M1JK

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１東大数学Ｋ

問題

【1】(1) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n=3k$ のとき

$$n^2=9k^2=3(3k^2)$$

となる．$3k^2$ は整数だから，$3(3k^2)$ は 3 で割ると余りは 0 である．

$n=3k+1$ のとき

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

となる．$3k^2+2k$ は整数だから，$3(3k^2+2k)+1$ は 3 で割ると余りは 1 である．

$n=3k+2$ のとき

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

となる．$3k^2+4k+1$ は整数だから，$3(3k^2+4k+1)+1$ は 3 で割ると余りは 1 である．

よって，n を整数とするとき，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 である．

（証明終）

(2) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n=3k$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+5n&=n(n^2+5)\\&=3k\{(3k)^2+5\}\\&=3k(9k^2+5)\end{aligned}$$

となる．$9k^2+5$ は整数だから，$3k(9k^2+5)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+5n&=n(n^2+5)\\&=(3k+1)\{(3k+1)^2+5\}\\&=(3k+1)(9k^2+6k+6)\\&=(3k+1)\cdot3(3k^2+2k+2)\\&=3(3k+1)(3k^2+2k+2)\end{aligned}$$

となる．$3k+1,\ 3k^2+2k+2$ は整数だから，$3(3k+1)(3k^2+2k+2)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^3+5n&=n(n^2+5)\\&=(3k+2)\{(3k+2)^2+5\}\\&=(3k+2)(9k^2+12k+9)\\&=(3k+2)\cdot3(3k^2+4k+3)\\&=3(3k+2)(3k^2+4k+3)\end{aligned}$$

となる．$3k+2,\ 3k^2+4k+3$ は整数だから，$3(3k+2)(3k^2+4k+3)$ は 3 の倍数である．よって，n を整数とするとき，n^3+5n は 3 の倍数である．（証明終）

＜別解＞

$$n^3+5n=n(n+1)(n+2)-3n^2+3n=n(n+1)(n+2)-3n(n-1)$$

$n(n+1)(n+2)$ は連続する 3 つの整数 $n,\ n+1,\ n+2$ の積だから 6 の倍数である．これを $6m$ (m は整数) とおくと，

$$n^3+5n=6m-3n(n-1)=3(2m-n^2+n)$$

となる．$2m-n^2+n$ は整数なので，$3(2m-n^2+n)$ は 3 の倍数である．
すなわち，n^3+5n は 3 の倍数である．（証明終）

(3) (i) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば
$n=2k$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n^2-3n+2) \\ &= n(n-1)(n-2) \\ &= 2k(2k-1)(2k-2) \end{aligned}$$

となる．$k(2k-1)(2k-2)$ は整数だから，$2k(2k-1)(2k-2)$ は 2 の倍数である．
$n=2k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2) \\ &= (2k+1)(2k+1-1)(2k+1-2) \\ &= (2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1) \\ &= 2k(2k+1)(2k-1) \end{aligned}$$

となる．$k(2k+1)(2k-1)$ は整数だから，$2k(2k+1)(2k-1)$ は 2 の倍数である．
よって，n を整数とすると n^3-3n^2+2n は 2 の倍数である．

(ii) $l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ とすれば
$n=3l$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2) \\ &= 3l(3l-1)(3l-2) \end{aligned}$$

となる．$l(3l-1)(3l-2)$ は整数だから，$3l(3l-1)(3l-2)$ は 3 の倍数である．
$n=3l+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2) \\ &= (3l+1)(3l+1-1)(3l+1-2) \\ &= (3l+1)\cdot 3l\cdot(3l-1) \\ &= 3l(3l+1)(3l-1) \end{aligned}$$

となる．$l(3l+1)(3l-1)$ は整数だから，$3l(3l+1)(3l-1)$ は 3 の倍数である．

$n=3l+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^3-3n^2+2n&=n(n-1)(n-2)\\&=(3l+2)(3l+2-1)(3l+2-2)\\&=(3l+2)(3l+1)\cdot 3l\\&=3l(3l+1)(3l+2)\end{aligned}$$

となる．$l(3l+1)(3l+2)$ は整数だから，$3l(3l+1)(3l+2)$ は 3 の倍数である．

よって，n を整数とすると n^3-3n^2+2n は 3 の倍数である．

(i)(ii) より，n^3-3n^2-2n は 2 の倍数かつ 3 の倍数なので，6 の倍数である．

（証明終）

＜別解＞

$$n^3-3n^2+2n=n(n-1)(n-2)$$

$n(n-1)(n-2)$ は連続する 3 つの整数 $n-2$, $n-1$, n の積だから 6 の倍数である．

すなわち，n^3-3n^2+2n は 6 の倍数である． （証明終）

(4)

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(2n^2-3n+1)\\&=n(2n-1)(n-1)\end{aligned}$$

(i) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n=3k$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(2n^2-3n+1)\\&=n(n-1)(2n-1)\\&=3k(3k-1)\{2\cdot(3k)-1\}\\&=3k(3k-1)(6k-1)\end{aligned}$$

となる．$k(6k-1)(3k-1)$ は整数だから，$3k(6k-1)(3k-1)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(n-1)(2n-1)\\&=(3k+1)(3k+1-1)\{2(3k+1)-1\}\\&=(3k+1)\cdot 3k\cdot(6k+1)\\&=3k(3k+1)(6k+1)\end{aligned}$$

となる．$k(3k+1)(6k+1)$ は整数だから，$3k(3k+1)(6k+1)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(n-1)(2n-1)\\&=(3k+2)(3k+2-1)\{2(3k+2)-1\}\\&=(3k+2)(3k+1)(6k+3)\\&=(3k+2)(3k+1)\cdot 3(2k+1)\\&=3(2k+1)(3k+2)(3k+1)\end{aligned}$$

となる．$(2k+1)(3k+2)(3k+1)$ は整数だから，$3(2k+1)(3k+2)(3k+1)$ は 3 の倍数である．

よって，n を整数とすると，$2n^3-3n^2+n$ は 3 の倍数である．

(ii) $l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば
$n=2l$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(n-1)(2n-1)\\&=2l(2l-1)(2\cdot 2l-1)\\&=2l(4l-1)(2l-1)\end{aligned}$$

となる．$l(4l-1)(2l-1)$ は整数だから，$2l(4l-1)(2l-1)$ は 2 の倍数である．
$n=2l+1$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(n-1)(2n-1)\\&=(2l+1)(2l+1-1)\{2(2l+1)-1\}\\&=(2l+1)\cdot 2l\cdot(4l+1)\\&=2l(2l+1)(4l+1)\end{aligned}$$

となる．$l(2l+1)(4l+1)$ は整数だから，$2l(2l+1)(4l+1)$ は 2 の倍数である．
よって，n を整数とすると，$2n^3-3n^2+n$ は 2 の倍数である．

(i)(ii) より，$2n^3-3n^2+n$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数なので，6 の倍数である．
（証明終）

＜別解＞

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=2n(n+1)(n-1)-3n^2+3n\\&=2n(n+1)(n-1)-3n(n-1)\end{aligned}$$

$n(n-1)$ は連続する 2 つの整数 $n-1$, n の積だから 2 の倍数である．これを $2k$ (k は整数) とおく．また，$n(n+1)(n-1)$ は連続する 3 つの整数 $n-1,\ n,\ n+1$ の積なので 6 の倍数である．これを $6l$ (l は整数) とおくと

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=2\cdot 6l-3\cdot 2k\\&=12l-6k\\&=6(2l-k)\end{aligned}$$

となる．$2l-k$ は整数だから，$6(2l-k)$ は 6 の倍数である．
すなわち，$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である．（証明終）

(5)
$$\begin{aligned}4n^3+6n^2+2n&=2n(2n^2+3n+1)\\&=2n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

$n(n+1)(2n+1)$ は整数なので $2n(n+1)(2n+1)$ は 2 の倍数である．
$n(n+1)(2n+1)$ について考える．

(i) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば
$n=2k$ のとき

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1)&=(2k)\cdot(2k+1)\cdot\{2\cdot(2k)+1\}\\&=2k(2k+1)(4k+1)\end{aligned}$$

となる．これは 2 の倍数である．

$n = 2k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1) &= (2k+1)(2k+1+1)\{2(2k+1)+1\} \\ &= (2k+1)(2k+2)(4k+3) \\ &= 2(k+1)(2k+1)(4k+3) \end{aligned}$$

となる．これは 2 の倍数である．

よって，n を整数とすると，$n(n+1)(2n+1)$ は 2 の倍数である．

(ii) $l = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n = 3l$ のとき

$$n(n+1)(2n+1) = 3l(3l+1)(6l+1)$$

となる．これは 3 の倍数である．

$n = 3l + 1$ のとき

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1) &= (3l+1)(3l+1+1)(6l+2+1) \\ &= (3l+1)(3l+2)(6l+3) \\ &= 3(2l+1)(3l+1)(3l+2) \end{aligned}$$

となる．これは 3 の倍数である．

$n = 3l + 2$ のとき

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1) &= (3l+2)(3l+2+1)(6l+4+1) \\ &= (3l+2)(3l+3)(6l+5) \\ &= 3(l+1)(3l+2)(6l+5) \end{aligned}$$

となる．これは 3 の倍数である．

よって，n を整数とすると，$n(n+1)(2n+1)$ は 3 の倍数である．

(i)(ii) より，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数である．

したがって，$4n^3 + 6n^2 + 2n$ は (6 の倍数) $\times$ (2 の倍数) なので，12 の倍数である．　（証明終）

＜別解＞

$$\begin{aligned} 4n^3 + 6n^2 + 2n &= 4n(n+1)(n+2) - 6n^2 - 6n \\ &= 4n(n+1)(n+2) - 6n(n+1) \end{aligned}$$

$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数 n，$n+1$ の積だから，2 の倍数である．これを $2k$ (k は整数) とおく．また，$n(n+1)(n+2)$ は連続する 3 つの整数 n，$n+1$，$n+2$ の積なので 6 の倍数である．これを $6l$ (l は整数) とおくと

$$\begin{aligned} 4n^3 + 6n^2 + 2n &= 4 \cdot 6l - 6 \cdot 2k \\ &= 24l - 12k \\ &= 12(2l - k) \end{aligned}$$

となる．$2l - k$ は整数だから $12(2l-k)$ は 12 の倍数である．

すなわち，$4n^3 + 6n^2 + 2n$ は 12 の倍数である．　（証明終）

【2】(1) 正の整数を，$6x+3$ とおくと，

$$6x+3=3(2x+1)$$

よって，$2x+1$ は整数だから，$3(2x+1)$ は 3 の倍数である．
つまり，この $6x+3$ を 3 で割ると，**商は $\boldsymbol{2x+1}$**

(2) この自然数を，$6x+5$ とおくと，

$$6x+5=2(3x+2)+1$$

$3x+2$ は整数だから，$2(3x+2)$ は 2 の倍数である．
つまり，この $6x+5$ を 2 で割ると，**商は $\boldsymbol{3x+2}$** で，**余りは 1**

(3) 正の整数 A を，

$$A=5x+3 \quad \cdots ①$$

とおく．また，

$$x=4y+3 \quad \cdots ②$$

とおける．② を ① に代入して

$$\begin{aligned} A &= 5x+3 \\ &= 5(4y+3)+3 \\ &= 20y+18 \\ &= 10(2y+1)+8 \end{aligned}$$

$2y+1$ は整数だから，$10(2y+1)$ は 10 の倍数である．
よって，この A を 10 で割ると余りは **8**

(4) ある自然数 A を 7 で割ったときの商を x とする．
すると，除法の原理より，x は 0 以上の整数で

$$A=7x+3$$

とおける．

$$\begin{aligned} A^2 &= (7x+3)^2 \\ &= 49x^2+42x+9 \\ &= 7(7x^2+6x+1)+2 \end{aligned}$$

$7x^2+6x+1$ は整数だから，$7(7x^2+6x+1)$ は 7 の倍数である．
よって，A^2 を 7 で割ると余りは **2**

(5) 正の整数 A を 12 で割ったときの商を x とする．
すると，除法の原理より，x は 0 以上の整数で

$$A = 12x + 3 \quad \cdots ①$$

とおける．
また，$A - B$ を 12 で割ったときの商を y とすると，

$$A - B = 12y \quad \cdots ②$$

② に ① を代入して

$$\begin{aligned} A - B &= 12y \\ (12x + 3) - B &= 12y \\ B &= 12x - 12y + 3 \\ &= 12(x - y) + 3 \end{aligned}$$

$x - y$ は整数だから，$12(x - y)$ は 12 の倍数である．
よって，B を 12 で割ると余りは **3**

(6) 正の整数 A を 13 で割ったときの商を x とする．
すると，除法の原理より，x は 0 以上の整数で

$$A = 13x + 4 \quad \cdots ①$$

とおける．
また，$A + B$ を 13 で割ったときの商を y とすると，

$$A + B = 13y \quad \cdots ②$$

② に ① を代入して

$$\begin{aligned} A + B &= 13y \\ (13x + 4) + B &= 13y \\ B &= 13y - 13x - 4 \\ &= 13(y - x - 1) + 9 \end{aligned}$$

$y - x - 1$ は整数だから，$13(y - x - 1)$ は 13 の倍数である．
よって，B を 13 で割ると余りは **9**

【3】 (1) 命題の対偶「整数 n が偶数ならば，n の平方は偶数」を証明する．
a を整数とすると

$$n = 2a$$

とおける．よって

$$\begin{aligned} n^2 &= (2a)^2 \\ &= 4a^2 \\ &= 2 \cdot 2a^2 \end{aligned}$$

となる．$2a^2$ は整数だから，$2\cdot 2a^2$ は偶数である．
よって n の平方は偶数である．
ゆえに題意は示された． （証明終）

(2) 命題の対偶「a, b が整数のとき，a, b の少なくとも一方が偶数ならば，積 ab は偶数」を証明する．
n, m を整数とすると

$$a = 2n \text{ もしくは } b = 2m$$

とおける．よって
$a = 2n$ のとき

$$\begin{aligned} ab &= (2n)\cdot b \\ &= 2nb \end{aligned}$$

となるので，$2nb$ は 2 の倍数（偶数）である．
$b = 2m$ のとき

$$\begin{aligned} ab &= a\cdot(2m) \\ &= 2ma \end{aligned}$$

となるので，$2ma$ は 2 の倍数（偶数）である．
よって ab は偶数である．
ゆえに題意は示された． （証明終）

(3) 命題の対偶「a, b が整数のとき，a, b がともに 3 の倍数でないならば，積 ab は 3 の倍数でない」を証明する．
n, m を整数とすると

$$a = 3n \pm 1,\ b = 3m \pm 1$$

とおける．よって

$$\begin{aligned} ab &= (3n \pm 1)(3m \pm 1) \\ &= 9mn \pm 3n \pm 3m + 1,\ 9mn \mp 3n \pm 3m - 1 \quad \text{（複号同順）} \end{aligned}$$

$$9mn \pm 3n \pm 3m + 1 = 3(3mn \pm n \pm m) + 1$$

となるので，$9mn \pm 3n \pm 3m + 1$ は 3 の倍数ではない．

$$\begin{aligned} 9mn \mp 3n \pm 3m - 1 &= 3(3mn \mp n \pm m) - 1 \\ &= 3(3mn \mp n \pm m - 1) + 3 - 1 \\ &= 3(3mn \mp n \pm m - 1) + 2 \end{aligned}$$

となるので，$9mn \mp 3n \pm 3m - 1$ は 3 の倍数ではない．
よって，ab は 3 の倍数ではない．
ゆえに題意は示された． （証明終）

(4) 命題の対偶「a, b が実数のとき，$a \leqq 2$ かつ $b \leqq 2$ ならば $a+b \leqq 4$」を証明する．
$a \leqq 2$ かつ $b \leqq 2$ ならば

$$a+b \leqq 2+2=4$$
$$\therefore\quad a+b \leqq 4$$

よって，$a \leqq 2$ かつ $b \leqq 2$ ならば $a+b \leqq 4$
ゆえに題意は示された．（証明終）

(5) 命題の対偶「x, y が正の数のとき，$x<1$ かつ $y<1$ ならば $x^2+y^2<2$」を証明する．
$0<x<1$ より

$$0^2<x^2<1^2$$
$$0<x^2<1$$

$0<y<1$ より

$$0^2<y^2<1^2$$
$$0<y^2<1$$

であるので，

$$0+0<x^2+y^2<1+1$$
$$0<x^2+y^2<2$$

となる．
よって，$x<1$ かつ $y<1$ ならば $x^2+y^2<2$ となる．
ゆえに題意は示された．（証明終）

【4】(1) $\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}\quad (a,\ b \text{ は互いに素な正の整数})$$

とおくことができる．この両辺を平方して分母をはらうと

$$a^2=3b^2\ \cdots ①$$

となり，a^2 は 3 の倍数である．したがって a も 3 の倍数でなければならない．
そこで $a=3m$（m は正の整数）とおいて，① に代入すると

$$9m^2=3b^2$$
$$b^2=3m^2$$

となり，b^2 は 3 の倍数である．したがって b も 3 の倍数である．
a, b はともに 3 の倍数であるから，公約数 3 をもつことになる．これは最初に a, b は互いに素とした仮定に反する．
この矛盾は $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $\sqrt{3}$ は無理数である．（証明終）

(2) $4\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$4\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$4\sqrt{3} = a \qquad (a \text{ は有理数})$$

とおくことができる．これより，

$$\sqrt{3} = \frac{a}{4}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので矛盾する．
この矛盾は $4\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $4\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $4\sqrt{3}$ は無理数である．（証明終）

(3) $4+\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$4+\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$4+\sqrt{3} = k \qquad (k \text{ は有理数})$$

とおくことができる．これより，

$$\sqrt{3} = k-4$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので矛盾する．
この矛盾は $4+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $4+\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $4+\sqrt{3}$ は無理数である．
（証明終）

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が無理数でないと仮定すると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は有理数であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \qquad (a,\ b \text{ は互いに素な正の整数})$$

とおくことができる．これより，

$$b^2 = 2a^2 \cdots\cdots ①$$

となり，b^2 は 2 の倍数である．したがって b も 2 の倍数でなければならない．
そこで $b=2m$ （m は正の整数）とおいて，① に代入すると

$$4m^2 = 2a^2$$
$$a^2 = 2m^2$$

となり，a^2 は 2 の倍数である．したがって a も 2 の倍数である．
$a,\ b$ はともに 2 の倍数であるから，公約数 2 をもつことになる．これは最初に $a,\ b$ は互いに素とした仮定に反する．
この矛盾は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は有理数ではない．つまり $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数である．（証明終）

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=p \qquad (p \text{ は有理数})$$

とおくことができる．これより，両辺を平方して

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= p^2\\ 5+2\sqrt{6} &= p^2\\ 2\sqrt{6} &= p^2-5\\ \sqrt{6} &= \frac{p^2-5}{2}\end{aligned}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので矛盾する．
この矛盾は $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

（証明終）

【5】(1) 結論の否定は $x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ である．
$x+y>0$ かつ $xy>0$ のとき，$x \leqq 0$ と仮定すると，$x+y>0$ になるためには $y>0$.
$y>0$ ならば $xy \leqq 0$ より，$x+y>0$ かつ $xy>0$ に矛盾する．
この矛盾は $x \leqq 0$ と仮定したために生じた．
よって $x>0$ である．
このとき，$xy>0$ より

$$y>0$$

したがって，x, y が実数のとき，

$$x+y>0 \text{ かつ } xy>0$$

ならば

$$x>0 \text{ かつ } y>0$$

（証明終）

(2) 結論の否定は，a, b がともに 0 以上の数である．
$ab \fallingdotseq 0$ かつ $a+b=0$ のとき，a, b がともに 0 以上の数と仮定すると，$ab \geqq 0$ かつ $a+b \geqq 0$ となる．
これは $ab \fallingdotseq 0$ かつ $a+b=0$ に矛盾する．
この矛盾は a, b がともに 0 以上の数であると仮定したために生じた．
よって a, b のうち少なくとも 1 つは負の数である．（証明終）

(3) 結論の否定は，a, b, c すべてが奇数である．
$a^2+b^2=c^2$ のとき，a, b, c すべてが奇数であると仮定する．
m, n を整数とすると，

$$a=2m+1,\ b=2n+1$$

とおける．

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2m+1)^2+(2n+1)^2\\&=4m^2+4m+1+4n^2+4n+1\\&=4m^2+4m+4n^2+4n+2\\&=2(2m^2+2m+2n^2+2n+1)\end{aligned}$$

$2m^2+2m+2n^2+2n+1$ は整数なので，a^2+b^2 は偶数である．
c も奇数なので，l を整数とすると

$$c=2l+1$$

とおける．

$$\begin{aligned}c^2&=(2l+1)^2\\&=4l^2+4l+1\\&=2(2l^2+2l)+1\end{aligned}$$

よって c^2 は奇数である．
これは $a^2+b^2=c^2$ に矛盾する．
この矛盾は，a, b, c すべてが奇数であると仮定したために生じた．
よって a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である．（証明終）

(4) 結論の否定は，$p \fallingdotseq 0$ または $q \fallingdotseq 0$ である．
$p+q\sqrt{3}=0$ のとき，$q \fallingdotseq 0$ と仮定する．

$$\begin{aligned}p+q\sqrt{3}&=0\\q\sqrt{3}&=-p\\\sqrt{3}&=-\frac{p}{q}\end{aligned}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので，矛盾する．この矛盾は $q \fallingdotseq 0$ と仮定したために生じた．したがって，$q=0$ である．
このとき，

$$\begin{aligned}p+0\cdot\sqrt{3}&=0\\p&=0\end{aligned}$$

よって，p, q が有理数で，$\sqrt{3}$ が無理数のとき，

$$p+q\sqrt{3}=0 \text{ ならば}, p=q=0$$

である．（証明終）

(5) 結論の否定は，$a \fallingdotseq c$ または $b \fallingdotseq d$ である．
そこで，$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ のとき，$b \fallingdotseq d$ と仮定する．

$$\begin{aligned}a+b\sqrt{3}&=c+d\sqrt{3}\\b\sqrt{3}-d\sqrt{3}&=c-a\\(b-d)\sqrt{3}&=c-a\\\sqrt{3}&=\frac{c-a}{b-d}\end{aligned}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので，矛盾する．この矛盾は $b \fallingdotseq d$ と仮定したために生じた．したがって，$b = d$ である．このとき

$$
\begin{aligned}
a + b\sqrt{3} &= c + b\sqrt{3} \\
a &= c
\end{aligned}
$$

よって，a，b，c，d が有理数で，$\sqrt{3}$ が無理数のとき，

$$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \text{ならば } a = c \text{ かつ } b = d$$

である．（証明終）

問題

【1】(1) 右表より

出た目の和が 6 のときは

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

の 5 通り

出た目の和が 7 のときは

(1, 6), (2, 5), (3, 4),

(4, 3), (5, 2), (6, 1)

の 6 通り

よって，和の法則より

$5+6=\mathbf{11}$（**通り**）

〔出た目の和〕

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) 右上表より，出た目の和が 5 の倍数になるのは

出た目の和が 5　$\cdots$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
出た目の和が 10 $\cdots$(4, 6), (5, 5), (6, 4)

よって，和の法則より

$4+3=\mathbf{7}$（**通り**）

(3) 右上表より，出た目の和が 7 以上の奇数になるときは

出た目の和が 7　$\cdots$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)
出た目の和が 9　$\cdots$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)
出た目の和が 11 $\cdots$(5, 6), (6, 5)

よって，和の法則より

$6+4+2=\mathbf{12}$（**通り**）

(4) 右上表より，出た目の和が 10 以下になるときは

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)

よって，**33**（**通り**）

＜別解＞

出た目の和が 11 以上になる場合の数より，出た目の和が 10 以下になる場合の数の方が多いので，出た目の和が 11 以上になる場合

$(5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

の 3 通りを考えて，

$36 - 3 =$ **33(通り)**

としてもよい.

(5) 右表より，出た目の積が素数になるのは

$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),$

$(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (5,\ 1)$

よって，**6**（通り）

〔出た目の積〕

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

【2】 (1) 3 桁の整数を作るためには，まず百の位の数に 0 以外の 6 個の数字のいずれかを選び，次に十の位以下に 0 を含めた残りの 6 個の数字から 2 個を選び出して並べればよい.

よって

$6 \times {}_6\mathrm{P}_2 = 6 \cdot 6 \cdot 5 =$ **180**（個）

(2) 3 桁の数が奇数ということは，一の位の数字が奇数であればよい.

奇数は 1，3，5 の 3 個である.

(i) 一の位の数字が 1 のとき，$5 \times 5 = 25$（個）

(ii) 一の位の数字が 3 のとき，(i) と同様に，$5 \times 5 = 25$（個）

(iii) 一の位の数字が 5 のとき，(i) と同様に，$5 \times 5 = 25$（個）

よって

$25 + 25 + 25 =$ **75**（個）

(3) 3 桁の整数が 5 の倍数ということは，一の位が 0，5 であればよい.

(i) 一の位が 0 のとき，$6 \times 5 = 30$（個）

(ii) 一の位が 5 のとき，$5 \times 5 = 25$（個）

よって

$30 + 25 =$ **55**（個）

(4) 7 個の数字を 3 で割ったときの余りを分類すると 3 桁の整数が 3 の倍数ということは各位の和が 3 の倍数であるということである．

余り	数字
0	0，3，6
1	1，4
2	2，5

よって，3 個の数字の和が 3 の倍数となる組は，

(0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，3，6)，(0，4，5)
(1，2，3)，(1，2，6)，(1，3，5)，(1，5，6)，(2，3，4)
(2，4，6)，(3，4，5)，(4，5，6)

の 13 組である．

(i) 0 を含む組

$$\begin{aligned} 2 \times {}_2\mathrm{P}_2 &= 2 \times 2! \\ &= 4 \end{aligned}$$

(ii) 0 を含まない組

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{P}_3 &= 3! \\ &= 6 \end{aligned}$$

よって

$$4 \times 5 + 6 \times 8 = \mathbf{68}\ (\text{個})$$

【3】(1) 6 冊を並べるので

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \mathbf{720(通り)} \end{aligned}$$

(2) まず，問題集 4 冊を並べる．

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 24(\text{通り}) \end{aligned}$$

次に，図の 5 箇所の○から 2 箇所を選んで教科書を並べる．

$$\begin{aligned} {}_5\mathrm{P}_2 &= 5 \cdot 4 \\ &= 20(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって

$$24 \times 20 = \mathbf{480(通り)}$$

(3) 教科書 2 冊，問題集 4 冊をそれぞれ‘ひとかたまり’とみて，教科書と問題集の並べ方は

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1 \\ &= 2(\text{通り}) \end{aligned}$$

教科書の‘ひとかたまり’の中の並べ方は

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1 \\ &= 2(\text{通り}) \end{aligned}$$

問題集の‘ひとかたまり’の中の並べ方は

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 24(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって

$$2 \times 2 \times 24 = \mathbf{96(通り)}$$

【4】(1) 7色の玉を円形に並べるので

$$\begin{aligned} (7-1)! &= 6! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \mathbf{720(通り)} \end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = \mathbf{360(通り)}$$

【5】(1) 1問に対して，それぞれ ○，× の2通りの解答があるので

$$2^5 = \mathbf{32(通り)}$$

(2) A，B，C，D それぞれ3通りの手の出し方があるので

$$3^4 = \mathbf{81(通り)}$$

(3) それぞれ4チームの選び方があるので

$$4^2 = \mathbf{16(通り)}$$

(4) カードそれぞれに対して6通りの入れ方があるので

$$6^4 = \mathbf{1296(通り)}$$

【6】(1) 奇数となるのは，一の位の数が1と3のときである．
よって，一の位の数が1のとき

$$\begin{aligned} \frac{6!}{2! \times 2!} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} \\ &= 180 \end{aligned}$$

一の位の数が3のとき

$$\begin{aligned} \frac{6!}{3! \times 2!} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} \\ &= 60 \end{aligned}$$

和の法則より

$$180 + 60 = \mathbf{240(通り)}$$

(2) 7 桁の整数にするには

$$(7\text{ 個の数字を並べる方法}) - (\text{先頭が }0\text{ になる方法})$$

である．
まず 7 個の数字を並べる方法は

$$\frac{7!}{2!3!} = 420$$

また，先頭が 0 になる並べ方は

$$1 \times \frac{6!}{2!3!} = 60$$

よって

$$420 - 60 = \mathbf{360(\text{通り})}$$

(3) 2 つの K を 1 文字として考える．A が 3 つ含まれている 7 文字を 1 列に並べるので

$$\frac{7!}{3!} = \mathbf{840(\text{通り})}$$

(4) 黒球 1 個を固定して考えると白球 4 個，赤球 2 個を 1 列に並べればよいので

$$\frac{6!}{4!2!} = \mathbf{15(\text{通り})}$$

【7】(1) 3 つの自然数を x, y, z とし，$z \leqq y \leqq x$ とすると

$$1 \leqq z \leqq y \leqq x \leqq 7$$

① x の最大は $y = z = 1$ のときで

$$x = 7 - (1+1) = 5$$

② x の最小は $x = y = z$ と考えて

$$x + y + z = 7$$
$$x + x + x = 7$$
$$x = \frac{7}{3} = 2.333\cdots$$

よって，$x = 3$

①, ② より，$3 \leqq x \leqq 5$

すなわち，$x = 3$, 4, 5

表に整理すると，右表のようになる．

x	5	4	3	3
y	1	2	2	3
z	1	1	2	1

よって，**4 通り**

(2) $5x + 3y + z = 17$ より，$5x = 17 - (3y + z)\ \cdots(*)$

$y \geqq 1$, $z \geqq 1$ より，$3y + z \geqq 4$ であるので，$5x \leqq 13$

また，x は正の整数だから，$x = 1$, 2

(i) $x = 1$ のとき，$(*)$ をみたす $(y,\ z)$ の組は，

$$(y,\ z) = (1,\ 9),\ (2,\ 6),\ (3,\ 3)$$

(ii) $x = 2$ のとき，$(*)$ をみたす $(y,\ z)$ の組は，

$$(y,\ z) = (1,\ 4),\ (2,\ 1)$$

表に整理すると，右表のようになる．

x	2	2	1	1	1
y	2	1	3	2	1
z	1	4	3	6	9

よって，**5 組**

(3) 5g の分銅を x 個，10g の分銅を y 個，20g の分銅を z 個使うとする．

$$5x + 10y + 20z = 60$$

を満たし，x, y, z は正の整数であればよいので，

右表より，**4 通り**

x	2	2	4	6
y	1	3	2	1
z	2	1	1	1

(4) 10 円 2 枚で払える金額は

0 円, 10 円, 20 円

50 円 3 枚で払える金額は

0 円, 50 円, 100 円, 150 円

100 円 4 枚で払える金額は

0 円, 100 円, 200 円, 300 円, 400 円

よって，全部使って払える金額を考えると，
10 円，20 円，50 円，60 円，70 円，100 円
110 円，120 円，150 円，160 円，170 円，200 円
210 円，220 円，250 円，260 円，270 円，300 円
310 円，320 円，350 円，360 円，370 円，400 円
410 円，420 円，450 円，460 円，470 円，500 円
510 円，520 円，550 円，560 円，570 円
したがって，**35 通り**
◆ ここに注意 ◆
0 円は含めない！

(5) 2 つのサイコロを A と B とし，表に整理すると

A	1	2	3
B	5	4	3

よって，**3 通り**

(6) 3 つのサイコロを A，B，C とし，表に整理すると

A	6	6	6	5	5	4
B	5	4	3	5	4	4
C	1	2	3	2	3	4

よって，**6 通り**

【8】(1) 素因数分解すると

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

よって，約数の個数は

$$(4+1)(1+1)(2+1) = 5 \times 2 \times 3 = \mathbf{30}\text{（個）}$$

総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5+5^2) = 31 \times 4 \times 31 = \mathbf{3844}$$

(2) 素因数分解すると

$$3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$$
$$7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$$

よって，最大公約数は

$$2^4 \times 3^2 \times 7 = 1008$$

したがって，1008 の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 = \mathbf{30}\ \text{(個)}$$

【9】(1) $(\text{左辺}) = n(n-1)$ より，

$$\begin{aligned} n(n-1) &= 72 \\ n^2 - n - 72 &= 0 \\ (n-9)(n+8) &= 0 \\ \therefore\ n &= 9,\ -8 \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より，$\boldsymbol{n = 9}$

(2) $(\text{左辺}) = n(n-1)(n-2)$ より，

$$n(n-1)(n-2) = 20n$$

$n \fallingdotseq 0$ より，両辺を n で割って，

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2) &= 20 \\ n^2 - 3n - 18 &= 0 \\ (n-6)(n+3) &= 0 \\ \therefore\ n &= 6,\ -3 \end{aligned}$$

$n \geqq 3$ より，$\boldsymbol{n = 6}$

(3)

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2n(2n-1)(2n-2) \\ (\text{右辺}) &= 36n(n-1) \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} 2n(2n-1)(2n-2) &= 36n(n-1) \\ 4n(2n-1)(n-1) &= 36n(n-1) \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ より，$n \fallingdotseq 0$，$n \fallingdotseq 1$ だから，両辺を $4n(n-1)$ で割って，

$$2n - 1 = 9$$

よって，$\boldsymbol{n = 5}$

１０章　場合の数（２）ー組合せー

問題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
{}_7C_3 &= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \mathbf{35}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
{}_{12}C_9 &= {}_{12}C_3\\
&= \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \mathbf{220}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
{}_5C_2 \times {}_4C_1 &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times 4\\
&= \mathbf{40}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
{}_6C_6 \times {}_9C_7 &= {}_6C_0 \times {}_9C_2\\
&= 1\times\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}\\
&= \mathbf{36}
\end{aligned}
$$

【2】(1)

$$
\begin{aligned}
{}_{40}C_3 &= \frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \mathbf{9880(通り)}
\end{aligned}
$$

(2) 16 チームが総あたりの試合をするということは，16 チームから 2 チーム選ぶ方法と等しいので

$$
\begin{aligned}
{}_{16}C_2 &= \frac{16\cdot 15}{2\cdot 1}\\
&= \mathbf{120(試合)}
\end{aligned}
$$

(3) 「6 回投げて表が 4 回出る」ということは,「6 回のうち表を 4 回選ぶ」ということなので

$$
\begin{aligned}
{}_6C_4 &= {}_6C_2\\
&= \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\\
&= \mathbf{15(通り)}
\end{aligned}
$$

(4) 2 枚の積が奇数になるには，2 枚とも奇数でなければいけないので，1，3，5，7，9 の 5 枚から 2 枚選べればよい．よって

$$
\begin{aligned}
{}_5C_2 &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\\
&= \mathbf{10(通り)}
\end{aligned}
$$

【3】(1) 男女 10 人から 4 人選べばよいので

$$
\begin{aligned}
{}_{10}C_4 &= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \mathbf{210(通り)}
\end{aligned}
$$

(2) 男子 5 人から 2 人，女子 5 人から 2 人選べばよいので

$$
\begin{aligned}
{}_5C_2 \times {}_5C_2 &= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\\
&= \mathbf{100(通り)}
\end{aligned}
$$

(3) 特定の 2 人を A，B とすると，残りの 8 人から 2 人選べばよいので

$$
\begin{aligned}
{}_8C_2 &= \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\\
&= \mathbf{28(通り)}
\end{aligned}
$$

【4】(1) 5 人の選び方は

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{C}_5 &= {}_8\mathrm{C}_3 \\ &= 56(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって，**56(通り)**

(2) A に入る 4 人の選び方は

$${}_8\mathrm{C}_4 = 70(\text{通り})$$

よって，**70(通り)**

(3) 4 人ずつ 2 組に分ける方法を x 通りとする．
この各組の分け方に対して，2 つのグループ A，B に分ける方法は

$$2! = 2(\text{通り})$$

(2) より

$$\begin{aligned} x \times 2! &= {}_8\mathrm{C}_4 \\ x &= \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{2!} \\ &= \frac{70}{2} \\ &= \mathbf{35(\text{通り})} \end{aligned}$$

(4) 2 人ずつ 4 組に分ける方法を x 通りとする．
まず，A，B，C，D の 4 組に 2 人ずつ分ける．
A に入る 2 人の選び方は

$${}_8\mathrm{C}_2 = 28(\text{通り})$$

B に入る 2 人の選び方は，残りの 6 人から 2 人選んで

$${}_6\mathrm{C}_2 = 15(\text{通り})$$

C に入る 2 人の選び方は，残りの 4 人から 2 人選んで

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6(\text{通り})$$

よって，積の法則より

$$28 \times 15 \times 6 = 2520(\text{通り})$$

この各組の分け方に対して，4 組 A，B，C，D に分ける方法は

$$4! = 24(\text{通り})$$

よって

$$\begin{aligned} x \times 4! &= {}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \\ x &= \frac{{}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{4!} \\ &= \frac{2520}{24} \\ &= \mathbf{105(\text{通り})} \end{aligned}$$

(5) グループ A に 3 人，グループ B に 3 人，グループ C に 2 人と分ける方法を考える．

A に入る 3 人の選び方は

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = 56(\text{通り}) $$

B に入る 3 人の選び方は，残りの 5 人から 3 人選んで

$$ \begin{aligned} {}_5\mathrm{C}_3 &= {}_5\mathrm{C}_2 \\ &= 10(\text{通り}) \end{aligned} $$

よって，積の法則より

$$ 56 \times 10 = 560(\text{通り}) $$

グループを区別しないで，3 人，3 人，2 人に分ける方法を x 通りとする．
x に対して，3 つのグループ A，B，C に分ける方法は

$$ 2! = 2(\text{通り}) $$

よって

$$ \begin{aligned} x \times 2! &= {}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3 \\ x &= \frac{{}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3}{2!} \\ &= \frac{560}{2} \\ &= \mathbf{280(通り)} \end{aligned} $$

【5】(1) A に入る 2 人の選び方は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 = 15(\text{通り}) $$

B に入る 2 人の選び方は，残りの 4 人から 2 人選んで

$$ {}_4\mathrm{C}_2 = 6(\text{通り}) $$

よって，積の法則より

$$ 15 \times 6 = \mathbf{90(通り)} $$

(2) 2 人ずつ 3 組に分ける方法を x 通りとする．
この各組の分け方に対して，3 組 A, B，C に分ける方法は

$$ 3! = 6(\text{通り}) $$

(1) より

$$ \begin{aligned} x \times 3! &= {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \\ x &= \frac{90}{6} \\ &= \mathbf{15(通り)} \end{aligned} $$

(3) 1 人の選び方は

$$ {}_6\mathrm{C}_1 = 6(\text{通り}) $$

その各々に対して，残りの 5 人から 2 人選ぶ選び方は

$$ {}_5\mathrm{C}_2 = 10(\text{通り}) $$

よって，積の法則より

$$ 6 \times 10 = \mathbf{60(通り)} $$

(4) 3 組に分けるには

$$ (4,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2) $$

のどれかである．

(i) 4 人，1 人，1 人のとき
まず A に 4 人，B に 1 人，C に 1 人にするには

$$ {}_6\mathrm{C}_4 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 30(\text{通り}) $$

B，C の区別をつけなければよいので

$$ \frac{30}{2!} = 15(\text{通り}) $$

(ii) 3 人，2 人，1 人のとき

(3) より, 60(通り)

(iii) 2 人，2 人，2 人のとき

(2) より, 15(通り)

よって，(i)，(ii)，(iii) より

$$ 15 + 60 + 15 = \mathbf{90(通り)} $$

(5) (i) 4 人，1 人，1 人のとき

ある 2 人が同じ組に入るということは 4 人の組の中に 2 人が入っているということである．

よって，残りの 4 人の分け方は

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{2!} = 6(\text{通り})$$

(ii) 3 人，2 人，1 人のとき

ある 2 人が同じ組に入るということは，3 人の組に 2 人が入る．もしくは，2 人の組に 2 人が入るのどちらかである．

① 3 人の中に特定の 2 人が入るとき，残りの 4 人の分け方は

$$\begin{aligned} {}_4C_1 \times {}_3C_2 &= 4 \times 3 \\ &= 12(\text{通り}) \end{aligned}$$

② 2 人の中に特定の 2 人が入るとき

$$\begin{aligned} {}_4C_3 &= {}_4C_1 \\ &= 4(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって，①，②より

$$12 + 4 = 16(\text{通り})$$

(iii) 2 人，2 人，2 人のとき

ある 2 人が同じ組に入るということは残りの 4 人を 2 人，2 人に分ければよいので

$$\frac{{}_4C_2}{2!} = 3(\text{通り})$$

(i)，(ii)，(iii) より

$$6 + 16 + 3 = \mathbf{25(\text{通り})}$$

【6】(1) A から B への最短の道すじは，4 個の $\boxed{右}$ と 5 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{9!}{4!5!} = \mathbf{126(通り)}$$

(2) A から C への最短の道すじは，2 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{2!3!} = 10(通り)$$

C から B への最短の道すじは，2 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{4!}{2!2!} = 6(通り)$$

よって，A → C → B の最短の道すじの総数は，積の法則より

$$10 \times 6 = \mathbf{60(通り)}$$

(3) 「CD 間が通れない」最短の道すじの数は直接は求めにくい.
よって，補集合を使って

「最短の道すじの総数」−「CD 間を通る最短の道すじの数」

を求める.
A から C への最短の道すじは，2 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{2!3!} = 10(通り)$$

C から D への最短の道すじは

1(通り)

D から B への最短の道すじは，1 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{3!}{1!2!} = 3(通り)$$

したがって，A → C → D → B の最短の道すじは，積の法則より

$$10 \times 1 \times 3 = 30(通り)$$

ゆえに，CD 間を通らない最短の道すじの総数は

$$126 - 30 = \mathbf{96(通り)}$$

【7】(1) A から P への最短経路は，3 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{3!2!} = 10(\text{通り})$$

P から B への最短経路は，2 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{2!3!} = 10(\text{通り})$$

よって，A → P → B の最短経路の総数は，積の法則より

$10 \times 10 =$ **100(通り)**

(2) A から P への最短経路は，3 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{3!2!} = 10(\text{通り})$$

P から Q への最短経路は

1(通り)

Q から B への最短経路は，1 個の $\boxed{右}$ と 3 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{4!}{1!3!} = 4(\text{通り})$$

よって，A → P → Q → B の最短経路の総数は，積の法則より

$10 \times 1 \times 4 =$ **40(通り)**

(3) A から P への最短経路は，3 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{5!}{3!2!} = 10(\text{通り})$$

P から Q への最短経路は

1(通り)

Q から R への最短経路は

1(通り)

R から B への最短経路は，1 個の $\boxed{右}$ と 2 個の $\boxed{上}$ を 1 列に並べる順列だから

$$\frac{3!}{1!2!} = 3(\text{通り})$$

よって，A → P → Q → R → B の最短経路の総数は，積の法則より

$10 \times 1 \times 1 \times 3 =$ **30(通り)**

【8】(1)

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{H}_2 &= {}_{8+2-1}\mathrm{C}_2 \\ &= {}_9\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{36} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} {}_2\mathrm{H}_8 &= {}_{2+8-1}\mathrm{C}_8 \\ &= {}_9\mathrm{C}_8 \\ &= {}_9\mathrm{C}_1 \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_2 &= {}_{4+2-1}\mathrm{C}_2 \\ &= {}_5\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_3 &= {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 \\ &= {}_5\mathrm{C}_3 \\ &= {}_5\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

【9】(1) 求める整数解の組の個数は，3 種類の文字 x，y，z から重複を許して 10 個取る組合せの数に等しいから

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_{10} &= {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} \\ &= {}_{12}\mathrm{C}_{10} \\ &= {}_{12}\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{66(組)} \end{aligned}$$

(2) 求める場合の数は，3 種類の果物から重複を許して 5 個取る組合せの数に等しいから

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_5 &= {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{21(通り)} \end{aligned}$$

(3) 求める場合の数は，3 人の候補者を重複を許して 15 人が選ぶ組合せの数に等しいから

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_{15} &= {}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15} \\ &= {}_{17}\mathrm{C}_{15} \\ &= {}_{17}\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{136(通り)} \end{aligned}$$

(4) $(a+b+c+d)^6$ の展開式の同類項は，a，b，c，d の 4 文字から，重複を許して 6 個取る組合せの数と等しいから

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_6 &= {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_3 \\ &= \mathbf{84(種類)} \end{aligned}$$

【10】(1) $a+b+c+d=10$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1,\ d \geqq 1$$

であるから

$$a-1=A,\ b-1=B,\ c-1=C,\ d-1=D$$

とおくと，$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0$ となる．
$a+b+c+d=10$ より

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 10 \\ (A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1) &= 10 \\ A+B+C+D &= 6 \end{aligned}$$

となる．この方程式の $A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0$ の解の総数を考えればよい．

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_6 &= {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_6 \\ &= {}_9\mathrm{C}_3 \\ &= \mathbf{84(組)} \end{aligned}$$

(2) はじめに各クラスから 1 人ずつ選ぶ．すると残り 3 人を 4 つのクラスから選べばよいので，

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{H}_3 &= {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 \\ &= {}_6\mathrm{C}_3 \\ &= \mathbf{20(通り)} \end{aligned}$$

(3) どの果物も少なくとも 5 個ずつ選ぶので，はじめに 5 個ずつ選び，残り 5 個をかき，なし，りんごから選べばよいので，

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_5 &= {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_5 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2 \\ &= \mathbf{21(通り)} \end{aligned}$$

添削課題

【1】(1) 合計 8 人の中から 4 人を選ぶ方法だから

$$_8C_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{70}\textbf{(通り)}$$

(2) 男子 5 人の中から 2 人，女子 3 人から 2 人を選ぶ方法だから

$$_5C_2 \times {_3C_2} = {_5C_2} \times {_3C_1} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times3 = \mathbf{30}\textbf{(通り)}$$

(3) (女子が少なくとも 1 人) = (全体) − (4 人とも男子)

だから，4 人とも男子である選び方は

$_5C_4 = {_5C_1} = 5$(通り)

より

$70 - 5 = \mathbf{65}$**(通り)**

(4) A，B 以外の 2 人の委員を，A，B を除く残りの 6 人から選べばよいので

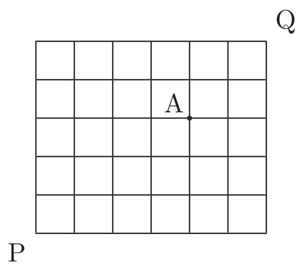
$$_6C_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = \mathbf{15}\textbf{(通り)}$$

(5) A 以外の 3 人の委員を，A，B を除く 6 人から選べばよいので

$$_6C_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{20}\textbf{(通り)}$$

【2】(1) 右の図において，P から Q まで行く最短経路のうち，A を通らないものと考えると，

$_{11}C_5 - {_7C_3} \times {_4C_2} = \mathbf{252}$**(通り)**



(2) ① $_9C_3 \times {_6C_3} = 84 \times 20 = \mathbf{1680}$**(通り)**

② ①で A，B，C の区別がなくなるから

$$\frac{1680}{3!} = \mathbf{280}\textbf{(通り)}$$

③ 1 人ずつ A 組か B 組に入れていけばよいので

$2^9 = 512$(通り)

ただし，1 組に全員入る 2 通りを除くので

$512 - 2 = \mathbf{510}$**(通り)**

【3】(1) A～E から 2 点，F～I から 1 点選ぶか，または，
A～E から 1 点，F～I から 2 点選べばよいので
$${}_5C_2 \times {}_4C_1 + {}_5C_1 \times {}_4C_2 = \mathbf{70(個)}$$
＜別解＞
A～I の中から 3 点選ぶ方法は
$${}_9C_3 = 84(\text{通り})$$
そのうち，三角形ができないのは，同じ直線上から 3 点とも選ぶ場合だから
$$\begin{aligned}{}_5C_3 + {}_4C_3 &= {}_5C_2 + {}_4C_1 \\ &= 14(\text{通り})\end{aligned}$$
よって
$$84 - 14 = \mathbf{70(個)}$$

(2) A～E から 2 点，F～I から 2 点選べばよいので
$${}_5C_2 \times {}_4C_2 = \mathbf{60(個)}$$

(3) 上底，下底が 1cm のとき，$4 \times 3 = 12$(個)
上底，下底が 2cm のとき，$3 \times 2 = 6$(個)
上底，下底が 3cm のとき，$2 \times 1 = 2$(個)
したがって
$$12 + 6 + 2 = \mathbf{20(個)}$$

【4】(1) ○を 8 個，| を 2 個のあわせて 10 個のものを並べる方法と同じだから
$$\frac{10!}{8!2!} = \mathbf{45(通り)}$$
＜別解＞
$$\begin{aligned}{}_3H_8 &= {}_{3+8-1}C_8 \\ &= {}_{10}C_2 \\ &= \mathbf{45(通り)}\end{aligned}$$

(2) 4 ○ | ○○○○ | ○ | ○○ 1 なら，
$a = 4,\ b = c = d = e = 3,\ f = 2,\ g = h = 1$
また，4 ○○ || ○○○ | ○○○ 1 なら，
$a = b = 4,\ c = d = e = 2,\ f = g = h = 1$
のように，○を 8 個，| を 3 個のあわせて 11 個を並べる
ことによって，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h)$ の組が決まるから
$$\frac{11!}{8!3!} = \mathbf{165(通り)}$$
＜別解＞
$$\begin{aligned}{}_4H_8 &= {}_{4+8-1}C_8 \\ &= {}_{11}C_3 \\ &= \mathbf{165(通り)}\end{aligned}$$

M1JK

高１東大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号		氏　名	