M2T

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学

問題

【1】(1) DP, CB, GQ を延長すると

「3 直線は, 1 点で交わる」

ので，この交点を O とすると

(3 角錐 OBPQ) ∽ (3 角錐 OCDG)

このとき

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OC} = \mathrm{BP} : \mathrm{CD} = 2 : 4 = 1 : 2$$

となり，相似比が 1 : 2 となるので，体積比は

$$1^3 : 2^3 = 1 : 8 \quad \cdots ①$$

ここで

$$\mathrm{OC} = 4 \times 2 = 8$$

となり，3 角錐 OCDG の体積 V' は

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{CDG} \times \mathrm{OC} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \times 8 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

となるので，①より，立体 BPQ-CDG の体積 V は

$$V = \frac{7}{8}V' = \frac{7}{8} \times \frac{64}{3} = \frac{56}{3} \qquad \text{(答)}$$

(2) △APD において

$$\mathrm{PD} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

となるので

$$\mathrm{OD} = 2\mathrm{PD} = 4\sqrt{5}$$

また，△CDG において

$$\mathrm{DG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

ここで，△ODG において，頂点 O から底辺 DG に下ろした垂線の足を M とすると

「△ODG は, 2 等辺 3 角形」

だから

$$\mathrm{DM} = \frac{1}{2}\mathrm{DG} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

となるので

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$$

これより

$$\triangle\mathrm{ODG}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=24\quad\cdots②$$

このとき

$$\triangle\mathrm{OPQ}\backsim\triangle\mathrm{ODG}$$

であり，相似比は

$$\mathrm{OP}:\mathrm{OD}=2\sqrt{5}:4\sqrt{5}=1:2$$

となるので

$$\triangle\mathrm{OPQ}:\triangle\mathrm{ODG}=1^2:2^2=1:4$$

よって，②より，4 角形 DPQG の面積 S は

$$S=\frac{3}{4}\triangle\mathrm{ODG}=\frac{3}{4}\times24=18\qquad(\text{答})$$

【2】(1) 条件より

「$\triangle$PAB, $\triangle$PCD は, 2 等辺 3 角形」

だから，AB の中点を M，CD の中点を N とおくと

$$\mathrm{PM} = \mathrm{PN} = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - 4^2} = 8$$

となるので，MN $= 8$ より

「$\triangle$PMN は，正 3 角形」

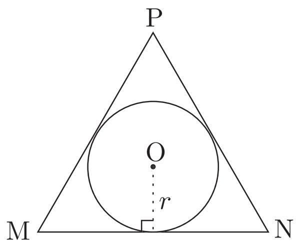
このとき，正 4 角錐の頂点 P から底面 ABCD に下ろした垂線の足を H とすると

「点 H は, MN の中点と一致する」

ので，求める正 4 角錐の高さ PH は

$$\mathrm{PH} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 球の中心を O とし，平面 PMN における断面図を考えると



このとき，図より

「球の半径は, $\triangle$PMN の内接円の半径と一致する」

ので，球の半径を r とすると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times (8+8+8) \times r = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad & 12r = 16\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad & r = \frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) (2) より，球の表面積 S は

$$S = 4 \times \pi \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{64}{3}\pi \qquad \text{(答)}$$

また，体積 V は

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{256\sqrt{3}}{27}\pi \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$ であるから，頂点 P から底面 ABC に下ろした垂線の足を H とするとき

「点 H は, $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心と一致する」

このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正 3 角形かつ $\mathrm{AB}=3$ だから

$$\mathrm{AH}=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$
$$\therefore\quad \mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$$

よって，4 面体 PABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{PH}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\times 1=\frac{3\sqrt{3}}{4}\qquad(\text{答})$$

(2)

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=x\ (0<x<3)$$

とおくと,「$\triangle\mathrm{AEF}$ は正 3 角形」となるので

$$\mathrm{EF}=x$$

このとき，$\mathrm{PE}=\mathrm{PF}=y$ とおいて，$\triangle\mathrm{PEF}$ に余弦定理を用いると

$$x^2=y^2+y^2-2\times y\times y\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}y^2\quad\cdots①$$

ここで

$$\cos\angle\mathrm{PAB}=\frac{\frac{\mathrm{AB}}{2}}{\mathrm{PA}}=\frac{3}{4}$$

であり，$\triangle\mathrm{PAE}$ に余弦定理を用いると

$$y^2=x^2+2^2-2\times x\times 2\times\frac{3}{4}=x^2-3x+4\quad\cdots②$$

となるので，②を①に代入すると

$$x^2=\frac{2}{5}(x^2-3x+4)\quad\Leftrightarrow\quad 3x^2+6x-8=0\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{3}$$

よって，$0<x<3$ より

$$x=\mathrm{AE}=\frac{-3+\sqrt{33}}{3}\qquad(\text{答})$$

【4】(1) 球の中心をO，正4面体の各頂点をA，B，C，Dとする．このとき，頂点Aから底面BCDに下ろした垂線の足をHとすると

「点Hは，△BCDの外心と一致する」

ので，正4面体の1辺の長さを x とおくと，正弦定理より

$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{BH} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

ここで，△ABHにおいて

$$\mathrm{AH} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

となり，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = 1$ だから

$$\mathrm{OH} = \mathrm{AH} - \mathrm{OA} = \frac{\sqrt{6}}{3}x - 1$$

となるので，△OBHにおいて

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}x - 1\right)^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(x - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (\because\ x > 0) \qquad \text{(答)}$$

(2) 球の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \quad \cdots ①$$

また，(1)より

$$\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4}{3}$$

となるので，正4面体の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCD} \times \mathrm{AH} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \sin 60^\circ\right) \times \frac{4}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \quad \cdots ②$$

よって，①，②より

$$V_1 : V_2 = \frac{4}{3}\pi : \frac{8\sqrt{3}}{27} = 9\pi : 2\sqrt{3} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を下ろすと

「H は △BCD の外心と一致する」

さらに，△BCD は正 3 角形であるから

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

このとき，△ABH において

$$\mathrm{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

となるので，正 4 面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \quad \cdots ①$$

また，内接球の中心を O とすると

(4 面体 OABC) = (4 面体 OABD) = (4 面体 OACD) = (4 面体 OBCD)

となり，内接球の半径を r，4 面体 OBCD の体積を V' とすると

$$V' = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCD} \times r = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times r = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 r$$

となるので

$$V = 4V' = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 r \quad \cdots ②$$

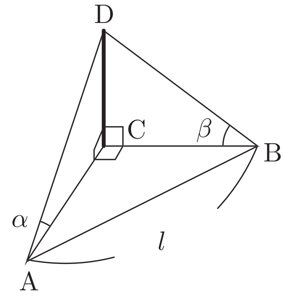
よって，①, ② より

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{\sqrt{6}}{12}a \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める円の半径を R とし，BC の中点を M とすると

$$R = \mathrm{MH} = \frac{1}{3}\mathrm{MD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 図のように，テレビ塔の頂を D，その真下を C とし，$\mathrm{CD}=h$ とすると，
$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ より



$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2=l^2 \quad \cdots①$$

ここで

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\tan\alpha \quad \therefore \quad \mathrm{AC}=\frac{h}{\tan\alpha} \quad \cdots②$$
$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}}=\tan\beta \quad \therefore \quad \mathrm{BC}=\frac{h}{\tan\beta} \quad \cdots③$$

②，③を①へ代入して

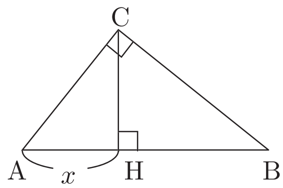
$$\left(\frac{h}{\tan\alpha}\right)^2+\left(\frac{h}{\tan\beta}\right)^2=l^2$$
$$\therefore \quad h^2=\frac{l^2\tan^2\alpha\tan^2\beta}{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

$l>0,\ \tan\alpha>0,\ \tan\beta>0$ より

$$h=\frac{l\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}\ (\mathrm{m}) \qquad \text{(答)}$$

(2) C から AB へ下ろした垂線の足を H とし，$\mathrm{AH}=x$ とすると，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{ACH}$ より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AH}}$$
$$\therefore \quad \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{AC}^2$$
$$lx=\left(\frac{h}{\tan\alpha}\right)^2$$
$$\therefore \quad x=\frac{l\tan^2\beta}{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}\ (\mathrm{m}) \qquad \text{(答)}$$



問題

【1】(1) 条件より

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 &= 0 \\ 2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 &= 0 \\ 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 &= 0 \\ (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2},\ 1$$

$$\therefore\quad \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$(\sqrt{2}\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) > 0$$

$$\cos\theta < -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\theta > \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi,\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi \qquad \text{(答)}$$

(4) 3角関数の合成より

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \alpha)$$

ただし

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad \alpha = \frac{3}{4}\pi$$

であるから

$$\text{(与式)} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta + \frac{3}{4}\pi < \frac{11}{4}\pi$ より

$$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta + \frac{3}{4}\pi \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi \leqq \theta + \frac{3}{4}\pi < \frac{11}{4}\pi$$

$$\therefore\quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{12},\ \frac{17}{12}\pi \leqq \theta < 2\pi \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $x+2y-1=0,\ 3x+y-2=0$ と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \tan\beta = -3$$

2 直線のなす角を θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta = \left|\tan(\alpha-\beta)\right| = \left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2}-(-3)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)}\right| = 1$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4} \qquad (\text{答})$$

(2) 求める直線の方程式は

$$y = m(x-1)$$

とおける.

$x-2y-2=0,\ y=m(x-1)$ と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan\beta = m$$

2 直線のなす角が $\frac{\pi}{6}$ だから

$$\left|\tan(\alpha-\beta)\right| = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\left|\frac{\frac{1}{2}-m}{1+\frac{1}{2}m}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$11m^2-16m-1=0$$

$$\therefore \quad m = \frac{8\pm5\sqrt{3}}{11}$$

よって

$$y = \frac{8\pm5\sqrt{3}}{11}(x-1) \qquad (\text{答})$$

【3】(1) 和積公式より

$$\begin{aligned} \sin 3\theta - \sin 2\theta &= 2\cos\frac{5}{2}\theta \sin\frac{1}{2}\theta \\ &= 2\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{10} = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\sin 3\theta = \sin 2\theta \qquad 〔証明終〕$$

(2) 3 倍角，2 倍角の公式より

$$\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$\sin\theta \neq 0$ より

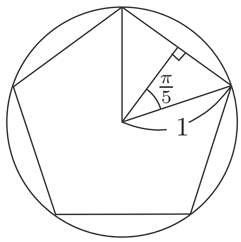
$$-4\sin^2\theta + 3 = 2\cos\theta$$
$$\therefore\ 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

$\cos\theta > 0$ より

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad (答)$$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ より

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$



よって, 求める長さは

$$5\times 2\times\sin\frac{\pi}{5} = \frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \qquad (答)$$

【4】(1) 条件より

$$\begin{aligned}\sin^2\theta+\cos\theta+a &= 0\\(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+a &= 0\\\cos^2\theta-\cos\theta-1 &= a\end{aligned}$$

となるので，$\cos\theta=t$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$ で

$$t^2-t-1=a$$

ここで

$$\begin{cases} y=t^2-t-1 \quad (-1\leqq t\leqq 1)\\ y=a\end{cases}$$

のグラフを考える．

$-1\leqq t\leqq 1$ の 1 つの t に対して，θ は 1 つ求まるので

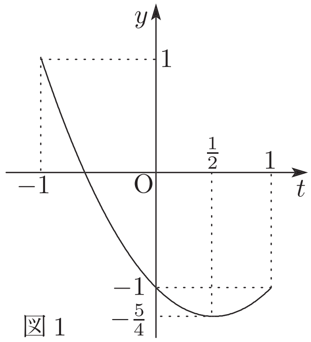


図 1

図 1 より

$$\begin{cases} a>1 \text{ のとき} & 0\text{ 個}\\ -1<a\leqq 1 \text{ のとき} & 1\text{ 個}\\ -\dfrac{5}{4}<a\leqq -1 \text{ のとき} & 2\text{ 個}\\ a=-\dfrac{5}{4} \text{ のとき} & 1\text{ 個}\\ a<-\dfrac{5}{4} \text{ のとき} & 0\text{ 個}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+\sin\theta+a &= 0\\ (1-\sin^2\theta)+\sin\theta+a &= 0\\ \sin^2\theta-\sin\theta-1 &= a\end{aligned}$$

となるので，$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ で

$$t^2-t-1=a$$

ここで

$$\begin{cases} y=t^2-t-1 \quad (0\leqq t\leqq 1)\\ y=a\end{cases}$$

のグラフを考えると
$0\leqq t<1$ の 1 つの t に対して，θ は 2 つ，
$t=1$ の t に対して，θ は $\dfrac{\pi}{2}$ のみの 1 つ求まる．

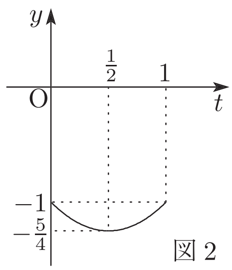


図 2

図 2 より

$$\begin{cases} a>-1 \text{ のとき} & 0\text{ 個}\\ a=-1 \text{ のとき} & 3\text{ 個}\\ -\dfrac{5}{4}<a<-1 \text{ のとき} & 4\text{ 個}\\ a=-\dfrac{5}{4} \text{ のとき} & 2\text{ 個}\\ a<-\dfrac{5}{4} \text{ のとき} & 0\text{ 個}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 2 倍角の公式より

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\sin x\cos^2 x}{\cos x} = 2\tan x\cos^2 x$$

である．ここで

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \therefore \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

だから

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\tan\dfrac{x}{2} = u$ とおくと，(1) の考察から

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

となるので，与えられた方程式は

$$(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{1+u^2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{2u}{1+u^2} - 1 = 0$$

これを変形すると

$$\begin{aligned} \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)u-(1+u^2)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad u^2+(1-\sqrt{3})u-\sqrt{3}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (u+1)(u-\sqrt{3})=0 \end{aligned}$$

となるので

$$u = -1,\ \sqrt{3}$$

よって，$-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3} \qquad \therefore \quad x = -\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi \qquad \text{(答)}$$

【6】 $f(x) = x^2 - 2x\cos\theta - 2\sin\theta + 1$ とおく.

(1) $f(x) = 0$ が，符号の異なる 2 解をもつための条件は

$$f(0) = -2\sin\theta + 1 < 0$$
$$\sin\theta > \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x) = 0$ の 2 解がともに正であるための条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = \cos^2\theta + 2\sin\theta - 1 \geqq 0 & \cdots ① \\ \text{軸} : x = \cos\theta > 0 & \cdots ② \\ f(0) = -2\sin\theta + 1 > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より

$$(1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta - 1 \geqq 0$$
$$\sin\theta(\sin\theta - 2) \leqq 0$$
$$\sin\theta \geqq 0 \quad (\because\ \sin\theta - 2 < 0)$$
$$\therefore\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \quad \cdots ①'$$

②より

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \cdots ②'$$

③より

$$\sin\theta < \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta \leqq \pi \quad \cdots ③'$$

よって，①′，②′，③′ より

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6} \qquad \text{(答)}$$

１０章　場合の数

問題

【1】(1) 条件より

(i) 一の位が 0 のとき

$${}_6\mathrm{P}_2 \times 1 = 30 \quad (個)$$

(ii) 一の位が 2, 4, 6 のとき

百の位 (0, 一の位以外の数)	: 5 通り
十の位 (百, 一の位以外の数)	: 5 通り
一の位 (2, 4, 6)	: 3 通り

$$\therefore \quad 5 \times 5 \times 3 = 75 \quad (個)$$

よって，(i)，(ii) より

$$30 + 75 = 105 \quad (個) \qquad (答)$$

(2) 一の位の数の取り方は 3 通りあるので

$$5 \times 5 \times 3 = 75 \quad (個) \qquad (答)$$

＜別解＞

3 桁の整数は全体で

$$6 \times {}_6\mathrm{P}_2 = 180 \quad （個）$$

だから，(1) の結果を利用して

$$180 - 105 = 75 \quad （個）$$

(3) $x + y + z =$ (3 の倍数) となるような 0, $\cdots$,6 からとった 3 数の組は

(i) 0 を含むとき

$$(0,\ 1,\ 2),\ (0,\ 1,\ 5),\ (0,\ 2,\ 4),\ (0,\ 3,\ 6),\ (0,\ 4,\ 5) \quad \cdots (*)$$

(0, 1, 2) から作られる 3 桁の数は

百の位 : 2 通り
十の位 : 2 通り
一の位 : 1 通り
$\therefore \quad 2 \times 2 \times 1 = 4 \quad (個)$

よって，$(*)$ から作られる 3 桁の数は

$$4 \times 5 = 20 \quad (個)$$

(ii) 0 を含まないとき

$$(1,\ 2,\ 3),\quad (1,\ 2,\ 6),\quad (1,\ 3,\ 5),\quad (1,\ 5,\ 6)$$
$$(2,\ 3,\ 4),\quad (2,\ 4,\ 6),\quad (3,\ 4,\ 5),\quad (4,\ 5,\ 6)$$

これらから作られる 3 桁の数は

$${}_3\mathrm{P}_2 \times 8 = 48 \quad (個)$$

よって，(i)，(ii) より

$$20 + 48 = 68 \quad (\text{個}) \qquad (\text{答})$$

(4) 5 の倍数になるのは，一の位が 0 か 5 のときだから

(i) 一の位が 0 のとき

百，十の位を任意に決められるので

$${}_6\mathrm{P}_2 = 30 \quad (\text{個})$$

(ii) 一の位が 5 のとき

百の位 : 5 通り
十の位 : 5 通り
$\therefore \quad 5 \times 5 = 25 \quad (\text{個})$

よって，(i)，(ii) より

$$30 + 25 = 55 \quad (\text{個}) \qquad (\text{答})$$

【2】東 (右) へ 1 区間進むことを →，南 (下) へ 1 区間進むことを ↓ とすると，A から B への最短経路の数は，→ を 5 個，↓ を 5 個一列に並べる場合の数に対応する．

(1) A から B へ最短経路をとるとき，通過する区間は 10 か所．

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
→   → →   →   →

その 10 か所に → (東への移動) を 5 個選んできて当てはめる組合せと考えられるから

$${}_{10}\mathrm{C}_5 = 252 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

＜別解＞
A から B への最短経路は，5 つの → と 5 つの ↓ の順列で表せるので

$$\frac{10!}{5!\,5!} = 252 \quad (\text{通り})$$

としてもよい．

(2) A→C の最短経路のとり方は，3ヶ所のうち，→ を 1 個当てはめる組合せだから

$${}_3\mathrm{C}_1 = 3 \quad (\text{通り})$$

また，C→B の最短経路のとり方は，7ヶ所のうち，→ を 4 個当てはめる組合せだから

$${}_7\mathrm{C}_4 = 35 \quad (\text{通り})$$

よって，求める場合の数は

$$3 \times 35 = 105 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

(3) A→B のすべての最短経路の数から，C を通る場合と，D を通る場合の数を引けばよい．このとき，D を通るのは

$${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_3 = 3 \times 35 = 105 \quad (\text{通り})$$

であり，最短経路の中には，C と D の両方とも通過するような経路は存在しないので，C または D を通る最短経路の数は

$$105 + 105 = 210 \quad (\text{通り})$$

よって，求める場合の数は

$$252 - 210 = 42 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

(4) A→C の最短経路のとり方は，(2) から

$${}_3\mathrm{C}_1 = 3 \quad (\text{通り})$$

また，C→E の最短経路のとり方は，→↓ と進むか，↓→ と進むかしかないから

$$2 \quad (\text{通り})$$

さらに，E→B の最短経路のとり方は，5ヶ所のうち → を 3 個当てはめる組合せだから

$${}_5\mathrm{C}_3 = 10 \quad (\text{通り})$$

以上より，求める場合の数は

$$3 \times 2 \times 10 = 60 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

(5) C を通る最短経路の数は，(2) より

$$105 \quad (\text{通り})$$

また，E を通る最短経路の数は

$$_5C_2 \times {}_5C_3 = 100 \quad (\text{通り})$$

さらに，C, E の両方を通る最短経路の数は，(4) より

$$60 \quad (\text{通り})$$

よって，C または E の，少なくとも一方を通る最短経路の数は

$$(105 + 100) - 60 = 145 \quad (\text{通り})$$

となるので，C も E も通らない最短経路の数は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{すべての} \\ \text{最短経路の数} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{C または E の少なくとも} \\ \text{一方を通る最短経路の数} \end{pmatrix} \\ = \quad & 252 - 145 \\ = \quad & 107 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

【3】(1) 12 人から 4 人を選んで 1 組とし，残りの 8 人から 4 人を選んで 2 組とすれば，残りの 4 人は自動的に 3 組となるから

$$ {}_{12}\mathrm{C}_4 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 34650 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答}) $$

(2) 12 人から 5 人を選び，残りの 7 人から 4 人を選べば，5 人，4 人，3 人のグループができるので

$$ {}_{12}\mathrm{C}_5 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 27720 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答}) $$

(3) 3 つのグループに区別がないので

$$ \frac{{}_{12}\mathrm{C}_4 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_4}{3!} = 5775 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答}) $$

＜別解＞

特定の人に 3 人付け加えて 4 人の組をつくることを考えると

$$ {}_{11}\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5775 \quad (\text{通り}) $$

(4) 3 人のグループには区別がないので

$$ {}_{12}\mathrm{C}_6 \cdot \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{C}_3}{2!} = 9240 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答}) $$

【4】(1) 赤球 4 個，青球 2 個，黄球 1 個の 7 個の球を 1 列に並べる並べ方は

$$\frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!}=105 \quad (通り) \qquad (答)$$

(2) 補集合を考えて

「青球が隣り合う並べ方」

の総数を求めると，青球 2 個をひとかたまりと考えて

$$\frac{6!}{4!\cdot 1!\cdot 1!}=30 \quad (通り)$$

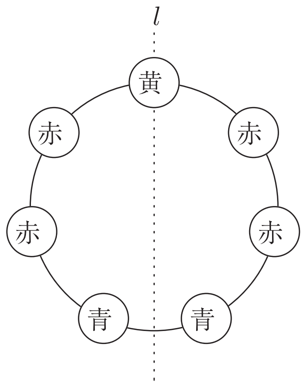
となるので，求める並べ方は

$$105-30=75 \quad (通り) \qquad (答)$$

(3) 7 個の球を円形に並べる方法は，黄球の場所を固定して，赤球 4 個と青球 2 個の並べ方を考えればよいので

$$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15 \quad (通り) \qquad (答)$$

(4) (3) のうち



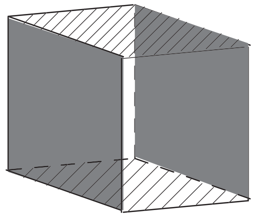
のように，直線 l に関して対称となるものが

$$\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3 \quad (通り)$$

あるので，求めるネックレスの総数は

$$\frac{15-3}{2}+3=9 \quad (通り) \qquad (答)$$

【5】(1) 条件から，同じ色で塗れるのは対面どうしの場合 (回転して同じになる塗り方は同じものとみなす) だけなので，ある 3 色を選んだとき，その塗り方は



1　(通り)

また，5 色から 3 色を選ぶ選び方は

$_5\mathrm{C}_3 = 10$　(通り)

よって，求める場合の数は

$1 \times 10 = 10$　(通り)　　(答)

(2) 条件から，使う色の数は最低 3 色となるので

(i) 3 色を使うとき

(1) より，10 (通り)

(ii) 4 色を使うとき

まず 2 色を選んで，その 2 色で 2 組の対面を塗る．そして残りの 2 面を，残った 2 色で塗るようにすればよいので

(5 色から 4 色の選び方) × (4 色から 2 組の対面に使う 2 色の選び方)
$= {_5\mathrm{C}_4} \times {_4\mathrm{C}_2} = 30$ (通り)

(iii) 5 色全部を使うとき

まず 1 組を同じ色に塗る．この 1 色の選び方は

5　(通り)

であり，残りの 4 つの面を 4 色で塗る方法は，じゅず順列となるから

$\dfrac{(4-1)!}{2} = 3$ (通り)

よって，この場合の数は

$5 \times 3 = 15$ (通り)

よって，(i)～(iii) より

$10 + 30 + 15 = 55$ (通り)　　(答)

添削課題

【1】男子を●，女子を○で表す．

(1) 両端に男子 2 人を並べ，それに対し，残りの 5 人の並べ方を決めればよい．

$$\bullet\ \underbrace{\square\square\square\square\square}_{\bullet\bullet\bullet\circ\circ}\ \bullet$$

$\therefore\quad {}_5P_2 \times {}_5P_5 = 5 \times 4 \times 120 = 2400$ (通り)　　(答)

(2) 両端が男子で女子が隣り合うものは，女子をセットにして考えると

$${}_5P_2 \times {}_4P_4 \times 2 = 960 \quad \text{(通り)}$$

よって，補集合を考えて，女子が隣り合わないのは

$2400 - 960 = 1440$ (通り)　　(答)

＜別解＞

男子を先に並べると

$${}_5P_5 = 120 \quad \text{(通り)}$$

その間に女子を入れると

●　●　●　●　●
　↑　↑　↑　↑

$\therefore\quad {}_4P_2 = 12$ (通り)

よって

$$120 \times 12 = 1440 \quad \text{(通り)}$$

(3) 条件より

(i) A 君が両端に来る場合

B さんの場所は決まる．すなわち

「AB……」 か 「……BA」

このとき，先に男子を並べ，他の女子を間に入れればよいので

(AB) ●　●　●　● (BA)
　　　↑　↑　↑

$\therefore\quad 2 \times {}_4P_4 \times 3 = 144$ (通り)

(ii) A 君が両端に来ない場合

A 君以外の男子 4 人を先に並べ，AB か BA を入れ，さらに残る女子を B さんの隣りに来ないように間に入れればよいので

●　●　●　●　⇒　●　AB ●　●　●
　↑　↑　↑　　　　↑　　↑　↑
「AB」 or 「BA」

$\therefore\quad {}_4P_4 \times (3 \times 2) \times 3 = 432$ (通り)

よって，(i)，(ii) より

$$144 + 432 = 576 \quad (\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

＜別解＞

まず，B さんの隣りになる男子を選ぶと

$$4 \quad (\text{通り})$$

となり，A 君ともう 1 人の男子の並べかえは

$$2 \quad (\text{通り})$$

また，「A，B，男」を 1 人の男子とみて，4 人の男子を並べる方法は

$$4! \quad (\text{通り})$$

ここで，3 ヶ所の間から 1 ヶ所選んで，残りの女子を並べる並べ方は

$$3 \quad (\text{通り})$$

よって

$$4 \times 2 \times 4! \times 3 = 576 \quad (\text{通り})$$

M2T
高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	