M2JS/M2J

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２選抜東大数学

高２東大数学

問題

【1】(1) △ABC に余弦定理を適用して

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{8}$$

また，$\sin\angle ABC \geqq 0$ より

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\cos^2\angle ABC} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

ここで，OA = OB = OC より，O から △ABC に下ろした垂線の足 H は △ABC の外心となる．AH の長さは △ABC の外接円の半径 R になるので，正弦定理より

$$2R = \frac{CA}{\sin\angle ABC} = 6\cdot\frac{8}{3\sqrt{7}}$$

$$\therefore\quad AH = R = \frac{8\sqrt{7}}{7} \qquad (答)$$

(2) △AOH において，3 平方の定理より

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{49-\frac{64}{7}} = \sqrt{\frac{279}{7}} = \frac{3\sqrt{31}}{\sqrt{7}}$$

また，△ABC の面積は

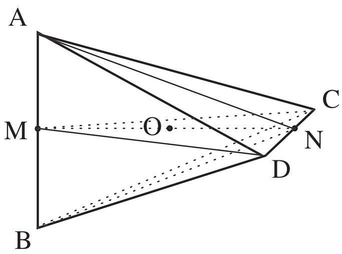
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

よって，4 面体 OABC の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle \mathrm{ABC} \cdot \mathrm{OH} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{31}}{\sqrt{7}} \\
&= \frac{15\sqrt{31}}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【2】4 面体 ABCD において，AB の中点を M，CD の中点を N とする．すると，4 面体 ABCD は平面 ABN に関して対称であるから，外接球の中心 O は平面 ABN 上の点である．
同様に考えると，O は平面 CDM 上の点でもある．よって，O は線分 MN 上の点であり，対称性より O は線分 MN の中点である．

図 8.1



いま，△ACN で 3 平方の定理より

$$
\mathrm{AN}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CN}^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}
$$

よって，△AMN で 3 平方の定理より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{MN}^2 = \mathrm{AN}^2 - \mathrm{AM}^2 = \frac{9}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4 \\
\therefore\quad &\mathrm{MN} = 2 \quad (\because\ \mathrm{MN} > 0) \\
\therefore\quad &\mathrm{OM} = 1
\end{aligned}
$$

すると，△AOM で 3 平方の定理より

$$
\begin{aligned}
r = \mathrm{AO} &= \sqrt{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{OM}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【3】(1) $\angle\mathrm{POA} = 90^\circ$ であるから，$\mathrm{OA} = a$ とおくと

$$\tan\angle\mathrm{APO} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}} = \frac{a}{\mathrm{OP}} \quad \cdots ①$$

0° から 90° までの間で，正接の値は角度が大きいほど大きい．a は一定であるから OP が最小のとき，$\angle\mathrm{APO}$ が最大となる．このとき $\mathrm{OP} \perp \mathrm{BC}$ となる．

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{a}{\mathrm{OB}} = \frac{1}{5} \text{ より} \qquad \mathrm{OB} = 5a$$

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} = \frac{a}{\mathrm{OC}} = \frac{1}{12} \text{ より} \qquad \mathrm{OC} = 12a$$

$\triangle\mathrm{BOC}$ において 3 平方の定理より

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(5a)^2 + (12a)^2} = 13a$$

ゆえに

$$\sin\angle\mathrm{OBC} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{BC}} = \frac{12}{13}$$

また，$\triangle\mathrm{OPB}$ において

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OB}\sin B = 5a \times \frac{12}{13} = \frac{60}{13}a$$

これを ① に代入すると

$$\tan\angle\mathrm{APO} = \frac{13}{60} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\triangle\mathrm{AOB}$ で，3 平方の定理より

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2} = \sqrt{a^2 + (5a)^2} = \sqrt{26}a$$

同様にして

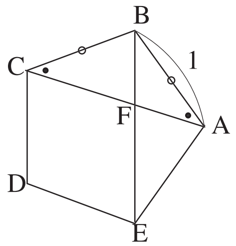
$$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OC}^2} = \sqrt{a^2 + (12a)^2} = \sqrt{145}a$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}} \\ &= \frac{26a^2 + 145a^2 - 169a^2}{2\sqrt{26}\sqrt{145}a^2} \\ &= \frac{\sqrt{3770}}{3770} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【4】(1) AC と BE の交点を F とおく.

図 8.2



$\angle ABC = 108^\circ$ であるから

$$\angle ACB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$
$$\therefore \quad \angle DCF = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

$\triangle ABE$ についても同様にして $\angle DEF = 72^\circ$
また, $\angle FAB = \angle FBA = 36^\circ$ より

$$\angle CFE = \angle AFB = 108^\circ$$

$\angle CDE = 108^\circ$, $CD = DE = 1$ より, 4 角形 CDEF はひし形であるから

$$CF = 1$$

$\angle FAB = \angle FBA = 36^\circ$, $\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ$ より

$$\triangle ABC \backsim \triangle AFB$$

よって, $AC = x$ とおくと, $AB : AC = AF : AB$ であるから

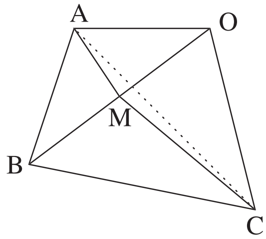
$$1 : x = (x-1) : 1 \qquad \therefore \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$x > 0$ に注意して

$$AC = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 正 20 面体の隣り合う 2 面 OAB と OBC について, 頂点 A, B, C は (1) の正 5 角形の頂点 A, B, C に対応させることができる.

図 8.3



辺 OB の中点を M とすると 2 面 OAB，OBC は 1 辺の長さが 1 の正 3 角形なので

$$\mathrm{AM} = \mathrm{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

AM ⊥ OB, CM ⊥ OB より，∠AMC が 2 面のなす角 θ なので，△AMC について余弦定理より

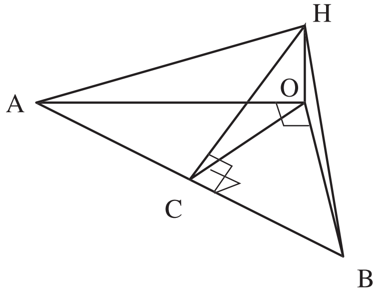
$$\cos\theta = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】この平面と水平面の交線を AB とする.

図 1.1



いま，水平面上に点 O を，$OA \perp OB$ となるようにとる．さらに，OA，OB それぞれに垂直な直線と，題意の平面との交点を H とおく.

点 O から線分 AB に下ろした垂線の足を C とすると，もっとも急な方向の勾配（傾き）が $\dfrac{1}{3}$ であることから

$$OC = 3OH$$

である．ここで，南北方向，東西方向をそれぞれ OA，OB とする.

南北方向の勾配が $\dfrac{1}{5}$ であるから

$$OA = 5OH$$

$\triangle$OAC は OA を斜辺にもつ直角 3 角形であるから

$$AC = \sqrt{5^2 - 3^2}OH = 4OH$$

$\triangle$OAC と $\triangle$BAO は相似であるから

$$\frac{OB}{CO} = \frac{AO}{AC}$$

より

$$OB = \frac{CO \cdot AO}{AC} = \frac{15}{4}OH$$

よって，東西方向の勾配は

$$\frac{OH}{OB} = \frac{4}{15} \qquad (答)$$

問題

【1】(1) 加法定理を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos(3\theta+2\theta) = \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\ &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)2\sin\theta\cos\theta \\ &= (4x^3-3x)(2x^2-1) - 2x\sin^2\theta(3-4\sin^2\theta) \\ &= 8x^5 - 10x^3 + 3x - 2x(1-x^2)\{3-4(1-x^2)\} \\ &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \qquad (答)\end{aligned}$$

(2) 積和公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}(与式) &= \frac{1}{2}(\sin 60^\circ + \sin 20^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 70^\circ - \cos 30^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 20^\circ - \cos(90^\circ - 20^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 20^\circ - \sin 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (答)\end{aligned}$$

＜別解＞

加法定理を用いると

$$\begin{aligned}(与式) &= \sin 40^\circ \cos 20^\circ + \sin(90^\circ - 40^\circ)\sin 20^\circ \\ &= \sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ \\ &= \sin(40^\circ + 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(3) 積和公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ \\ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ \cos 80^\circ + \cos 20^\circ \cos 80^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos 80^\circ - \cos 80^\circ + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8} \qquad (答)\end{aligned}$$

＜別解＞

$A=\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha$ とおくと

$$\begin{aligned}A\sin\alpha&=\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\\&=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\\&=\frac{1}{4}\sin4\alpha\cos4\alpha\\&=\frac{1}{8}\sin8\alpha\end{aligned}$$

$\alpha=20^\circ$ を代入して

$$\begin{aligned}A\sin20^\circ&=\frac{1}{8}\sin(180^\circ-20^\circ)\\A\sin20^\circ&=\frac{1}{8}\sin20^\circ\\\therefore\quad A&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

【2】(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\begin{aligned}&2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0\\&2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0\\&(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0\\&\sin\theta=\frac{1}{2},\ -1\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\quad (k\text{ は整数})$$ (答)

(2) 与式より

$$\begin{aligned}&\sin\theta<2\sin\theta\cos\theta\\&\sin\theta(2\cos\theta-1)>0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\sin\theta>0\\\cos\theta>\frac{1}{2}\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}\sin\theta<0\\\cos\theta<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}0<\theta<\pi\\0<\theta<\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}<\theta<2\pi\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}\pi<\theta<2\pi\\\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

$$\therefore\quad 0<\theta<\frac{\pi}{3},\ \pi<\theta<\frac{5\pi}{3}$$ (答)

(3) 3 角関数の合成より

$$3\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$$

(但し，α は $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ をみたす $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ の角とする)

ここで，$0\leqq\theta<2\pi \iff \alpha\leqq\theta+\alpha<2\pi+\alpha$ であるから

$$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$$

等号は，左右それぞれ $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\theta=\frac{3\pi}{2}-\alpha$ のとき，成立.

よって，求める最大値は $\sqrt{13}$，最小値は $-\sqrt{13}$.　　(答)

【3】(1) $t=\sin x+\cos x$ より

$$t^2=1+2\sin x\cos x \iff 2\sin x\cos x=t^2-1$$

2 倍角の公式を用いて，与式を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2+2\sin 2x-\sin x-\cos x \\ &= 2+4\sin x\cos x-(\sin x+\cos x) \\ &= 2+2(t^2-1)-t=2t^2-t \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) (1) より

$$y=2t^2-t=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

また，3 角関数の合成より

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x<2\pi$ より

$$\begin{aligned} &-1\leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1 \\ \therefore\quad &-\sqrt{2}\leqq \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq \sqrt{2}$ だから，求める y の最大値，最小値は

$$\begin{cases} t=-\sqrt{2}\text{ のとき} & \text{最大値 } 4+\sqrt{2} \\ t=\dfrac{1}{4}\text{ のとき} & \text{最小値 } -\dfrac{1}{8} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【4】与条件より

$$\sin\theta+\cos 2\theta=a \ \cdots①$$
$$0\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2} \ \cdots②$$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ だから，① は

$$-2\sin^2\theta+\sin\theta+1=a$$

と書き直せる．そこで

$$\sin\theta=t \ \cdots③$$

とおくと，① は

$$-2t^2+t+1=a \ \cdots④$$

と表すことができ，また ② より，t は

$$-1\leqq t\leqq 1 \ \cdots⑤$$

の範囲のすべての値をとる．

図 9.1

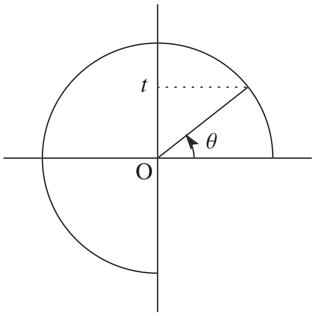
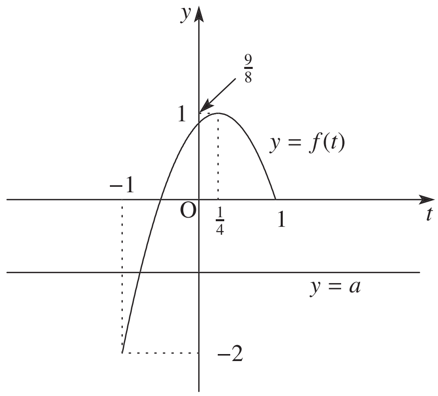


図 9.2



⑤ をみたす 1 個の t に対し，②，③ を同時にみたす θ は

$$\begin{cases} -1 \leqq t < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 0 \leqq t < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ t = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

である (図 9.1 参照).

したがって，④ をみたす t のうち

$$\begin{cases} -1 \leqq t < 0 \text{ または } t = 1 \text{ をみたすものが } N_1 \text{個} \\ 0 \leqq t < 1 \text{ をみたすものが } N_2 \text{個} \end{cases}$$

あるとし，①，② を同時にみたす θ が N 個あるとすると

$$N = N_1 + 2N_2 \quad \cdots ⑥$$

である.

次に，$f(t) = -2t^2 + t + 1$ とおくと

$$f(t) = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$
$$f(-1) = -2,\ f(1) = 0$$

であることを用い，$y = f(t)$ と $y = a$ のグラフを考える.

図 9.2 より N_1, N_2 を求めると，⑥ より，求める個数は次の表のようになる.

a の範囲	N_1	N_2	N
$\frac{9}{8} < a$	0	0	0
$a = \frac{9}{8}$	0	1	2
$1 \leqq a < \frac{9}{8}$	0	2	4
$0 < a < 1$	1	1	3
$a = 0$	2	0	2
$-2 \leqq a < 0$	1	0	1
$a < -2$	0	0	0

まとめると

$$\begin{cases} a < -2,\ \dfrac{9}{8} < a \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ -2 \leqq a < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 0,\ \dfrac{9}{8} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 1 \leqq a < \dfrac{9}{8} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 図 9.3 の単位円を考えると $\sin\beta = \sin\alpha$ のとき，n を整数として

$$\beta = \alpha + 2n\pi \quad \text{または} \quad \beta = (\pi - \alpha) + 2n\pi$$

これをまとめて

$$\beta = (-1)^m \alpha + m\pi \quad (m \text{ は整数}) \qquad \text{(答)}$$

図 9.3

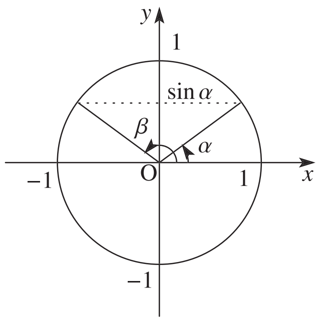
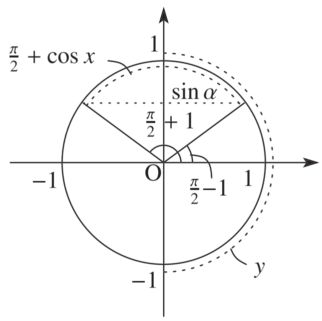


図 9.4



(2) 与式を変形すると

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right)$$

ここで，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$\frac{\pi}{2} - 1 \leqq \frac{\pi}{2} + \cos x \leqq \frac{\pi}{2} + 1$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから，$\dfrac{\pi}{2} + \cos x$ が y の変域に含まれるかどうかで場合分けを

する (図 9.4 参照).

(i) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} + \cos x \leqq \dfrac{\pi}{2} + 1$，すなわち $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$y = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right) = \frac{\pi}{2} - \cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad 2y - \sin x &= \pi - 2\cos x - \sin x \\ &= \pi - \sqrt{5}\cos(x - \theta) \end{aligned}$$

ただし，θ は $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ をみたす角である.

このとき $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ だから，$-\theta \leqq x - \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} - \theta$ では

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \leqq \cos(x - \theta) \leqq 1$$

であり，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ だから

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leqq \cos(x - \theta) \leqq 1$$
$$\therefore \quad \pi - \sqrt{5} \leqq 2y - \sin x \leqq \pi - 1$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} - 1 \leqq \dfrac{\pi}{2} + \cos x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$y = \frac{\pi}{2} + \cos x$$
$$\therefore \quad 2y - \sin x = \pi + 2\cos x - \sin x$$
$$= \pi + \sqrt{5}\cos(x + \theta)$$

ただし，θ は (i) と同じ角である．
このとき，$\dfrac{\pi}{2} + \theta \leqq x + \theta \leqq \pi + \theta$ では

$$-1 \leqq \cos(x + \theta) \leqq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

であり，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ だから

$$-1 \leqq \cos(x + \theta) \leqq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore \quad \pi - \sqrt{5} \leqq 2y - \sin x \leqq \pi - 1$$

したがって，いずれの場合においても

$$\pi - \sqrt{5} \leqq 2y - \sin x \leqq \pi - 1$$

となるから，求める最大値，最小値は

最大値 $\pi - 1$，最小値 $\pi - \sqrt{5}$ (答)

添削課題

【1】与式を変形すると

$$f(\theta) = \left(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\right)^2 + \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$$

となる．ここで，$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくと

$$f(\theta) = t^2 + t$$

まず，t の範囲を求める．3 角関数の合成より

$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{7}{6}\pi$$

すなわち

$$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$$

$$\therefore \quad -1 \leqq \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \leqq 2$$

$$\therefore \quad -1 \leqq t \leqq 2$$

さて

$$f(\theta) = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

であるから

$$\begin{cases} t = 2 \text{ のとき} & \text{最大値 } 6 \\ t = -\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & \text{最小値 } -\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

１０章　場合の数

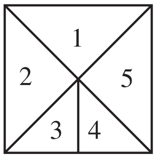
問題

【1】(1) 5 色を全部使うことから，5 色の並び順と等しく

$$5! = 120(\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

(2) 4 色で塗り分けるには同じ色を 2 か所に塗ることになる．

図 10.1



同じ色となる領域の塗り方は，図 10.1 において

$$(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5)$$

の 5 通りある．そのうえで，4 色を全て使って塗り分けるので

$$5 \times 4! = 120(\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

(3) 同じ色で 3 か所以上を塗ることは不可能なので，1 色のみが 1 か所に塗られることになる．この領域が決まれば，残る 4 か所は同じ色となる対に分かれるので，3 色での塗り分け方を考える．

$$5 \times 3! = 30(\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

【2】m, m, e, o, r, y の並べ方を考える．

(i) me の順に隣り合う場合 (mem のように隣り合う場合も含む)

me, m, o, r, y

を並べる並べ方の総数を考えて

$$5! = 120(\text{通り})$$

(ii) em の順に隣り合う場合 (mem のように隣り合う場合も含む) も同様に

120 通り

(iii) mem のように隣り合う場合

mem, o, r, y

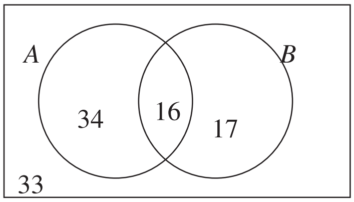
を並べる並べ方の総数を考えて

$$4! = 24 \text{ 通り}$$

よって，求める並べ方の総数は

$$120 \times 2 - 24 = 216 \text{ 通り} \qquad (\text{答})$$

図 10.2



【3】2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とすると，6 の倍数の集合は $A \cap B$ であり，それぞれの要素の個数は図 10.2 に示すようになる．

題意をみたす選び方は次の 3 つの場合がある．

(i) 1 つを $A \cap \overline{B}$ に属するものから選び，1 つを $\overline{A} \cap B$ に属するものから選ぶ場合

$$34 \times 17 = 578 \text{ 通り}$$

(ii) 1 つを $A \cap B$ に属するものから選び，1 つをそれ以外から選ぶ場合

$$16 \times (100 - 16) = 1344 \text{ 通り}$$

(iii) 2 つとも $A \cap B$ に属するものから選ぶ場合

$${}_{16}\mathrm{C}_2 = 120 \text{ 通り}$$

以上より

$$578 + 1344 + 120 = 2042 \text{ 通り} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 題意をみたす a, b, c, d の組を書き出すと

$$(1,\ 1,\ 1,\ 7),\ (1,\ 1,\ 2,\ 6),\ (1,\ 1,\ 3,\ 5),$$
$$(1,\ 1,\ 4,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2,\ 5),\ (1,\ 2,\ 3,\ 4),$$
$$(1,\ 3,\ 3,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 4),\ (2,\ 2,\ 3,\ 3)$$

よって，題意をみたす a, b, c, d の組は，9 組.　　(答)

(2) (1) で書き出したそれぞれの組について，数字の並べ方を考える.

(i) a, b, c, d がそれぞれ互いに異なるとき

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

の 1 通りで，このとき数字の並べ方は

$$4! = 24\ (\text{通り})$$

(ii) a, b, c, d のうち 2 数が等しく，その他はそれぞれ互いに異なるとき

$$(1,\ 1,\ 2,\ 6),\ (1,\ 1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 2,\ 2,\ 5)$$

の 3 通りで，このとき数字の並べ方は

$$\frac{4!}{2!} = 12\ (\text{通り})$$

(iii) a, b, c, d のうち 3 数が等しく，もう 1 数は異なるとき

$$(1,\ 1,\ 1,\ 7),\ (1,\ 3,\ 3,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 4)$$

の 3 通りで，このとき数字の並べ方は

$$\frac{4!}{3!} = 4\ (\text{通り})$$

(iv) a, b, c, d のうち等しい数字の組が 2 組あるとき

$$(1,\ 1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 3,\ 3)$$

の 2 通りで，このとき数字の並べ方は

$$\frac{4!}{2!2!} = 6\ (\text{通り})$$

以上より，題意をみたす a, b, c, d の組は

$$1 \cdot 24 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 84\ (\text{組})\qquad (\text{答})$$

＜別解＞

10 個の ◯ を横 1 列に並べ，その間の 9 ヶ所のうち 3 ヶ所を選んで | を入れる場合の数を考える．このとき，3 個の | で仕切られた部分の ◯ の個数を左から順に a, b, c, d とすると，題意の整数の組 a, b, c, d と 1 対 1 に対応する.

したがって，求める場合の数は

$${}_9\mathrm{C}_3 = 84\ (\text{組})$$

【5】(1) 買ったリンゴ，カキ，ミカンの個数をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とすれば

$$100a + 50b + 10c = 100k$$
$$\therefore\quad 10a + 5b + c = 10k \ \cdots①$$
$$\therefore\quad 5b + c = 10(k - a)$$

$5b + c \geqq 0$ より

$$a = 0,\ 1, \ldots,\ k$$

ここで，$i = k - a$ とおくと $i = 0,\ 1, \ldots,\ k$ であり

$$5b + c = 10i \qquad \therefore\quad c = 5(2i - b)$$

$c \geqq 0$ より

$$b = 0,\ 1, \ldots,\ 2i$$

ゆえに，a すなわち i を定めると，それに対して $b,\ c$ の組は $(2i + 1)$ 組定まるから，求める買い方は

$$\sum_{i=0}^{k}(2i + 1) = k(k + 1) + (k + 1)$$
$$= (k + 1)^2 \ \text{(通り)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 買ったメロンの個数を d とすれば

$$100a + 50b + 10c + 500d = 5000$$
$$\therefore\quad 10a + 5b + c = 10(50 - 5d)$$

$10a + 5b + c \geqq 0$ より

$$50 - 5d \geqq 0 \qquad \therefore\quad d = 0,\ 1, \ldots,\ 10$$

(1) より，① をみたす負でない整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は $(k + 1)^2$ 通りあるから，5000 円分買う買い方は

$$\sum_{d=0}^{10}\{(50 - 5d) + 1\}^2 = \sum_{d=0}^{10}\{5(10 - d) + 1\}^2$$
$$= \sum_{j=0}^{10}(5j + 1)^2 \ \ (j = 10 - d \text{ とおいた})$$
$$= 25\sum_{j=0}^{10} j^2 + 10\sum_{j=0}^{10} j + \sum_{j=0}^{10} 1$$
$$= 25 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 11$$
$$= 9625 + 550 + 11 = 10186 \ \text{(通り)} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a + b + c = 16$ $(a \leqq 8,\ b \leqq 8,\ c \leqq 8)$ をみたす負でない整数の組 $(a,\ b,\ c)$ が何通りあるかを考える．

まず，a を固定して

$$b + c = 16 - a$$

そこで，$i = 16 - a$ とおくと，$0 \leqq a \leqq 8$ より

$$i = 8,\ 9, \ldots,\ 16$$

で，$b + c = i$ かつ $0 \leqq b \leqq 8$ より

$$0 \leqq i - c \leqq 8 \qquad \therefore \quad i - 8 \leqq c \leqq i$$

これと $0 \leqq c \leqq 8$ をあわせると，条件をみたす c は

$$c = i - 8,\ i - 7, \ldots,\ 7,\ 8$$

よって，a すなわち i を定めると，それに対して $b,\ c$ の組は

$$8 - (i - 8) + 1 = 17 - i \text{ (通り)}$$

あるので，求める買い方は

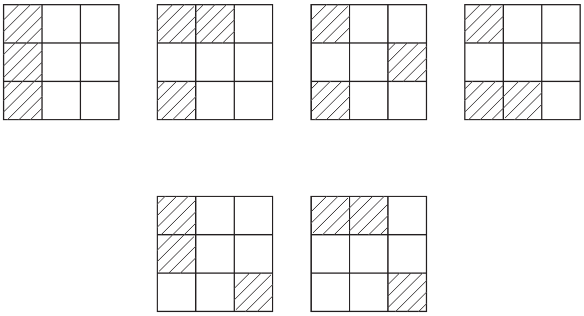
$$\begin{aligned}\sum_{i=8}^{16}(17 - i) &= 9 + 8 + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(9 + 1)\cdot 9 = 45 \text{ (通り)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【6】下図のように①〜③を分類する．

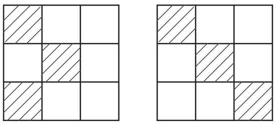
①	②	①
②	③	②
①	②	①

(i) ①を 3 つ塗る場合，1 通り

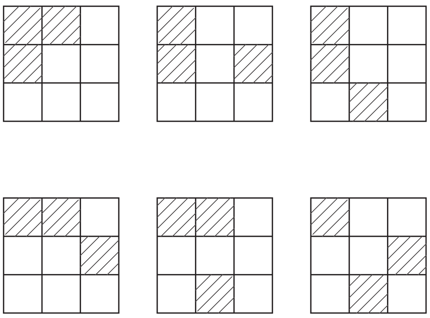
(ii) ①を 2 つ，②を 1 つ塗る場合，下図の 6 通り



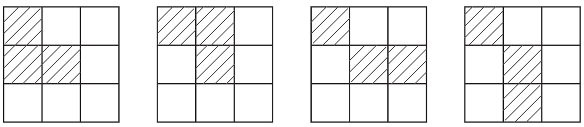
(iii) ①を 2 つ，③を塗る場合，2 通り



(iv) ①を 1 つ，②を 2 つ塗る場合，下図の 6 通り

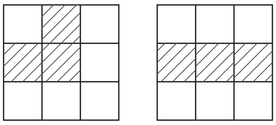


(v) ①を 1 つ，②を 1 つ，③を塗る場合，下図の 4 通り



(vi) ②を 3 つ塗る場合，1 通り

(vii) ②を 2 つ，③を塗る場合，2 通り



以上より

22 通り　　(答)

添削課題

【1】ある色を最初塗るときは，どこに塗っても同じである．その対面の色の塗り方は 5 通り．
これを上および下とすると，残りの 4 面は 4 色を並べる円順列と考えて

$$(4-1)! = 3! = 6 \text{ 通り}$$

よって

$$5 \times 6 = 30 \text{ 通り} \qquad \text{(答)}$$

M2JS/M2J
高２選抜東大数学
高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	