M1TK

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学Ｋ

8章　2次関数（6）－2次不等式－

問題

【1】(1) $x^2-5x+6=0$ を解くと $x=2,\ 3$. よって,

$\boldsymbol{2<x<3}$　　(答)

(2) $x^2-8x-9=0$ を解くと $x=-1,\ 9$. よって,

$\boldsymbol{x \leqq -1,\ x \geqq 9}$　　(答)

(3) $2x^2+9x+4=0$ を解くと $x=-\dfrac{1}{2},\ -4$. よって,

$\boldsymbol{x<-4,\ x>-\dfrac{1}{2}}$　　(答)

(4) 与式の両辺に -1 をかけて $x^2+x-12<0$. $x^2+x-12=0$ を解くと $x=-4,\ 3$. よって,

$\boldsymbol{-4<x<3}$　　(答)

(5) 与式の両辺に -1 をかけて $4x^2-x-2>0$. $4x^2-x-2=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times4\times(-2)}}{2\times4}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$$

よって

$\boldsymbol{x<\dfrac{1-\sqrt{33}}{8},\ \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}<x}$　　(答)

(6) $x^2-4x-12=0$ を解くと $x=-2,\ 6$. よって,

$\boldsymbol{-2<x<6}$　　(答)

【2】(1) $x^2-6x+9=0$ を解くと $x=3$. よって,

3 以外のすべての実数　　(答)

(2) $x^2+8x+16=0$ を解くと $x=-4$. よって,

$\boldsymbol{x=-4}$　　(答)

(3) $2x^2-3x+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$$

ゆえに, $2x^2-3x+2=0$ は実数解をもたない.
よって, $2x^2-3x+2\geqq0$ の解は,

すべての実数　　(答)

(4) 両辺に -6 をかけて

$$3x^2-6x+4 \leqq 0$$

$3x^2-6x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=(-3)^2-3\times 4=-3<0$$

ゆえに，$3x^2-6x+4=0$ は解をもたない．
よって，$3x^2-6x+4 \leqq 0$ の解は，

解なし　　(答)

(5) 与式を変形して

$$\begin{aligned} 6x^2+5x+10 &> 2x^2-7x \\ 4x^2+12x+10 &> 0 \\ 2x^2+6x+5 &> 0 \end{aligned}$$

$2x^2+6x+5=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=3^2-2\times 5=-1<0$$

ゆえに $2x^2+6x+5=0$ は解をもたない．よって，与式をみたす x は

すべての実数　　(答)

(6) 与式を変形して

$$\begin{aligned} 2(x^2-x-1) &> x^2-6(x+1) \\ x^2+4x+4 &> 0 \end{aligned}$$

$x^2+4x+4=0$ を解くと $x=-2$．よって，

-2 以外のすべての実数　　(答)

【3】(1)

$$\begin{cases} x^2-x-6<0 & \cdots ① \\ x^2-3x-4 \leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$(x-3)(x+2)<0$$
$$-2<x<3$$

②より

$$(x-4)(x+1) \leqq 0$$
$$-1 \leqq x \leqq 4$$

ゆえに求める解は

$\boldsymbol{-1 \leqq x < 3}$　　(答)

(2) $$\begin{cases} x^2 - 2x \leqq 15 & \cdots ① \\ x(x-1) \geqq 2 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$x^2 - 2x - 15 \leqq 0$$
$$(x-5)(x+3) \leqq 0$$
$$-3 \leqq x \leqq 5$$

②より

$$x^2 - x - 2 \geqq 0$$
$$(x-2)(x+1) \geqq 0$$
$$x \leqq -1,\ 2 \leqq x$$

ゆえに求める解は

$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq -1,\ 2 \leqq x \leqq 5}$　　(答)

(3) $3x + 4 < x^2 < 4x + 5$ より

$$\begin{cases} x^2 < 4x + 5 & \cdots ① \\ 3x + 4 < x^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$
$$(x-5)(x+1) < 0$$
$$-1 < x < 5$$

②より

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$
$$(x-4)(x+1) > 0$$
$$x < -1,\ 4 < x$$

ゆえに求める解は

$\boldsymbol{4 < x < 5}$　　(答)

(4) $6 - x^2 < 3 - 2x < x^2$ より

$$\begin{cases} 3 - 2x < x^2 & \cdots ① \\ 6 - x^2 < 3 - 2x & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$
$$(x+3)(x-1) > 0$$
$$x < -3,\ 1 < x$$

②より

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$
$$(x-3)(x+1) > 0$$
$$x < -1,\ 3 < x$$

よって求める解は

$\boldsymbol{x < -3,\ 3 < x}$　　(答)

【4】与式で (左辺) = 0 とおく．すなわち

$$x^2 + (a + 1)x + a + 2 = 0$$

この判別式を D とすると $D < 0$ であればよいから

$$D = (a + 1)^2 - 4(a + 2) = a^2 - 2a - 7 < 0$$

ここで

$$a^2 - 2a - 7 = 0$$

の解は

$$a = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

より，求める a の値の範囲は

$$\mathbf{1 - 2\sqrt{2} < \boldsymbol{a} < 1 + 2\sqrt{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】左辺を因数分解すると

$$(x + 2)\{x - (a + 1)\} \leqq 0$$

したがって，-2 と $a + 1$ との大小で場合分けする．

(i) $-2 > a + 1$ すなわち $a < -3$ のとき

$$a + 1 \leqq x \leqq -2$$

(ii) $-2 = a + 1$ すなわち $a = -3$ のとき

$$x = -2$$

(iii) $-2 < a + 1$ すなわち $-3 < a$ のとき

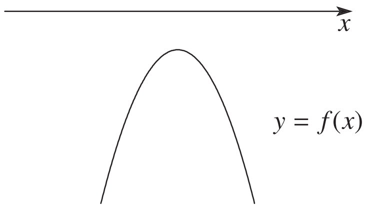
$$-2 \leqq x \leqq a + 1$$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -3} \text{ のとき} & \boldsymbol{a + 1 \leqq x \leqq -2} \\ \boldsymbol{a = -3} \text{ のとき} & \boldsymbol{x = -2} \\ \boldsymbol{-3 < a} \text{ のとき} & \boldsymbol{-2 \leqq x \leqq a + 1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【6】$f(x) = ax^2 - 5x + a$ とおく．$y = f(x)$ のグラフが右図のようになればよいから

$$a < 0 \quad \cdots ①$$



また，$ax^2 - 5x + a = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 25 - 4a^2 < 0$$

であればよい．これを解いて

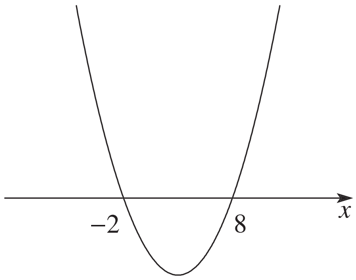
$$\left(a + \frac{5}{2}\right)\left(a - \frac{5}{2}\right) > 0$$

$$\therefore \quad a < -\frac{5}{2}, \quad a > \frac{5}{2}$$

ここで①とから，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a < -\frac{5}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $y = x^2 + bx + c$ のグラフが，右の図のようになればよいから



$$y = (x + 2)(x - 8)$$

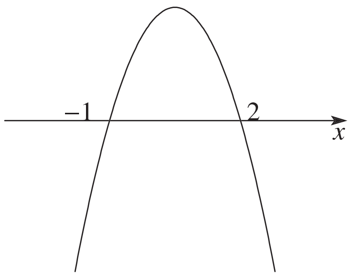
右辺を展開して

$$y = x^2 - 6x - 16$$

したがって，

$$\boldsymbol{b = -6, \ c = -16} \qquad \text{(答)}$$

(2) $y = ax^2 + 3x + c$ のグラフが，右の図のようになればよいから $a < 0$ であり



$$y = a(x + 1)(x - 2)$$

右辺を展開して

$$y = ax^2 - ax - 2a$$

係数を比べて

$$c = -2a \quad \cdots ①$$
$$3 = -a \quad \cdots ②$$

②より $a = -3\ (< 0)$．①に代入して $c = 6$．ゆえに

$$\boldsymbol{a = -3, \ c = 6} \qquad \text{(答)}$$

【8】 (i) $a < 0$ のとき.

$y = ax^2 + bx + 2$ のグラフは上に凸であるから，十分大きな x の値に対して $ax^2 + bx + 2 < 0$ となり不適.

(ii) $a = 0$ のとき.

与式は

$$bx + 2 > 0$$

これが全ての実数 x について成立するとき $b = 0$.

(iii) $a > 0$ のとき.

$ax^2 + bx + 2 = 0$ の判別式 を D とすると，$D < 0$. すなわち

$$b^2 - 8a < 0$$

以上より，求める条件は

$\boldsymbol{a = b = 0}$　または　$\boldsymbol{a > 0,\ b^2 - 8a < 0}$　　(答)

【9】

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x^2 - 3x - 5| - x^2 + 5x - 3 \\ &= |(x+1)(2x-5)| - x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

(1)　(i) $-3 \leqq x \leqq -1$，$\dfrac{5}{2} \leqq x \leqq 3$ のとき，$(x+1)(2x-5) \geqq 0$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(2x-5) - x^2 + 5x - 3 \\ &= x^2 + 2x - 8 \\ &= (x+1)^2 - 9 \end{aligned}$$

(ii) $-1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ のとき，$(x+1)(2x-5) \leqq 0$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1)(2x-5) - x^2 + 5x - 3 \\ &= -3x^2 + 8x + 2 \\ &= -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{22}{3} \end{aligned}$$

(i) の定義域において，$f(x)$ の最大，最小は

最大値　$7\ (x = 3)$

最小値　$-9\ (x = -1)$

(ii) の定義域において，$f(x)$ の最大，最小は

最大値　$\dfrac{22}{3}\left(x = \dfrac{4}{3}\right)$

最小値　$-9\ (x = -1)$

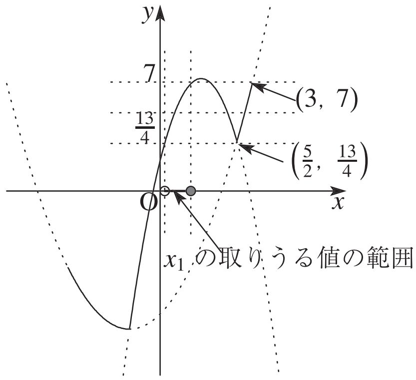
よって，$f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 3$ において

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{22}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{-9}$ (答)

をとる．

(2) $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．

ここで，方程式 $f(x)=k$ の解は，$y=f(x)$ のグラフと，直線 $y=k$ の共有点の x 座標となるので，2 つのグラフが $-3 \leqq x \leqq 3$ で 3 つの共有点をもつためには，右図より，



$$\frac{13}{4} < k \leqq 7$$

であればよく，そのときの最小の解 x_1 の取りうる値について，

$k=7$ のとき最大になり，
$k=\dfrac{13}{4}$ のときの 2 つの解のうち小さいものよりは大

となる．

$k=7$ のとき，$-3 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)=7$ の最小の解 x_1 は，

$$-3x^2+8x+2=7 \quad \cdots ①$$

の解のうち小さいものとなるので，① を解くと

$$3x^2-8x+5=0$$
$$(x-1)(3x-5)=0$$
$$\therefore x=1,\ \frac{5}{3}$$

よって，x_1 の最大値は 1

$k=\dfrac{13}{4}$ のとき，$-3 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)=\dfrac{13}{4}$ の解は

$$-3x^2+8x+2=\frac{13}{4} \quad \cdots ②$$

の 2 解であり，② を解くと，

$$12x^2-32x+5=0$$
$$(2x-5)(6x-1)=0$$
$$\therefore\ x=\frac{5}{2},\ \frac{1}{6}$$

以上より，

$\boldsymbol{\dfrac{1}{6} < x_1 \leqq 1}$ (答)

【10】(1) $x+y=k$ とおく．$x=k-y$ $\cdots$ ① より，与式に代入して，

$$(k-y)^2-(k-y)\cdot y+y^2-1=0$$
$$k^2-2ky+y^2-ky+y^2+y^2-1=0$$
$$3y^2-3ky+k^2-1=0 \quad \cdots ②$$

ここで，x，y は実数であり，① より，y が実数であれば，x も実数.
よって，y の方程式 ② が実数解をもてばよく，② の判別式を D とすると，

$$D=(-3k)^2-4\cdot 3\cdot (k^2-1) \geqq 0$$
$$-3k^2+12 \geqq 0$$
$$(k-2)(k+2) \leqq 0 \qquad \therefore -2 \leqq k \leqq 2$$

よって，**最大値は 2　(答)**

(2) $k=-2$ のとき，

$$3y^2+6y+3=0$$
$$(y+1)^2=0$$
$$\boldsymbol{y=-1} \qquad \textbf{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $\boldsymbol{x < -4,\ 1 < x}$ (答)

(2) $\boldsymbol{-4 < x < 1}$ (答)

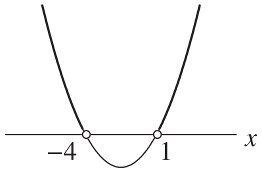
(3)
$$(x+2)(x-6) \leqq 0$$
$\therefore$ $\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 6}$ (答)

(4)
$$x^2 - 7x + 10 > 0$$
$$(x-2)(x-5) > 0$$
$\therefore$ $\boldsymbol{x < 2,\ 5 < x}$ (答)

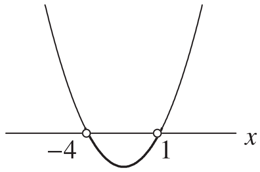
(5)
$$(x-1)^2 > 0$$
$\therefore$ **1** 以外のすべての実数 (答)

(6) $x^2 + 3x + 4 = 0$ の判別式を D とすると
$$D = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$$
ゆえに，解なし (答)

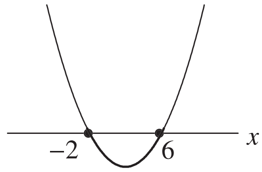
(1) $y = (x-1)(x+4)$



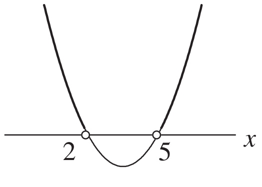
(2) $y = (x-1)(x+4)$



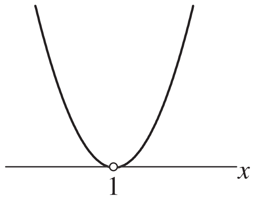
(3) $y = (x+2)(x-6)$



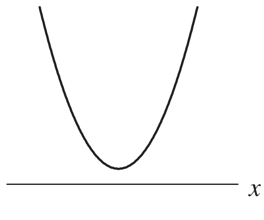
(4) $y = (x-2)(x-5)$



(5) $y = (x-1)^2$



(6) $y = x^2 + 3x + 4$



【2】 (1) $\begin{cases} x+2>0 & \cdots ① \\ x^2+4x-12 \leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$

① より，$x > -2$

② より，$(x+6)(x-2) \leqq 0$

よって，$-6 \leqq x \leqq 2$

以上より，

$\therefore$ **$-2 < x \leqq 2$** (答)

(2) $\begin{cases} x^2-4x \leqq 0 & \cdots ① \\ 2x^2-5x+2>0 & \cdots ② \end{cases}$

① より，$x(x-4) \leqq 0$

よって，$0 \leqq x \leqq 4$

② より，$(2x-1)(x-2) > 0$

よって，$x < \dfrac{1}{2},\ 2 < x$

以上より，

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{1}{2},\ 2 < x \leqq 4} \quad \text{(答)}$$

【3】 (i) $k \neq 0$ のとき

題意をみたすには，$k > 0$ でなくてはならない.

さらに，$y = kx^2-(k-2)x+1$ のグラフが x 軸と交わらない，

つまり，$kx^2-(k-2)x+1=0$ が解をもたないときだから，

判別式を D とすると

$$D = (k-2)^2-4\times k\times 1 = k^2-8k+4 < 0$$

これと $k > 0$ より

$$4-2\sqrt{3} < k < 4+2\sqrt{3}$$

(ii) $k = 0$ のとき

つねに $2x+1>0$ にはなりえない.

以上より

$$\boldsymbol{4-2\sqrt{3} < k < 4+2\sqrt{3}} \quad \text{(答)}$$

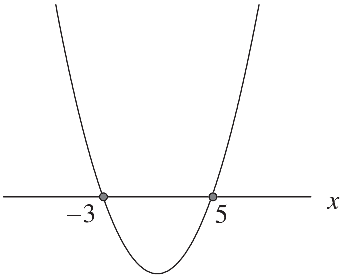
【4】 (1) $y = x^2+bx+c$ のグラフが次の図のようになればよいから

$$y = (x+3)(x-5)$$

右辺を展開して

$$y = x^2-2x-15$$

したがって，$\boldsymbol{b=-2,\ c=-15}$ (答)



(2) $y = ax^2 + (a+b+1)x + 1$ のグラフが下の図のようになればよいから，$a < 0$ であり，

$$y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

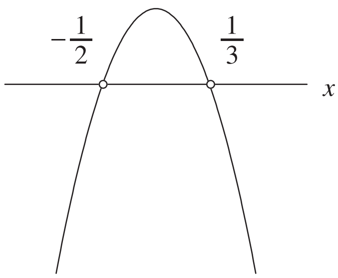
右辺を展開して

$$y = ax^2 + \frac{1}{6}ax - \frac{1}{6}a$$

係数を比べて

$$a + b + 1 = \frac{1}{6}a, \quad 1 = -\frac{1}{6}a$$

したがって，$\boldsymbol{a = -6,\ b = 4}$　　(答)



問題

【1】$f(x) = x^2 - ax - 2a + 1$ とすると，条件より

$$\begin{aligned}
&f(-1) = 1 + a - 2a + 1 = -a + 2 > 0 \\
&f(0) = -2a + 1 < 0 \\
&f(1) = 1 - a - 2a + 1 = -3a + 2 < 0 \\
&f(2) = 4 - 2a - 2a + 1 = -4a + 5 > 0
\end{aligned}$$

これらを解いて

$$a < 2, \quad a > \frac{1}{2}, \quad a > \frac{2}{3}, \quad a < \frac{5}{4}$$

ゆえに求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{3} < a < \frac{5}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【2】$f(x) = x^2 - (3a + 1)x + a^2$ とおく．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{3a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 + a^2 \\
&= \left(x - \frac{3a+1}{2}\right)^2 - \frac{5a^2 + 6a + 1}{4} \\
&= \left(x - \frac{3a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)(5a+1)}{4}
\end{aligned}$$

であるから、求める a の範囲の条件は

$$\begin{cases}
-\dfrac{(a+1)(5a+1)}{4} < 0 & \cdots \text{(i)} \\
\dfrac{3a+1}{2} > 0 & \cdots \text{(ii)} \\
f(0) = a^2 > 0 & \cdots \text{(iii)}
\end{cases}$$

である．(i) より

$$(a+1)(5a+1) > 0$$

よって，

$$a < -1, \ a > -\frac{1}{5} \qquad \cdots \text{(i)}'$$

(ii) より

$$3a + 1 > 0$$

よって，

$$a > -\frac{1}{3} \qquad \cdots \text{(ii)}'$$

(iii) より

a は 0 以外のすべての実数　$\cdots$(iii)$'$

(i)$'$〜(iii)$'$ より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{5} < a < 0,\ 0 < a} \qquad \text{(答)}$$

【3】$f(x) = x^2 + 2ax + 6 - a$ とおくと，求める a の範囲の条件は，$f(x) = 0$ の判別式を D とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = a^2 - (6-a) > 0 & \cdots\text{(i)} \\ -a > 1 & \cdots\text{(ii)} \\ f(1) > 0 & \cdots\text{(iii)} \end{cases}$$

である．

(i) より

$$a^2 + a - 6 > 0$$
$$(a+3)(a-2) > 0$$

よって，

$a < -3,\quad a > 2$　$\cdots$(i)$'$

(ii) より

$a < -1$　$\cdots$(ii)$'$

(iii) より

$$f(1) = 1 + 2a + 6 - a > 0$$
$$\therefore\quad a + 7 > 0$$

よって，

$a > -7$　$\cdots$(iii)$'$

(i)$'$〜(iii)$'$ より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-7 < a < -3} \qquad \text{(答)}$$

【4】$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ とおくと，求める a の範囲の条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = a^2 - (2a+3) > 0 & \cdots\text{(i)} \\ 2 < a < 4 & \cdots\text{(ii)} \\ f(2) > 0 & \cdots\text{(iii)} \\ f(4) > 0 & \cdots\text{(iv)} \end{cases}$$

である．

(i) より

$$a^2 - 2a - 3 > 0$$
$$(a+1)(a-3) > 0$$
$$\therefore \quad a < -1, \quad a > 3 \ \cdots \text{(i)}'$$

(iii) より

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 - 4a + 2a + 3 \\ &= -2a + 7 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a < \frac{7}{2} \ \cdots \text{(iii)}'$$

(iv) より

$$\begin{aligned} f(4) &= 16 - 8a + 2a + 3 \\ &= -6a + 19 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a < \frac{19}{6} \ \cdots \text{(iv)}'$$

(i)′，(ii)，(iii)′，(iv)′ を同時に満たす a の値の範囲は

$$\boldsymbol{3 < a < \frac{19}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【5】$f(x) = x^2 + a(a-2)x + a - 7$ とおくと，与えられた条件より

$$f(-2) < 0, \quad f(1) < 0$$

である．ここで

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 - 2a(a-2) + a - 7 \\ &= -2a^2 + 5a - 3 \\ &= -(a-1)(2a-3) < 0 \end{aligned}$$

より

$$a < 1, \quad a > \frac{3}{2} \quad \cdots ①$$

また

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + a(a-2) + a - 7 \\ &= a^2 - a - 6 \\ &= (a+2)(a-3) < 0 \end{aligned}$$

より

$$-2 < a < 3 \quad \cdots ②$$

①, ② より，求める a の値の範囲は

$$\mathbf{-2 < a < 1, \quad \frac{3}{2} < a < 3} \qquad (答)$$

【6】$f(x) = ax^2 - (a+1)x - 4$ とおくと，与えられた条件より

$$f(-1)f(0) < 0, \quad f(2)f(3) < 0$$

である．

$$\begin{aligned} f(-1)f(0) &= \{a + (a+1) - 4\} \cdot (-4) \\ &= (2a-3) \cdot (-4) \\ &= -4(2a-3) < 0 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} &2a - 3 > 0 \\ &2a > 3 \\ &a > \frac{3}{2} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} f(2)f(3) &= \{4a - 2(a+1) - 4\}\{9a - 3(a+1) - 4\} \\ &= (2a-6)(6a-7) \\ &= 2(a-3)(6a-7) < 0 \end{aligned}$$

より，

$$\frac{7}{6} < a < 3 \quad \cdots ②$$

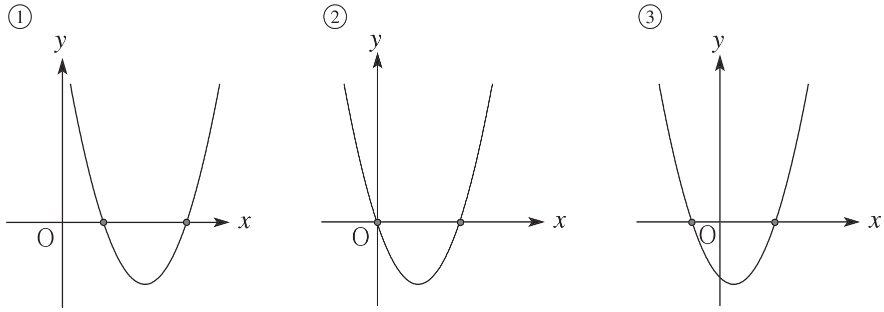
①, ② より，求める a の値の範囲は

$$\mathbf{\frac{3}{2} < a < 3} \qquad (答)$$

【7】$f(x) = x^2 - 2px + 3p^2 - 4p - 2$ とおく．

$$f(x) = (x-p)^2 + 2p^2 - 4p - 2$$

であり，$f(x) = 0$ が正の実数解を少なくとも 1 つもつとき，$y = f(x)$ のグラフは以下の 3 通りが考えられる．



①のとき,

$$\begin{cases} 2p^2 - 4p - 2 \leqq 0 & \cdots \text{(i)} \\ p > 0 & \cdots \text{(ii)} \\ f(0) = 3p^2 - 4p - 2 > 0 & \cdots \text{(iii)} \end{cases}$$

となる.

(i) より

$$p^2 - 2p - 1 \leqq 0$$

$$\therefore \quad 1 - \sqrt{2} \leqq p \leqq 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \text{(i)}'$$

(iii) より

$$3p^2 - 4p - 2 > 0$$

$$p < \frac{2 - \sqrt{10}}{3},\ p > \frac{2 + \sqrt{10}}{3} \quad \cdots \text{(iii)}'$$

(i)′, (ii), (iii)′ より

$$\frac{2 + \sqrt{10}}{3} < p \leqq 1 + \sqrt{2} \quad \cdots ①'$$

②のとき, $x = 0$ を解にもつから

$$f(0) = 3p^2 - 4p - 2 = 0$$

これを解いて

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

また軸の方程式 $x = p$ より $p > 0$. ゆえに

$$p = \frac{2 + \sqrt{10}}{3} \quad \cdots ②'$$

③のとき,

$$f(0) < 0$$

ゆえに

$$3p^2 - 4p - 2 < 0$$

$$\therefore \quad \frac{2 - \sqrt{10}}{3} < p < \frac{2 + \sqrt{10}}{3} \quad \cdots ③'$$

①′, ②′, ③′ より，求める p の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{10}}{3} < p \leqq 1+\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 与式

$$x^4 - 2(3a+1)x^2 + 7a^2 + 3a = 0 \quad \cdots(*)$$

において，$x^2 = t\ (\geqq 0)$ とすると

$$t^2 - 2(3a+1)t + 7a^2 + 3a = 0 \quad \cdots(\#)$$

であり，$f(t) = t^2 - 2(3a+1)t + 7a^2 + 3a$ とおく．
ここで，

「(∗) が異なる 4 つの実数解をもつ」
$\Longleftrightarrow$ 「(#) が異なる 2 つの正の実数解をもつ」

であるから，求める条件は (#) の判別式を D とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = (3a+1)^2 - (7a^2+3a) > 0 & \cdots(\mathrm{i}) \\ 3a+1 > 0 & \cdots(\mathrm{ii}) \\ f(0) = 7a^2 + 3a > 0 & \cdots(\mathrm{iii}) \end{cases}$$

である．
(i) より

$$2a^2 + 3a + 1 > 0$$
$$(a+1)(2a+1) > 0$$
$$\therefore \quad a < -1,\ a > -\frac{1}{2} \quad \cdots①$$

(ii) より

$$a > -\frac{1}{3} \quad \cdots②$$

(iii) より

$$a(7a+3) > 0$$
$$\therefore \quad a < -\frac{3}{7},\ a > 0 \quad \cdots③$$

①〜③ より，求める a の値の範囲は

$\boldsymbol{a > 0}$ 　　(答)

(2) 「(∗) がちょうど 2 つの実数解をもつ」

$\Longleftrightarrow$ 「(#) が正の実数解をただ 1 つもつ」

である.

(i) (#) が正の解と負の解を 1 つずつもつとき.

$$f(0) < 0$$

より,

$$f(0) = 7a^2 + 3a < 0$$
$$a(7a + 3) < 0$$
$$\therefore \quad -\frac{3}{7} < a < 0 \quad \cdots ①$$

(ii) (#) が正の重解をもつとき. (#) の判別式を D とすると,

$$D = 2a^2 + 3a + 1 = 0$$

より,

$$a = -\frac{1}{2},\ -1$$

このとき重解は

$$t = 3a + 1$$

であるから, $t = -\frac{1}{2},\ -2$ となり, いずれの場合も不適.

以上より, 求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{7} < a < 0} \qquad \text{(答)}$$

【9】 $f(x) = x^2 + ax + b$ とする.

$f(x)$ が実数解を持つが正の解をもたないときをまず考える.

このとき,

$$\begin{cases} \text{判別式:} & a^2 - 4b \geqq 0 \Leftrightarrow b \leqq \dfrac{a^2}{4} \\ \text{軸:} & -\dfrac{a}{2} \leqq 0 \Leftrightarrow a \geqq 0 \\ & f(0) = b \geqq 0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

である.

また, $f(x)$ が実数解をもつとき,

$$\text{判別式:} a^2 - 4b \geqq 0 \Leftrightarrow b \leqq \frac{a^2}{4} \quad \cdots ②$$

である.

求める a, b の範囲は②の範囲から①の範囲を除いたものであるから,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \geqq 0} \textbf{ のとき, } \boldsymbol{b < 0} \\ \boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき, } \boldsymbol{b \leqq \dfrac{a^2}{4}} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 判別式を D とすると，異なる 2 つの解をもつから，$D>0$

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k+3)$$
$$=k^2+k-2$$
$$=(k+2)(k-1)$$

よって，$\dfrac{D}{4}>0$ より，$\boldsymbol{k<-2,\ k>1}$ (答)

(2)
$$y=x^2-2(k+1)x+k+3$$
$$=\{x-(k+1)\}^2-(k+1)^2+k+3$$
$$=\{x-(k+1)\}^2-k^2-k+2$$

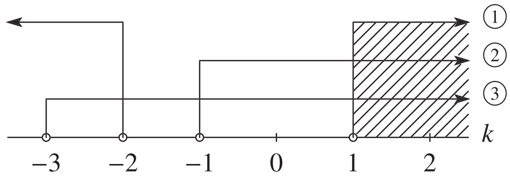
よって，軸の方程式は，$\boldsymbol{x=k+1}$ (答)

(3) $f(x)=x^2-2(k+1)x+k+3$ とおく．求める条件は

$$\begin{cases} k<-2,\quad k>1 & \cdots ① \\ k+1>0 & \cdots ② \\ f(0)>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②より，$k>-1$

③より，$k>-3$



よって，①〜③ を同時にみたす k の値は，$\boldsymbol{k>1}$ (答)

【2】$f(x)=x^2+2ax+3-2a$ とおく．求める条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=a^2-3+2a\geqq 0 & \cdots ① \\ -a<0 & \cdots ② \\ f(0)>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より，$(a+3)(a-1)\geqq 0$ $\therefore$ $a\leqq -3,\ a\geqq 1$

② より，$a>0$

③ より，$a<\dfrac{3}{2}$

よって，①〜③ を同時にみたす a の値は，$\boldsymbol{1\leqq a<\dfrac{3}{2}}$ (答)

【3】$f(x) = 3x^2 + (p-2)x + p^2 - 13p + 34$ とおく.

$f(x) = 0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつための条件は

$$f(1) < 0$$

したがって

$$p^2 - 12p + 35 < 0$$

$$(p-5)(p-7) < 0$$

$$\therefore\ \mathbf{5 < p < 7} \qquad \text{(答)}$$

【4】$f(x) = 7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2$ とおく.

題意をみたす条件は

$$\begin{cases} f(0) > 0 & \cdots ① \\ f(1) < 0 & \cdots ② \\ f(2) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より,

$$k^2 - k - 2 > 0$$

$$(k+1)(k-2) > 0$$

$$\therefore\ k < -1,\ 2 < k$$

②より,

$$7 - k - 13 + k^2 - k - 2 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0$$

$$(k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore\ -2 < k < 4$$

③より,

$$28 - 2k - 26 + k^2 - k - 2 > 0$$

$$k^2 - 3k > 0$$

$$k(k-3) > 0$$

$$\therefore\ k < 0,\ 3 < k$$

①～③をともにみたす k は, $\mathbf{-2 < k < -1,\ 3 < k < 4}$ (答)

問題

■演習

【1】(1)　$A = \{\mathbf{1, 2, 4, 8, 16}\}$　(答)

(2)　$B = \{\mathbf{0, 1, 2, 3, 4}\}$　(答)

(3)　$(-2)^2 = 4,\ (-1)^2 = 1,\ 0^2 = 0$ より，$C = \{\mathbf{0, 1, 4}\}$　(答)

【2】(1)　$\overline{A} = \boldsymbol{\{x|x < -1,\ 2 < x\}}$　(答)

(2)　$A \cap B = \boldsymbol{\{x| -1 \leqq x \leqq 2\}}$　(答)

(3)　$A \cup B = \boldsymbol{\{x|x < 5\}}$　(答)

(4)　$A \cup C = \{x| -1 \leqq x \leqq 3\}$ より

$$\overline{A \cup C} = \boldsymbol{\{x|x < -1,\ 3 < x\}} \quad (答)$$

(5)　$\overline{B} \cap C = \boldsymbol{\emptyset}$　(答)

(6)　ド・モルガンの法則より，

$$\overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B = \boldsymbol{\{x|x < -1,\ 2 < x < 5\}} \quad (答)$$

【3】1 から 100 までの整数の集合を U とし，このうち，2 で割り切れる数の集合を A，3 で割り切れる数の集合を B，5 で割り切れる数の集合を C とする．

(1) $100 \div 2 = 50$ より，$n(A) = \mathbf{50}$　**(答)**

(2) $A \cap B$ つまり，2 と 3 の最小公倍数 6 で割り切れる数の集合だから，
$100 \div 6 = 16$ あまり 4 より，$n(A \cap B) = \mathbf{16}$　**(答)**

(3) $100 \div 3 = 33$ あまり 1 より，$n(B) = 33$
よって，求める個数は，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 33 - 16 = \mathbf{67} \quad (答)$$

(4) $n(A \cup B \cup C)$ を求めればよい．
ここで，

$100 \div 5 = 20$ より，$n(C) = 20$

また，$B \cap C$ は 15 で割り切れる数の集合だから，

$100 \div 15 = 6$ あまり 10 より，$n(B \cap C) = 6$

次に $A \cap C$ は 10 で割り切れる数の集合だから，

$100 \div 10 = 10$ より，$n(A \cap C) = 10$

さらに $A \cap B \cap C$ は 30 で割り切れる数の集合だから，

$$100 \div 30 = 3 \text{ あまり } 10 \text{ より，} n(A \cap B \cap C) = 3$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C)\\
&\quad = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + n(A \cap B \cap C)\\
&\quad = 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3\\
&\quad = \mathbf{74} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(5) $30 = 2 \times 3 \times 5$ より，30 と互いに素である数は，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない数であるから，求める個数は

$$n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

と表される．

$$\begin{aligned}
n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= n(\overline{A \cup B \cup C})\\
&= n(U) - n(A \cup B \cup C)\\
&= 100 - 74\\
&= \mathbf{26} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

【4】(1) $A = \{1, 2, 5, 10\}$，$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ より，$\boldsymbol{A \subset B}$ (答)

(2) $A = \{x | -3 \leqq x \leqq 3\}$ より，$\boldsymbol{A \supset B}$ (答)

(3) $2x + 1$ において，

$x = 1$ のとき，$2 \times 1 + 1 = 3$

$x = 2$ のとき，$2 \times 2 + 1 = 5$

$x = 3$ のとき，$2 \times 3 + 1 = 7$

よって，$B = \{3, 5, 7\}$ だから，$\boldsymbol{A = B}$ (答)

【5】平行四辺形全体の集合を U とすると，$n(U) = 30$．また，長方形の集合を A，ひし形の集合を B とすると，

$$n(A) = 11, \quad n(B) = 15$$

さらに，$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 8$

(1) 求める個数は，$n(A \cup B)$ で表される．

$$n(A \cup B) = n(U) - n(\overline{A \cup B}) = 30 - 8 = \mathbf{22} \qquad (\text{答})$$

(2) 求める個数は，$n(A \cap B)$ で表される．

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

より，

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 11 + 15 - 22 = \mathbf{4} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める個数は，$n(\overline{A} \cap B)$ で表される．

$$n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 4 = \mathbf{11} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $\sqrt{1} = 1$，$\sqrt{4} = 2$，$\sqrt{9} = 3$，$\sqrt{16} = 4$ だから

$\mathbf{1,\ 4,\ 9,\ 16}$ 　(答)

(2) $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \cdots\}$，$C = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \cdots\}$ だから

$$A \cup B \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ \cdots\}$$

よって

$\mathbf{15}$ 　(答)

【7】(1) 条件より，集合 A の要素に 0 が含まれるから

$$t^2 + t - 2 = 0$$
$$(t+2)(t-1) = 0$$
$$\therefore \quad t = -2,\ 1$$

$t = -2$ のとき

$$A = \{3,\ 2,\ 0\},\ B = \{1,\ 0,\ 5,\ 9\}$$

このとき

$$A \cap B = \{0\}$$

なので，不適．

$t = 1$ のとき

$$A = \{3,\ 2,\ 0\},\ B = \{1,\ 3,\ -1,\ 0\} \qquad \therefore\ A \cap B = \{0,\ 3\}$$

よって

$t = \mathbf{1}$ 　(答)

(2) (1) のとき

$\boldsymbol{A \cup B = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}}$ 　(答)

【8】

$$\begin{cases} \text{携帯電話，パソコンをともに持たない人の数を } x, \\ \text{携帯電話，パソコンをともに持っている人の数を } y \end{cases}$$

とする．与えられた条件から表に整理すると，

	PC 有	PC 無	合計
携帯有	y		$12x$
携帯無		x	
合計	$4x$		

となる．表の空欄は計算できて，

	PC 有	PC 無	合計
携帯有	y	$12x-y$	$12x$
携帯無	$4x-y$	x	$5x-y$
合計	$4x$	$13x-y$	$17x-y$

とかける．このとき x，y は自然数であり，各欄は負でない整数である．
また，条件から

$$\begin{cases} 17x-y=40 & \cdots① \\ y \geqq 3x & \cdots② \end{cases}$$

である．
x，y は自然数であり，$12x \leqq 40$ より

$$1 \leqq x \leqq 3$$

(i) $x=1$，2 のとき，① より

$$17x-y<40$$

となり不適

(ii) $x=3$ のとき，① より

$$y=11$$

このとき ② をみたす．以上より

$x=3$，$y=11$

であり，携帯電話をもっている人数は

$12x=$ **36** 人　　(答)

添削課題

【1】(1) $\boldsymbol{P = \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots\}}$, $\boldsymbol{P = \left\{3x+2 \,\middle|\, x \text{ は整数},\ x \geqq 0\right\}}$ (答)

(2) $\boldsymbol{Q}$ は要素を書き並べる方法で表すことはできない. (答)

$\boldsymbol{Q = \{x \mid 3 \leqq x \leqq 5\}}$ (答)

(3) $\boldsymbol{R = \{-1,\ 3\}}$, $\boldsymbol{R = \left\{x \,\middle|\, x^2 - 2x - 3 = 0\right\}}$ (答)

【2】$-1 \leqq x \leqq 2$ より,

$$-2 \leqq 2x \leqq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \leqq 2x-1 \leqq 3$$

よって,

$$B = \{x \mid -3 \leqq x \leqq 3\}$$

と書き換えられるから,

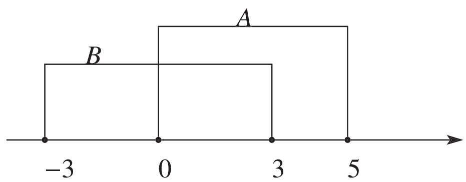
(1) $A \cup B = \boldsymbol{\{x \mid -3 \leqq x \leqq 5\}}$ (答)

(2) $A \cap B = \boldsymbol{\{x \mid 0 \leqq x \leqq 3\}}$ (答)

(3) $\overline{A} = \boldsymbol{\{x \mid x < 0,\ 5 < x\}}$ (答)

(4) $\overline{B} = \{x \mid x < -3,\ 3 < x\}$ より,

$A \cap \overline{B} = \boldsymbol{\{x \mid 3 < x \leqq 5\}}$ (答)



【3】(1) 2 の倍数は，$30 \div 2 = 15$ より，$n(A) = \mathbf{15}$ (答)

3 の倍数は，$30 \div 3 = 10$ より，$n(B) = \mathbf{10}$ (答)

(2) $A \cap B$ は 2 の倍数であり，3 の倍数である数，つまり，6 の倍数の集合を表すから，$30 \div 6 = 5$ より

$$n(A \cap B) = \mathbf{5} \quad \text{(答)}$$

(3) (1)，(2) より，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 10 - 5 = 20$$

ド・モルガンの法則より，$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ だから，

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 30 - 20 \\ &= \mathbf{10} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

【4】(1) 3 の倍数は，$200 \div 3 = 66 \cdots 2$ より，$n(A) = \mathbf{66}$ (答)

5 の倍数は，$200 \div 5 = 40$ より，$n(B) = \mathbf{40}$ (答)

7 の倍数は，$200 \div 7 = 28 \cdots 4$ より，$n(C) = \mathbf{28}$ (答)

(2) $A \cap B \cap C$ は 3 と 5 と 7 の公倍数，すなわち，105 の倍数の集合なので，

$$200 \div 105 = 1 \cdots 95$$

よって，

$$\boldsymbol{n(A \cap B \cap C) = 1} \quad \text{(答)}$$

(3) $n(A \cap B)$，$n(B \cap C)$，$n(C \cap A)$ を求める．$A \cap B$，$B \cap C$，$C \cap A$ はそれぞれ 15，35，21 の倍数の集合なので，

$A \cap B$ は，$200 \div 15 = 13 \cdots 5$ より，$n(A \cap B) = 13$

$B \cap C$ は，$200 \div 35 = 5 \cdots 25$ より，$n(B \cap C) = 5$

$C \cap A$ は，$200 \div 21 = 9 \cdots 11$ より，$n(C \cap A) = 9$

よって，

$$\begin{aligned} &n(A \cup B \cup C) \\ &\quad = n(A) + n(B) + n(C) \\ &\qquad - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C) \\ &\quad = 66 + 40 + 28 - (13 + 5 + 9) + 1 \\ &\quad = \mathbf{108} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

M1TK
高 1 難関大数学 K

Z-KAI

会員番号	

氏　名	