M2JC

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ

8章　微分のまとめ（2）

問題

【1】

(1)
$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{1-x}{x^2} = \boldsymbol{\infty} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(3) $f(x) = x^{-2} - x^{-1}$ より

$$\begin{cases} f'(x) = -2x^{-3} + x^{-2} = \dfrac{x-2}{x^3} \\ f''(x) = 6x^{-4} - 2x^{-3} = \dfrac{2(3-x)}{x^4} \end{cases}$$

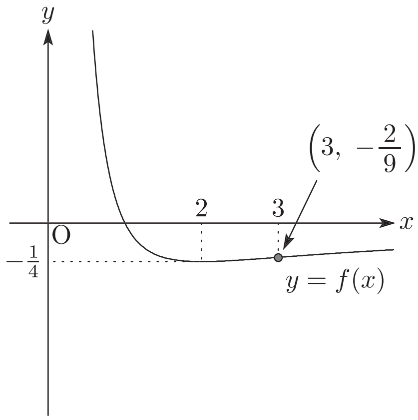
であるから，増減・凹凸は下表.

x	0		2		3	
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	×	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	×	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

よって

$$\begin{cases} \text{極小値} \quad f(2) = -\dfrac{1}{4} \\ \text{変曲点} \quad \left(3,\ -\dfrac{2}{9}\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

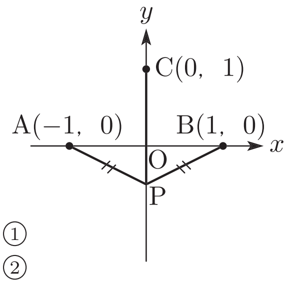
(4) (1)，(2)，(3) から



(答)

【2】

$\mathrm{P}(0,\ t)$ とおくと



$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = \sqrt{t^2+1},\quad \mathrm{CP} = |t-1|$$

より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP} &= 2\sqrt{t^2+1}+|t-1| \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{t^2+1}+(t-1) & (t \geqq 1) \quad \cdots\cdots ① \\ 2\sqrt{t^2+1}+1-t & (t < 1) \quad \cdots\cdots ② \end{cases}\end{aligned}$$

これを $f(t)$ とおくと，$t \geqq 1$ のとき ① の形から $f(t)$ は単調増加．次に ② から

$$f(t) = 2\sqrt{t^2+1}+1-t \quad (t<1)$$

より

$$f'(t) = 2\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} - 1 = \frac{2t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$$

だから，$t \leqq 0$ のとき，$f'(t) < 0$ である．

$0 < t < 1$ においては $f'(t) = \dfrac{3t^2-1}{\sqrt{t^2+1}\left(2t+\sqrt{t^2+1}\right)}$ から，$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の前後で $f'(t)$ は負から正に符号変化する．

以上から，$f(t)$ の増減は下のようになる．

t	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

よって，求める $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 2\sqrt{\frac{1}{3}+1}+1-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{3}+1} \qquad (答)\end{aligned}$$

そのときの P の y 座標は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(答)

【3】

$$f(x)=\frac{2^x-2x}{x-1}\quad(0<x<1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(2^x\log 2-2)(x-1)-(2^x-2x)\cdot 1}{(x-1)^2}\\&=\frac{\{(x-1)\log 2-1\}\cdot 2^x+2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

ここで

$$g(x)=\{(x-1)\log 2-1\}\cdot 2^x+2$$

とおくと，$0<x<1$ において

$$\begin{aligned}g'(x)&=\log 2\cdot 2^x+\{(x-1)\log 2-1\}\cdot 2^x\log 2\\&=(x-1)2^x(\log 2)^2<0\end{aligned}$$

より $g(x)$ は単調減少であり，$g(1)=0$ から

$$g(x)>0\quad(0<x<1)$$
$$\therefore\quad f'(x)>0\quad(0<x<1)$$

よって，$f(x)$ は単調増加であるから $0<a<b<1$ のとき

$$f(a)<f(b)$$
$$\therefore\quad\frac{2^a-2a}{a-1}<\frac{2^b-2b}{b-1}\qquad(\text{答})$$

【4】

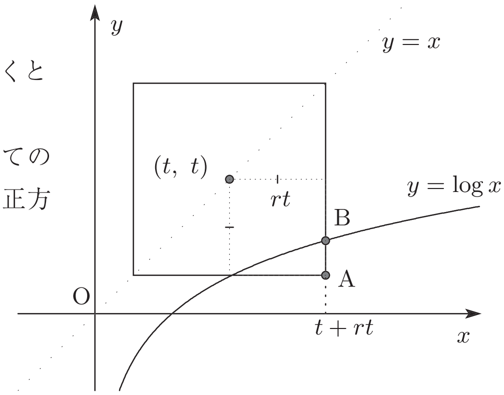
正方形の右下の頂点を A とおくと

$$\mathrm{A}(t+rt,\ t-rt)$$

また，$x=t+rt$ のときの $y=\log x$ 上の点を B とおくと

$$\mathrm{B}(t+rt,\ \log(t+rt))$$

正方形の中心 $(t,\ t)$ は直線 $y=x$ 上にあり，すべての $x\ (>0)$ で $x>\log x$（→【注意】）が成り立つので，正方形と $y=\log x$ が交わりをもつ条件は



$$(\text{B の } y \text{ 座標}) \geqq (\text{A の } y \text{ 座標})$$

$$\iff \quad \log(t+rt) \geqq t-rt$$

が成り立つことである．よって

$$f(t)=\log(t+rt)-(t-rt)$$

として，$f(t) \geqq 0$ となるような $t\ (>0)$ の存在する r の条件を求めればよい．

(i) $r \geqq 1$ のとき

たとえば，$t=1$ とすると

$$f(1)=\log(1+r)+(r-1)>0$$

よって，このとき $f(t) \geqq 0$ となる $t\ (>0)$ が存在する．

(ii) $0<r<1$ のとき

$$f'(t)=\frac{1+r}{t+rt}-(1-r)=\frac{(1+r)\{1-(1-r)t\}}{t+rt}$$

より，増減表は右のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{1-r}$	$\cdots$	1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(t) \geqq 0$ となる $t\ (>0)$ が存在する条件は

$$f\left(\frac{1}{1-r}\right) \geqq 0$$

これより

$$\log\frac{1+r}{1-r}-1 \geqq 0 \qquad \therefore\quad \frac{1+r}{1-r} \geqq e \qquad \therefore\quad r \geqq \frac{e-1}{e+1}$$

以上から，求める r の条件は

$$r \geqq \frac{e-1}{e+1} \qquad \text{(答)}$$

【注意】　$g(x)=x-\log x$ とおくと

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

より，下の増減表を得る．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

ゆえに

$$g(x) \geqq g(1)=1-\log 1>0 \qquad \therefore\quad x>\log x \quad (x>0)$$

添削課題

【1】

(1) $f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1>0$ $(x>0)$ より $f(x)$ は $x>0$ において単調増加であり，$f(0)=0$ から

$$f(x)>0\ (x>0) \qquad \therefore\quad e^x>1+x\ (x>0)$$

（証明終）

(2) $$e^x>1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\quad (x>0)\ \cdots\cdots①$$ を示す.

(I) $n=1$ のとき，① は $e^x>1+x$ $(x>0)$ であるから，(1) により成立する.

(II) $n=\ell$ $(\geqq 1)$ で成り立つとすると

$$e^x>1+\sum_{k=1}^{\ell}\frac{x^k}{k!}\quad (x>0)\ \cdots\cdots②$$

が成立する．このとき，$g(x)=e^x-\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\ell+1}\dfrac{x^k}{k!}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x)&=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\right)' \\ &=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^\ell}{\ell!}\right) \\ &=e^x-\left(1+\sum_{k=1}^{\ell}\frac{x^k}{k!}\right)>0\quad (\because\ ②) \end{aligned}$$

より，$g(x)$ は $x>0$ において単調増加し，$g(0)=0$ から

$$g(x)>0\ (x>0) \qquad \therefore\quad e^x>1+\sum_{k=1}^{\ell+1}\frac{x^k}{k!}\ (x>0)$$

よって，$n=\ell+1$ のとき成立する.

以上 (I)，(II) から ① が示された. （証明終）

(3) ① が任意の自然数 n に対して成り立つので，$x>0$ のとき

$$e^x>1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

x^n (>0) で割って

$$\frac{e^x}{x^n}>\frac{x}{(n+1)!}$$

ここで $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(n+1)!}=\infty$ であるから，追い出しの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$$

（証明終）

問題

【1】(1)

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n} \quad \left(\because\ x_k = \frac{k}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) $f(x) = x^3$ の原始関数の 1 つは $\frac{1}{4}x^4$ であるから，微分積分学の基本定理より

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

【2】(1)

$$\int_1^2 \frac{x^3+1}{x}dx = \int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \log|x|\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{8}{3}+\log 2\right) - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \log 2$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+5)}dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}\Big[\log|x+2| - \log|x+5|\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\{(\log 3 - \log 6) - (\log 2 - \log 5)\}$$
$$= \frac{1}{3}\log\frac{3\cdot 5}{6\cdot 2} = \frac{1}{3}\log\frac{5}{4}$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x - \cos 2x + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = \left[-\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x + 3\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + 3\right) - (-1)$$
$$= \frac{7-\sqrt{2}}{2}$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos 5x}{2}dx \quad (\because\ 積 \to 和の変形)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

(5)

$$\int_0^1 e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

【3】(1) $-1 \leqq x \leqq 3$ で

$$|x^2-1| = \begin{cases} -(x^2-1) & (-1 \leqq x \leqq 1) \\ x^2-1 & (1 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} \left(|x^2-1|-2\right)dx &= \int_{-1}^{1} \{-(x^2-1)-2\}dx + \int_{1}^{3} (x^2-1-2)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-x^2-1)dx + \int_{1}^{3} (x^2-3)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x\right]_{1}^{3} \\ &= \left(-\frac{1}{3}-1\right) - \left(\frac{1}{3}+1\right) + (9-9) - \left(\frac{1}{3}-3\right) = 0 \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ で

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -\cos x & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} |\cos x| dx &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx \\ &= \Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$\sin x = 2\cos x \iff \tan x = 2$ をみたす x が $x \neq \dfrac{1}{2}$ でただ1つ存在するので，その値を α とおくと

$$|\sin x - 2\cos x| = \begin{cases} -(\sin x - 2\cos x) & (0 \leqq x \leqq \alpha) \\ \sin x - 2\cos x & \left(\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

よって

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2\cos x| dx = \int_{0}^{\alpha} -(\sin x - 2\cos x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2\cos x)dx \quad \cdots (*)$$

ここで，$g(x) = -(\sin x - 2\cos x)$，$G(x) = \cos x + 2\sin x$ ($g(x)$ の不定積分の 1 つ) とおくと

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{0}^{\alpha} g(x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{-g(x)\}dx = \int_{0}^{\alpha} g(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(x)dx \\ &= \Big[G(x)\Big]_{0}^{\alpha} + \Big[G(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = 2G(\alpha) - G(0) - G\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 2(\cos\alpha + 2\sin\alpha) - 1 - 2 = 10\cos\alpha - 3 \quad (\because\ \sin\alpha = 2\cos\alpha) \end{aligned}$$

ここで，$\tan\alpha = 2$ と $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 5$$

$\cos\alpha > 0$ より，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるから

$$(\text{与式}) = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 3 = 2\sqrt{5} - 3$$

【4】(1) $\displaystyle\int (e^{2x} - e^{-2x})dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C$ (C は積分定数)

(2) $f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x} \cdots ①$ の両辺を積分すると

$$\int f(x)f'(x)dx = \int e^{2x} - e^{-2x}dx$$
$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C \quad \cdots ②$$

ここで，$f(x)$ の最小値が 2 であるから，すべての x に対して $f(x) > 0$ である．
よって，① から

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{f(x)}$$

となり，増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

ゆえに，$x = 0$ で最小となるから，$f(0) = 2$ である．
そこで，② で $x = 0$ を代入すると

$$\frac{1}{2}\{f(0)\}^2 = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) + C$$
$$2 = 1 + C \qquad \therefore C = 1$$

したがって

$$\{f(x)\}^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2 = (e^x + e^{-x})^2$$

となり，$f(x) > 0$ であるから

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

≪参考≫ (②の続き)

$\{f(x)\}^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2C$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2C} \quad (\because\ (f(x) \text{ の最小値}) = 2 \text{ より } f(x) > 0) \\ &\geqq \sqrt{2\sqrt{e^{2x} \cdot e^{-2x}} + 2C} \quad (\because\ (\text{相加平均}) \geqq (\text{相乗平均})) \\ &= \sqrt{2 + 2C} = 2 \quad (x = 0 \text{ で等号成立}) \end{aligned}$$
$\therefore \quad C = 1$ (以下略)

のようにしてもよい．

【5】(1) × 反例 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^2$

(2) × 反例 $f(x)=x$, $g(x)=1-x$

(3) ○

(4) ○

(5) × 反例 $f(x)=\begin{cases} 1-x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ x-2 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq x\right) \end{cases}$, $g(x)=0$

(6) × 反例 $f(x)=x$, $g(x)=1-x$

≪解説≫ (1)

$$\begin{aligned} f'(x)=g'(x) &\iff f'(x)-g'(x)=0 \\ &\iff \{f(x)-g(x)\}'=0 \\ &\iff f(x)-g(x)=c \ (\text{定数}) \end{aligned}$$

よって，一般には $f(x) \fallingdotseq g(x)$ である．

(2)

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx \iff \int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

よって, たとえば $f(x)-g(x)=2x-1$ でも成り立つから, 一般には $f(x) \fallingdotseq g(x)$ である.

(3)

$$\int_0^t f(x)dx=\int_0^t g(x)dx \iff \int_0^t \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

が任意の t に対して成り立つとき，$f(x)-g(x)=0$ である.

(4)

$$\begin{aligned} f'(x)=g'(x) &\iff \{f(x)-g(x)\}'=0 \\ &\iff f(x)-g(x)=c \ (\text{定数}) \end{aligned}$$

から $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1 cdx=\Big[cx\Big]_0^1=c=0$ であるから

$f(x)=g(x)$

(5)

$$\int_0^t f(x)dx \geqq \int_0^t g(x)dx \iff \int_0^t \{f(x)-g(x)\}dx \geqq 0$$

一般に，$\displaystyle\int_0^t h(x)dx=H(t)$ とする.

$H(t) \geqq 0$ は，$h(x)$ を区間 $[0,\ t]$ で積分したとき，その区間内のある部分で $h(x)<0$ であっても，積分した全体が正または0ということである.

(6) $f'(x) \geqq g'(x) \iff \{f(x)-g(x)\}' \geqq 0$ が任意の x に対して成り立つとき，$f(x)-g(x)$ は単調増加である.

たとえば，$f(x)-g(x)=2x-1$ でも成り立つから，任意の x に対して $f(x)-g(x) \geqq 0$，すなわち $f(x) \geqq g(x)$ とはいえない.

添削課題

【1】(1)

$$\int_0^1 x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx$$
$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{29}{35}$$

(2)

$$\int_0^3 \frac{4x-1}{2x^2-x+5}dx = \int_0^3 \frac{(2x^2-x+5)'}{2x^2-x+5}dx$$
$$= \Big[\log|2x^2-x+5|\Big]_0^3$$
$$= \log 20 - \log 5$$
$$= \log\frac{20}{5} = \log 4$$

(3)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x(\sin x)' dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{4}$$

(5)

$$\int_0^{\frac{1}{\log 2}} \left(e^{\log 2}\right)^x dx = \left[\frac{1}{\log 2}(e^{\log 2})^x\right]_0^{\frac{1}{\log 2}}$$
$$= \frac{1}{\log 2}(e^1-e^0)$$
$$= \frac{e-1}{\log 2}$$

問題

【1】 I. C を積分定数とする.

(1)
$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= \int x\left(-e^{-x}\right)'dx = x\left(-e^{-x}\right) - \int (x)'\left(-e^{-x}\right)dx\\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C\\ &= -(x+1)e^{-x} + C\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int x\sin 2x dx &= \int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx\\ &= x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int (x)'\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C\\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int x^2\log x dx &= \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \int \frac{1}{3}x^3\left(\log x\right)'dx\\ &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C\\ &= \frac{1}{3}x^3\left(\log x - \frac{1}{3}\right) + C\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (x)'\log x dx = x\log x - \int x(\log x)'dx\\ &= x\log x - \int dx = x\log x - x + C\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\int x^2\cos x dx &= \int x^2(\sin x)'dx = x^2\sin x - \int (x^2)'\sin x dx\\ &= x^2\sin x - \int 2x\sin x dx = x^2\sin x + 2\int x(\cos x)'dx\\ &= x^2\sin x + 2\left\{x\cos x - \int (x)'\cos x dx\right\}\\ &= x^2\sin x + 2\left(x\cos x - \sin x\right) + C\\ &= (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C\end{aligned}$$

II. (1)

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot \frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

(2)
$$\int_1^e (\log x)^2 dx = \int_1^e (x)'(\log x)^2 dx = \Big[x(\log x)^2\Big]_1^e - \int_1^e x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= e - 2\int_1^e \log x dx = e - 2\Big[x\log x - x\Big]_1^e \quad (\because \text{ I.(4) の結果より})$$
$$= e - 2 \cdot 1 = e - 2$$

(3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ とおくと

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x dx = \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' dx$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \cos x dx$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \left\{\Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' dx\right\} = e^{\frac{\pi}{2}} - \{-1 + I\}$$

より

$$2I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \qquad \therefore \quad I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$$

【2】C を積分定数とする．

I. (1) $\sqrt{x+1}=t$ より，$x+1=t^2 \Leftrightarrow x=t^2-1$ なので

$$\frac{dx}{dt}=2t \qquad \therefore \quad dx=2tdt$$

よって

$$\begin{aligned}\int (x-1)\sqrt{x+1}\,dx &= \int (t^2-2)t\cdot 2t\,dt=\int (2t^4-4t^2)\,dt \\ &= \frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+C \\ &= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C\end{aligned}$$

(2) $x^2+1=t$ より

$$2x=\frac{dt}{dx} \qquad \therefore \quad 2xdx=dt$$

よって

$$\int 2x(x^2+1)^5dx=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{6}(x^2+1)^6+C$$

(3) $\cos x=t$ より

$$-\sin x=\frac{dt}{dx} \qquad \therefore \quad \sin xdx=-dt$$

よって

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^2 xdx &= \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 xdx=\int (1-t^2)t^2(-dt) \\ &= \int (t^4-t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C \\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C\end{aligned}$$

(4) $x^2=t$ より

$$2x=\frac{dt}{dx} \qquad \therefore \quad 2xdx=dt$$

また，$\begin{array}{c|c} x & 0\to 2 \\ \hline t & 0\to 4\end{array}$ より

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx=\int_0^4 e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^4=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

(5) $\log x=t$ より

$$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx} \qquad \therefore \quad \frac{1}{x}dx=dt$$

また，$\begin{array}{c|c} x & 1\to e \\ \hline t & 0\to 1\end{array}$ より

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(6) $x=\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta \qquad \therefore\quad dx=\cos\theta d\theta$$

また，$\begin{array}{c|c} x & -1\ \to\ 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}\end{array}$ より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(7) $x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \therefore\quad dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

また，$\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{4}\end{array}$ より

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx&=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\quad\left(\because\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\&=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(8) $x+\sqrt{x^2+1}=t$ より，$\sqrt{x^2+1}=t-x\ \cdots\cdots$① であるから，2 乗して

$$x^2+1=t^2-2tx+x^2 \qquad \therefore\quad x=\frac{t^2-1}{2t}\ \cdots\cdots②$$

なので

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t\cdot t-(t^2-1)\cdot 1}{t^2}=\frac{t^2+1}{2t^2} \qquad \begin{array}{c|c} x & 0\to\quad 1 \\ \hline t & 1\to 1+\sqrt{2}\end{array}$$

また ①，② より

$$\sqrt{x^2+1}=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx&=\int_{1}^{1+\sqrt{2}}\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int_{1}^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{t}dt=\Big[\log|t|\Big]_{1}^{1+\sqrt{2}}\\&=\log\left(1+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

II. (1) $\sqrt{x-2}=t$ とおくと，$x-2=t^2 \Leftrightarrow x=t^2+2$ より

$$\frac{dx}{dt}=2t \qquad \therefore \quad dx=2tdt$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx &= \int \frac{t^2+2}{t}\cdot 2tdt = 2\int (t^2+2)dt \\ &= 2\left(\frac{1}{3}t^3+2t\right)+C \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+4\sqrt{x-2}+C\end{aligned}$$

(2) $\log x=t$ とおくと，$x=e^t$ より

$$\frac{dx}{dt}=e^t \qquad \therefore \quad dx=e^tdt$$

よって

$$\int \sin(\log x)dx=\int \sin t\cdot e^tdt$$

ここで，$I=\displaystyle\int e^t\sin tdt$ とおくと

$$\begin{aligned}I=\int (e^t)'\sin tdt &= e^t\sin t-\int e^t\cos tdt \\ &= e^t\sin t-\int \left(e^t\right)'\cos tdt \\ &= e^t\sin t-\left\{e^t\cos t-\int e^t(\cos t)'dt\right\} \\ &= e^t(\sin t-\cos t)-I\end{aligned}$$

から

$$I=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$$

$$\therefore \quad (\text{与式})=\frac{1}{2}x\left\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\right\}+C$$

(3) $\sqrt{3-\sqrt{x}}=t$ とおくと，$3-\sqrt{x}=t^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3-t^2$ より，$x=(3-t^2)^2$ なので

$$\frac{dx}{dt}=2(3-t^2)(-2t) \qquad \therefore \quad dx=4t(t^2-3)dt$$

また，
$$\begin{array}{c|c} x & 1 \ \to 4 \\ \hline t & \sqrt{2}\to 1 \end{array}$$
より

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}} &= \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{1}{t}\cdot 4t(t^2-3)dt=4\int_{\sqrt{2}}^1 (t^2-3)dt=4\left[\frac{1}{3}t^3-3t\right]_{\sqrt{2}}^1 \\ &= 4\left(\frac{1}{3}-3-\frac{2\sqrt{2}}{3}+3\sqrt{2}\right)=\frac{4}{3}\left(7\sqrt{2}-8\right)\end{aligned}$$

【3】(1) $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

(2) $X=e^x$ とおくと

$$2u=X-\frac{1}{X} \qquad \therefore \quad X^2-2uX-1=0$$

$X=u\pm\sqrt{1+u^2}$.　　$X>0$ より　$X=e^x=u+\sqrt{1+u^2}$.

したがって,

$$x=\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

(3)

$$\begin{aligned}\int e^x du &= \int e^x\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx\\ &=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx+\frac{1}{2}\int dx\\ &=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x+C \quad (x\text{ で表したもの})\\ &=\frac{1}{4}\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)^2+\frac{1}{2}\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+C\\ &=\frac{1}{2}\left\{u^2+u\sqrt{1+u^2}+\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right\}+C'\end{aligned}$$

(ここで, C, C' は積分定数)

(4)

$$\int e^x du=\int\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)du=\int u du+\int\sqrt{1+u^2}du$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+u^2}du &= \int e^x du-\int u du\\ &=\frac{1}{2}\left\{u^2+u\sqrt{1+u^2}+\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right\}+C'-\frac{1}{2}u^2-C''\\ &=\frac{1}{2}\left\{u\sqrt{1+u^2}+\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right\}+C'''\end{aligned}$$

(C', C'', C''' は積分定数)

【4】(1) $I_n\ (n \geqq 2)$ に部分積分を用いると

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx \\
&= \Big[(-\cos x)\cdot \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x dx \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\cdot \sin^{n-2} x dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right) dx \\
&= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right) = (n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{aligned}$$

よって，求める漸化式は

$$\begin{aligned}
I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n &\Longleftrightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \\
&\Longleftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}$$

(2) まず，$I_{2n}\ (n \geqq 1)$ に対して，(1) で得た漸化式を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 6\cdot 4\cdot 2} I_0
\end{aligned}$$

ここで，$I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ であるから，これを上式に代入して

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

同様に，$I_{2n+1}\ (n \geqq 1)$ に対して，(1) で得た漸化式を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{2n(2n-2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 7\cdot 5\cdot 3}\ I_1
\end{aligned}$$

ここで，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ であるから，これを上式に代入して

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 7\cdot 5\cdot 3}$$

〔証明終〕

【5】(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ について，$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと，$-1=\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore \quad dx=-dt$$

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \quad \cdots①$$

よって示された.

また，$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}$ とおくと，$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ であり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}$$

から，

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

ゆえに，① から，$A=B$ が成立する.　〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}
A+B&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx\\
&=\left[x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

これと，$A=B$ から　$2A=\dfrac{\pi-1}{2}$　　$\therefore \quad A=\dfrac{\pi-1}{4}$

添削課題

【1】(1)

$$\int_1^e \frac{\log x}{(x+1)^2}dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x+1}\right)' \log x dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x+1}\cdot\log x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x+1}(\log x)'dx$$
$$= -\frac{1}{e+1} + \int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$$
$$= -\frac{1}{e+1} + \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{e+1} + \Big[\log|x| - \log|x+1|\Big]_1^e$$
$$= -\frac{1}{e+1} + \{1-\log(e+1)+\log 2\}$$
$$= \frac{e}{e+1} + \log 2 - \log(e+1)$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)'dx = \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x)'\tan x dx$$
$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = \frac{\pi}{4} + \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3) $\displaystyle\int \{f(x)\}^\alpha f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C\ (\alpha \fallingdotseq -1)$ を利用する.

$$\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \tan^2 x(\tan x)'dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + C\ (C\ \text{は積分定数})$$

(4) $\sqrt{x} = t$ とおくと $x = t^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \therefore\quad dx = 2tdt$$

また

x	0	$\to$ 4
t	0	$\to$ 2

より

$$(\text{与式}) = \int_0^2 3^t\cdot 2tdt = 2\int_0^2 t\left(\frac{3^t}{\log 3}\right)'dt$$
$$= 2\left\{\left[t\cdot\frac{3^t}{\log 3}\right]_0^2 - \int_0^2 (t)'\cdot\frac{3^t}{\log 3}dt\right\} = 2\left\{\frac{18}{\log 3} - \frac{1}{\log 3}\int_0^2 3^t dt\right\}$$
$$= \frac{36}{\log 3} - \frac{2}{\log 3}\left[\frac{3^t}{\log 3}\right]_0^2 = \frac{36}{\log 3} - \frac{2}{\log 3}\cdot\frac{9-1}{\log 3}$$
$$= \frac{36}{\log 3} - \frac{16}{(\log 3)^2}$$

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	