrt{km}}$$

【3】

《解答》

(1) $\begin{cases} ma = f & \cdots ① \\ Ma = k\cdot(-x) - f & \cdots ② \end{cases}$



(2) ① $\times M -$ ② $\times m$ より，

$$0 = Mf - m\cdot(-kx - f) \qquad \therefore \quad f = -\frac{m}{M+m}kx$$

(3) 力学的エネルギー保存より，

$$0 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 \qquad \therefore \quad v = A\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

(4) 力学的エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 = 0 + \frac{1}{2}kA'^2 \qquad \therefore \quad A' = v\sqrt{\frac{M}{k}}$$

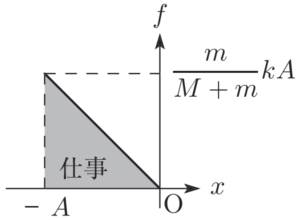
これと (3) より，

$$A' = A\sqrt{\frac{k}{M+m}}\cdot\sqrt{\frac{M}{k}} = A\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

《解説》

(3) では弾性エネルギーの減少分が板のみの運動エネルギーに変換されるのではなく，板 + 小球の運動エネルギーに変換されることに注意が必要である．

また，小球のみに注目すると，(2) の f の仕事の分だけ運動エネルギーが増加するので，次のような立式で v を求めることができる．



$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{M+m}kA^2 \qquad \therefore \quad v = A\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

【4】

《解答》

(ア) $mgh - mgl$

(イ) kx

(ウ) $mg(l - x)$

(エ) $\dfrac{1}{2}kx^2$

(オ) 図 (b) での全エネルギーは図 (a) での位置エネルギーと等しいので，mgh

(カ) 力学的エネルギーの保存より，

$$mgh = 0 + mg(l - x) + \frac{1}{2}kx^2$$

これを整理すると，

$$kx^2 - 2mgx + 2mg(l - h) = 0$$

これを解いて，$x > 0$ を考慮すると，

$$x = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgk(h - l)}}{k}$$

これと (イ) より，

$$F = mg \times \left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2k(h - l)}{mg}}\right\}$$

(キ) $h = l$ のとき，(カ) より，

$$\frac{F}{mg} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2k \cdot 0}{mg}} = 2$$

９章　単振動（１）

問題

■演習

【１】

《解答》

$$
(1)\quad \begin{cases} \text{図 1 の振動} \quad \cdots \quad X = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \\[2ex] \text{図 2 の振動} \quad \cdots \quad X = A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \end{cases}
$$

(2) 時間 T の間に，位相 $\omega t+\alpha$ が 2π だけ変化するので，

$$
\{\omega(t+T)+\alpha\} - (\omega t+\alpha) = 2\pi \qquad \therefore\quad T = \frac{2\pi}{\omega}
$$

(3) 微小時間 Δt の間の X の変化量 ΔX は，

$$
\begin{aligned}
\Delta X &= A\sin\{\omega(t+\Delta t)+\alpha\} - A\sin(\omega t+\alpha) \\
&= A\{\sin(\omega t+\alpha+\omega\Delta t) - \sin(\omega t+\alpha)\}
\end{aligned}
$$

Δt で割って，数学公式①を用いると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta X}{\Delta t} &= \frac{2A\cos\left(\omega t+\alpha+\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \\
&= \frac{\omega}{2}\cdot 2A\cos\left(\omega t+\alpha+\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\dfrac{\omega\Delta t}{2}}
\end{aligned}
$$

数学公式③を用いると，$\Delta t\to 0$ のとき $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\dfrac{\omega\Delta t}{2}} \to 1$ となるので，

$$
v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta t} = \omega A\cos(\omega t+\alpha)
$$

(4) 微小時間 Δt の間の v の変化量 Δv は，

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= \omega A\cos\{\omega(t+\Delta t)+\alpha\} - \omega A\cos(\omega t+\alpha) \\
&= \omega A\{\cos(\omega t+\alpha+\omega\Delta t) - \cos(\omega t+\alpha)\}
\end{aligned}
$$

Δt で割って，数学公式②を用いると，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2\omega A\sin\left(\omega t + \alpha + \dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}$$

$$= -\frac{\omega}{2}\cdot 2\omega A\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\omega\Delta t}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\dfrac{\omega\Delta t}{2}}$$

(3) のときと同様に数学公式③を用いると，

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha)$$

(5) $a(t) = -\omega^2 X(t)$

【2】
《解答》

(1) $ma = -F\sin\theta\cdot 2$

(2) $|x|$ が L と比べて十分に小さいとき，

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2}} \approx \frac{x}{L/2}$$

これと (1) より，

$$ma = -2F\cdot\frac{2x}{L} \qquad \therefore \quad a = -\frac{4F}{Lm}x \quad \cdots(*)$$

加速度の大きさがつり合いの位置からのずれに比例し，加速度の向きがつり合いの位置からのずれと逆向きなので，小球の運動は単振動となる．

(3) $(*)$ より，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{4F}{Lm}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{Lm}{4F}}$$

【3】

《解答》

(1) $-mg\sin\theta$

(2) 求める加速度を a とする．おもりの運動方程式は，

$$ma = -mg\sin\theta$$

θ が小さいときは $\sin\theta \approx \dfrac{x}{l}$ とみなせるので，

$$ma = -mg\cdot\frac{x}{l} \qquad \therefore \quad a = -\frac{g}{l}x$$

(3) (2) より，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(4) 平均の周期と (3) より，

$$2\times 3.14\times\sqrt{\frac{1.00\mathrm{m}}{g}} = 2.01\mathrm{s}$$

$$\therefore \quad g = 9.76\mathrm{m/s^2}$$

回数	$t_2 - t_1$[s]	周期 T[s]
10〜60	101	2.02
20〜70	100.5	2.01
30〜80	100	2
40〜90	101	2.02
50〜100	100	2
	平均の周期	2.01

【4】

《解答》

(1) 求める変位量を l_B とする。力のつり合いより，

$$\begin{cases} 0 = F - 2k\cdot l \\ 0 = kl_\mathrm{B} - F \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} l = \dfrac{F}{2k} \quad \cdots ① \\ l_\mathrm{B} = \dfrac{F}{k} = 2l \quad \cdots ② \end{cases}$$

(2) 右向きを正として，A の変位量が x_A の瞬間の加速度を a_A とすると，水平方向の運動方程式は，

$$ma_\mathrm{A} = -2k\cdot x_\mathrm{A} \qquad \therefore \quad a_\mathrm{A} = -\frac{2k}{m}x_\mathrm{A}$$

よって，A の運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \qquad \therefore \quad T_\mathrm{A} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

同様に，B の変位量が x_B の瞬間の加速度を a_B とすると，水平方向の運動方程式は，

$$ma_\mathrm{B} = -kx_\mathrm{B} \qquad \therefore \quad a_\mathrm{B} = -\frac{k}{m}x_\mathrm{B}$$

よって，B の運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad T_\mathrm{B} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) おもり A の力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}\cdot 2k\cdot l^2 \qquad \therefore \quad v_\mathrm{A} = l\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

これと①より，

$$v_\mathrm{A} = \frac{F}{2k}\sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{F}{\sqrt{2km}}$$

おもり B の力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k{l_\mathrm{B}}^2 \qquad \therefore \quad v_\mathrm{B} = l_\mathrm{B}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

これと②より，

$$v_\mathrm{B} = \frac{F}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{F}{\sqrt{km}}$$

(4) 高い建物はこの問題で板ばねを長くした場合と似ており，同じ変位量に対する弾性力が小さくなるのでばね定数も小さくなる．また，高い建物では質量が大きい．このため，振動の周期は長くなってゆっくりと大きく揺れる．

１０章　単振動（２）

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 運動方程式は,

$$\begin{cases} x \geqq 0 \text{ のとき} \cdots ma = -kx \\ x < 0 \text{ のとき} \cdots ma = k \cdot (-x) \end{cases}$$

(2) 加速度を求めると,

$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t) - \omega^2 B\cos(\omega t) \qquad \therefore \quad a = -\omega^2 x$$

これと (1) より,

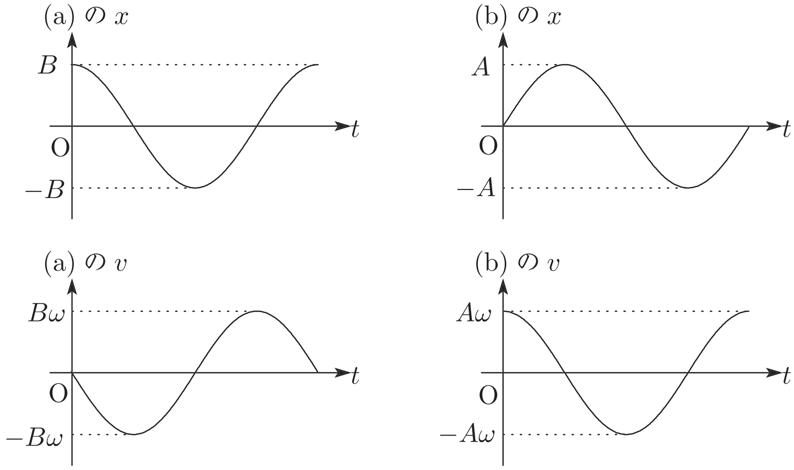
$$m \cdot (-\omega^2 x) = -kx \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(3) (a) 振動の右端となる $x = B$ から，初速度 0 で動き始めた.

(b) 振動の中心となる $x = 0$ から，初速度 $A\omega$ で動き始めた.

《解説》

(3) では $x-t$ グラフおよび $v-t$ グラフを描いてみるとよい．(a)，(b) それぞれについてのグラフは次のようになる.



【2】

《解答》

(1) 力のつり合いより，

$$0 = kl - mg \qquad \therefore \quad k = \frac{mg}{l}$$

(2) 位置 x におけるばねの伸びは $l - x$ と表せるので，運動方程式は，

$$\begin{aligned} ma &= k(l - x) - mg \\ &= \frac{mg}{l}(l - x) - mg \end{aligned}$$

(3) (2) より，

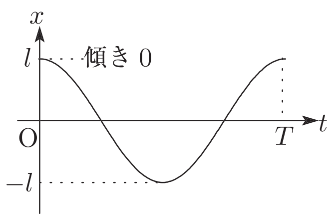
$$ma = -\frac{mg}{l}x \qquad \therefore \quad a = -\frac{g}{l}x$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(4) 初期条件をふまえると，$x - t$ グラフは右図のようになるので，

$$x = l\cos(\omega t) = l\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$



【3】

《解答》

(1) つり合いの位置におけるばねの伸びを s，張力を F_0 とおくと，

$$\begin{cases} 0 = 2mg + F_0 - ks \\ 0 = mg - F_0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} F_0 = mg \\ s = \dfrac{3mg}{k} \end{cases}$$

位置 x における加速度を a，張力を F とすると，運動方程式は，

$$\begin{cases} 2m \cdot a = 2mg + F - k\left(\dfrac{3mg}{k} + x\right) \quad \cdots ① \\ m \cdot a = mg - F \quad \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より，

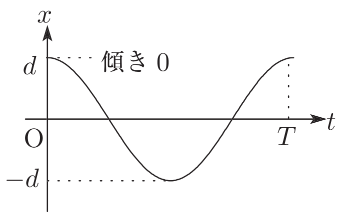
$$3ma = -kx \qquad \therefore \quad a = -\frac{k}{3m}x \quad \cdots (*)$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数}\ \omega = \sqrt{\frac{k}{3m}} \qquad \therefore \quad \text{周期}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

(2) 初期条件をふまえると，$x - t$ グラフは右図のようになるので，

$$x = d\cos(\omega t) = d\cos\left(\sqrt{\frac{k}{3m}}t\right)$$



(3) $(*)$ を ② に代入すると，

$$m \cdot \left(-\frac{k}{3m}x\right) = mg - F \qquad \therefore \quad F = mg + \frac{1}{3}kx$$

(4) (2)，(3) より，$x_{\min} = -d$ のとき F は最小となる．また，糸がたるまない限界のとき $F_{\min} = 0$ なので，

$$mg + \frac{k}{3} \cdot (-d_{\max}) = 0 \qquad \therefore \quad d_{\max} = \frac{3mg}{k}$$

【4】

《解答》

(イ) ばねが最も縮んだときのばねの縮みを L として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+0=0+\frac{1}{2}kL^2 \qquad \therefore \quad L=v\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

(ロ) ばねが縮んでいるとき，弾性力が右向きに作用し右向きの加速度を生じるので，B が A から受ける摩擦力の向きは右向きと分かる．加速度の x 成分を a とすると，A および B の運動方程式は，

$$\begin{cases} Ma=f-kx \quad \cdots ① \\ ma=-f \quad \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より，

$$(M+m)a=-kx \qquad \therefore \quad a=-\frac{k}{M+m}x \quad \cdots (*)$$

ここでは縮み x が負になることはないので，

$$|a|=\left|-\frac{k}{M+m}x\right|=\frac{k}{M+m}x$$

(ハ) $(*)$ を ② に代入すると，

$$m\cdot\left(-\frac{k}{M+m}x\right)=-f \qquad \therefore \quad f=\frac{km}{M+m}x$$

(ニ) $x=L$ のとき，f は最大となるので，

$$f_{\max}=\frac{km}{M+m}\cdot v\sqrt{\frac{M+m}{k}}=mv\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

(ホ) B が鉛直方向で受ける力のつり合いより，垂直抗力は $N=mg$ と分かる．B が滑らないための条件 $f_{\max}\leqq \mu N$ より，

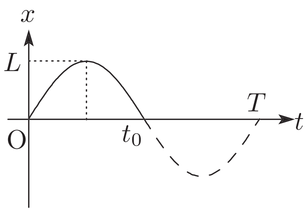
$$mv\sqrt{\frac{k}{M+m}}\leqq \mu\cdot mg \qquad \therefore \quad v\leqq \mu g\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

(ヘ) $(*)$ より，運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

初期条件をふまえると，$x-t$ グラフは右図のようになる．
求める時間を t_0 とおくと，

$$t_0 = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$



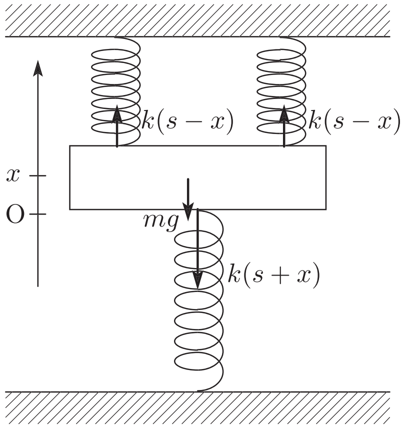
添削課題

《解答》

(1) 力のつり合いより,

$$0 = ks \cdot 2 - mg - ks \qquad \therefore \quad s = \frac{mg}{k}$$

(2) つり合いの位置とくらべて，上側のばねは長さが x だけ減少し，下側のばねは長さが x だけ増加するので，それぞれの伸びは,



上側のばね $\cdots \; s - x = \dfrac{mg}{k} - x$

下側のばね $\cdots \; s + x = \dfrac{mg}{k} + x$

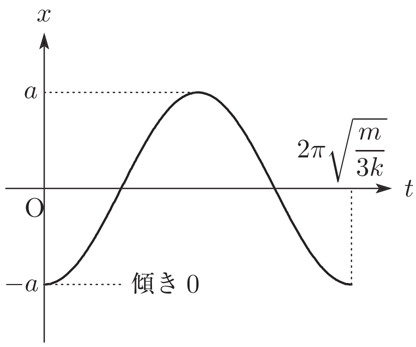
(3) (2) の伸びを用いると，運動方程式は,

$$\begin{aligned} m\alpha &= k\left(\frac{mg}{k} - x\right) \cdot 2 - mg - k\left(\frac{mg}{k} + x\right) \\ &= -3kx \end{aligned}$$

(4) (3) より,

$$\alpha = -\frac{3k}{m}x \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(5) 初期条件を満たす $x - t$ グラフは右図のようになるので,



$$\begin{aligned} x(t) &= -a\cos(\omega t) \\ &= -a\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

配点

各 20 点 ×5

P2J

高２東大物理

Z-KAI

会員番号		氏　名	