M2TK

本科 1 期 6 月度

解答

Z会東大進学教室

# 高 2 難関大数学 K

## 問題

【1】(1) $y=\log_2 4x=\log_2 x+\log_2 4=\log_2 x+2$

よって，$y=\log_2 x$ を $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフであるから，〔図 1〕のようになる．

(2) $y=\log_2(2x-6)=\log_2 2(x-3)=\log_2(x-3)+\log_2 2=\log_2(x-3)+1$

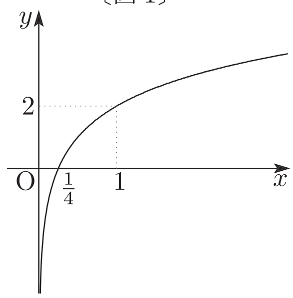
よって，$y=\log_2 x$ を $x$ 軸方向に 3，$y$ 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフであるから，〔図 2〕のようになる．

(3) 関数は $x=1$ で定義されず

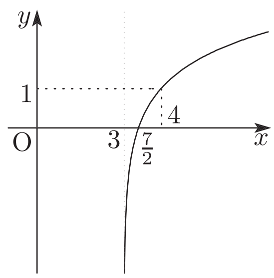
$$\begin{cases} y=\log_2(x-1) & (x>1 \text{ のとき}) \\ y=\log_2(-x+1) & (x<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，グラフは〔図 3〕のようになる．

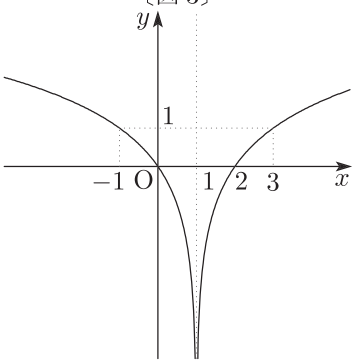
〔図 1〕




〔図 2〕




〔図 3〕



【2】(1) 底を 2 にそろえると

$$\begin{aligned}
\log_3 0.5 &= \frac{\log_2 0.5}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 3} = -\frac{1}{\log_2 3} \\
\log_2 0.5 &= \log_2 2^{-1} = -1 \\
\log_{0.2} 0.5 &= \frac{\log_2 0.5}{\log_2 0.2} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 5^{-1}} = \frac{1}{\log_2 5}
\end{aligned}$$

ここで

$$(\log_2 2 =)\ 1 < \log_2 3$$

より

$$1 > \frac{1}{\log_2 3}\ (> 0) \qquad \therefore\ -1 < -\frac{1}{\log_2 3} \quad \cdots ①$$

また

$$-\frac{1}{\log_2 3}\ (< 0)\ < \frac{1}{\log_2 5} \quad \cdots ②$$

①，② より

$$-1 < -\frac{1}{\log_2 3} < \frac{1}{\log_2 5}$$

よって

$$\boldsymbol{\log_2 0.5 < \log_3 0.5 < \log_{0.2} 0.5} \qquad (\text{答})$$

(2) 底を 2 にそろえると

$$\begin{aligned}
&1 = \log_2 2 \\
&\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3} \\
&\log_6 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1}{1 + \log_2 3}
\end{aligned}$$

これより

$$1 < \log_2 3$$

だから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\log_2 3} < \frac{1}{\log_2 3} < 1 < \log_2 3 \\
&\therefore\ \boldsymbol{\log_6 2 < \log_3 2 < 1 < \log_2 3} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

【3】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

与式より

$$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

であり，これは ① をみたすから

$$\boldsymbol{x = \sqrt{3}} \qquad (\text{答})$$

(2) 底の条件より

$$0 < x < 1, \quad 1 < x \quad \cdots ①$$

与式より

$$x^{-2} = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{9} \qquad \therefore\ x = \pm\frac{1}{3}$$

① より

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}} \qquad (\text{答})$$

(3) 真数条件より

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-5)(x+2) > 0 \quad \therefore\ x < -2,\ 5 < x$$
$$x - 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 < x$$

よって

$$5 < x \quad \cdots ①$$

また，与式の左辺は

$$\begin{aligned}\log_4(x^2 - 3x - 10) &= \frac{\log_2(x^2 - 3x - 10)}{\log_2 4} \\ &= \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 3x - 10) \\ &= \log_2(x - 2)\end{aligned}$$

なので，与式は

$$\log_2(x^2 - 3x - 10) = \log_2(x - 2)^2$$

よって

$$x^2 - 3x - 10 = (x-2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 14$$

これは ① をみたすから

$$\boldsymbol{x = 14} \qquad (\text{答})$$

(4) 真数条件より

$$x-1>0, \quad x+5>0 \qquad \therefore\ x>1 \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}
\log_2(x-1)=\log_4(x+5) \quad &\iff \quad \log_2(x-1)=\frac{\log_2(x+5)}{\log_2 4} \\
&\iff \quad \log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(x+5) \\
&\iff \quad 2\log_2(x-1)=\log_2(x+5) \\
&\iff \quad \log_2(x-1)^2=\log_2(x+5) \\
&\iff \quad (x-1)^2=x+5 \\
&\iff \quad x^2-2x+1=x+5 \\
&\iff \quad x^2-3x-4=0 \\
&\iff \quad (x-4)(x+1)=0
\end{aligned}$$

① を考え

$$\boldsymbol{x=4} \qquad \text{(答)}$$

(5) 真数条件より

$$x>0, \quad x+2>0 \qquad \therefore\ x>0 \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}
\log_3 x=\log_9(x+2) \quad &\iff \quad \log_3 x=\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9} \\
&\iff \quad \log_3 x=\frac{1}{2}\log_3(x+2) \\
&\iff \quad 2\log_3 x=\log_3(x+2) \\
&\iff \quad \log_3 x^2=\log_3(x+2) \\
&\iff \quad x^2=x+2 \\
&\iff \quad x^2-x-2=0 \\
&\iff \quad (x-2)(x+1)=0
\end{aligned}$$

① を考え

$$\boldsymbol{x=2} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は 1 より大きいから

$$x \leqq 3^3 = 27$$

これと①より

$$\boldsymbol{0 < x \leqq 27} \qquad (答)$$

(2) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は 1 より小さいから

$$x < (0.1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000$$

これと①より

$$\boldsymbol{0 < x < 1000} \qquad (答)$$

(3) 真数条件より

$$x^2 - 2x - 15 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-5)(x+3) > 0 \qquad \therefore\ x < -3,\ x > 5$$
$$3x - 9 > 0 \qquad \therefore\ x > 3$$

よって

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

底は 1 より小さいので

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x-15) > \log_{\frac{1}{4}}(3x-9) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 15 < 3x - 9 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x - 6 < 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-6)(x+1) < 0 \\ &\quad\ \therefore \quad -1 < x < 6 \end{aligned}$$

① を考え

$$\boldsymbol{5 < x < 6} \qquad (答)$$

(4) 真数条件より

$$\begin{aligned} 2x-1>0 &\iff x>\frac{1}{2} \\ x^2-8x+6>0 &\iff x<4-\sqrt{10},\quad 4+\sqrt{10}<x \end{aligned}$$

以上より

$$\frac{1}{2}<x<4-\sqrt{10},\quad 4+\sqrt{10}<x \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} & \log_2(2x-1)>\log_4(x^2-8x+6) \\ \iff & \log_2(2x-1)>\frac{\log_2(x^2-8x+6)}{\log_2 4} \\ \iff & \log_2(2x-1)>\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6) \\ \iff & 2\log_2(2x-1)>\log_2(x^2-8x+6) \\ \iff & \log_2(2x-1)^2>\log_2(x^2-8x+6) \end{aligned}$$

底は 1 より大きいから

$$\begin{aligned} \iff & (2x-1)^2>x^2-8x+6 \\ \iff & 4x^2-4x+1>x^2-8x+6 \\ \iff & 3x^2+4x-5>0 \\ & \therefore x<\frac{-2-\sqrt{19}}{3},\quad \frac{-2+\sqrt{19}}{3}<x \end{aligned}$$

これと ① より

$$\boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<x<4-\sqrt{10},\quad 4+\sqrt{10}<x} \qquad \text{(答)}$$

(5) 真数条件より

$$\begin{aligned} x-2>0 &\iff x>2 \\ x+4>0 &\iff x>-4 \end{aligned}$$

よって

$$x>2 \quad \cdots ①$$

$$2\log_{0.5}(x-2) > \log_{0.5}(x+4) \iff \log_{0.5}(x-2)^2 > \log_{0.5}(x+4)$$

与式の対数の底はともに 1 より小さいから

$$\begin{aligned} &\iff (x-2)^2 < x+4 \\ &\iff x^2 - 5x < 0 \\ &\iff x(x-5) < 0 \\ &\quad \therefore 0 < x < 5 \end{aligned}$$

これと①より

$\boldsymbol{2 < x < 5}$ (答)

【5】(1) 真数条件および底の条件より

$$0 < x < 1,\ 1 < x \quad \cdots ①$$

底を 3 にそろえると

$$\log_4 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 4}$$
$$\log_x 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x}$$

だから与式は

$$\log_3 \sqrt{2} \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 4} = \frac{1}{\log_3 x}$$
$$\log_3 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2^2} = \frac{1}{\log_3 x}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\log_3 x}{2} = \frac{1}{\log_3 x}$$
$$(\log_3 x)^2 = 4$$
$$\therefore\ \log_3 x = \pm 2$$

よって

$$x = 3^2 = 9, \quad x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

であるが，これは ① をみたすので

$$\boldsymbol{x = 9,\quad \frac{1}{9}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数条件より

$$2 - x > 0 \text{ かつ } 3 - x > 0 \qquad \therefore\ x < 2 \quad \cdots ①$$

与式は

$$\log_2 (2-x)(3-x) \geqq \log_2 2$$

であり，底は 1 より大きいから

$$(2-x)(3-x) \geqq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 \geqq 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad (x-4)(x-1) \geqq 0$$
$$\therefore x \leqq 1, \quad 4 \leqq x$$

これと ① より

$$\boldsymbol{x \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数条件より

$$x^2 - 6 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -\sqrt{6}, \quad \sqrt{6} < x \quad \cdots ①$$

底の条件より

$$0 < \frac{x}{2} - 1 < 1, \quad 1 < \frac{x}{2} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 < x < 4, \quad 4 < x \quad \cdots ②$$

①，② より

$$\sqrt{6} < x < 4,\ 4 < x \quad \cdots ③$$

ここで，与式を底 10 に変換すると，

$$\frac{\log_{10}(x^2-6)}{\log_{10}\left(\frac{x}{2}-1\right)} > 1$$

(i) $\log_{10}\left(\frac{x}{2}-1\right) > 0$ のとき，$\dfrac{x}{2}-1 > 1$ すなわち $x > 4$ $\cdots$④

このとき

$$\begin{aligned}\log_{10}(x^2-6) > \log_{10}\left(\frac{x}{2}-1\right) &\iff x^2-6 > \frac{x}{2}-1\\ &\iff 2x^2-x-10 > 0\\ &\iff (x+2)(2x-5) > 0\\ &\iff x < -2,\ \frac{5}{2} < x\end{aligned}$$

であるが，これと④より

$$4 < x \quad \cdots ⑤$$

(ii) $\log_{10}\left(\frac{x}{2}-1\right) < 0$ のとき，$\dfrac{x}{2}-1 < 1$ すなわち $x < 4$ $\cdots$⑥ の場合

$$\begin{aligned}\log_{10}(x^2-6) < \log_{10}\left(\frac{x}{2}-1\right) &\iff x^2-6 < \frac{x}{2}-1\\ &\iff 2x^2-x-10 < 0\\ &\iff (x+2)(2x-5) < 0\\ &\iff -2 < x < \frac{5}{2}\end{aligned}$$

これと⑥より

$$-2 < x < \frac{5}{2} \quad \cdots ⑦$$

③，⑤，⑦より

$$\boldsymbol{\sqrt{6} < x < \frac{5}{2},\ 4 < x} \qquad (答)$$

(4) 真数条件より

$$x < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < x \quad \cdots ①$$

(i) $a > 1$ の場合

$$x^2 - 2 \leqq |x+1| \quad \cdots ②$$

であるが，$x^2 - 2 = x + 1$ すなわち $x^2 - x - 3 = 0$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ であり，$x^2 - 2 = -x - 1$ すなわち $x^2 + x - 1 = 0$ の解は $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ だから，② の解は

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

これと，① より

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < -\sqrt{2},\quad \sqrt{2} < x \leqq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

(ii) $0 < a < 1$ の場合

$$x^2 - 2 \geqq |x+1|$$

であるが，この解は，① とあわせて

$$x \leqq \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{1+\sqrt{13}}{2} \leqq x$$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 1} \textbf{ の場合} & \boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < -\sqrt{2},\quad \sqrt{2} < x \leqq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}} \\ \boldsymbol{0 < a < 1} \textbf{ の場合} & \boldsymbol{x \leqq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \leqq x} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【6】$t=\log_{\frac{1}{2}} x$ とおくと，底が $\dfrac{1}{2}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \leqq x \leqq 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqq x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ &\Longleftrightarrow \quad -2 \leqq t \leqq 2\end{aligned}$$

$f(x)$ を $t$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 2\log_{\frac{1}{2}} x + 5 \\ &= t^2 - 2t + 5 \\ &= (t-1)^2 + 4\end{aligned}$$

$-2 \leqq t \leqq 2$ であるから，最小値は $t=1$ のとき，$\mathbf{4}$ (答)
また

$$\begin{aligned}t=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ が最小値をとるとき

$$x = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【7】

$$\log_a(2x-4)^2 < 2\log_a(x+1)$$

真数条件より

$$\begin{cases} (2x-4)^2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \iff x > -1 \text{ かつ } x \neq 2 \quad \cdots ①$$

また

$$(\text{与式}) \iff \log_a(2x-4)^2 < \log_a(x+1)^2 \quad \cdots (*)$$

であり，以下 $a$ の値で場合に分けて考える．

(i) $0 < a < 1$ のとき

$(*)$ より

$$\begin{aligned} (2x-4)^2 > (x+1)^2 &\iff 3x^2 - 18x + 15 > 0 \\ &\iff x^2 - 6x + 5 > 0 \\ &\iff (x-1)(x-5) > 0 \\ &\quad \therefore\ x < 1,\ 5 < x \end{aligned}$$

① を考え

$$-1 < x < 1, \quad 5 < x$$

(ii) $1 < a$ のとき

$(*)$ より

$$\begin{aligned} (2x-4)^2 < (x+1)^2 &\iff (x-1)(x-5) < 0 \\ &\quad \therefore\ 1 < x < 5 \end{aligned}$$

① を考え

$$1 < x < 2, \quad 2 < x < 5$$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 < x < 1, \quad 5 < x \qquad (0 < a < 1)} \\ \boldsymbol{1 < x < 2, \quad 2 < x < 5 \quad (1 < a)} \end{cases} \qquad (\text{答})$$

【8】(1) $x>1$ より，$\log_2 x>0$, $\log_x 2>0$ であるから

$$t=\log_2 x+\log_x 2$$

の各辺を 2 乗して

$$t^2=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2+2$$

よって

$$\begin{aligned} f(x)&=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-2(\log_2 x+\log_x 2)-1 \\ &=(t^2-2)-2t-1 \\ &=\boldsymbol{t^2-2t-3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) $\log_2 x>0$, $\log_x 2>0$ から，相加・相乗平均の関係より

$$t=\log_2 x+\log_x 2 \geqq 2\sqrt{\log_2 x\cdot\log_x 2}=2$$

等号は

$$\begin{aligned} \log_2 x=\log_x 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\log_2 x)^2=1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \log_2 x=\pm 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x=\frac{1}{2},\ 2 \end{aligned}$$

$x>1$ より，$x=2$ のときに成立する．
以上から求める $t$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{t\geqq 2} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より

$$g(t)=t^2-2t-3$$

とおくと

$$g(t)=(t-1)^2-4 \quad (t\geqq 2)$$

よって，$g(t)$ の最小値は

$$g(2)=\boldsymbol{-3} \qquad \text{(答)}$$

であり，このとき ($t=2$ のとき),

$$\boldsymbol{x=2} \qquad \text{(答)}$$

【9】

$$\log_x(x^2+y^2)<\log_x y+\log_x 4$$

真数条件より

$$\begin{cases} x^2+y^2>0 \\ y>0 \end{cases} \iff y>0 \quad \cdots ①$$

である．ここで，与式は

$$\log_x(x^2+y^2)<\log_x y+\log_x 4 \iff \log_x(x^2+y^2)<\log_x 4y$$

であり，底 $x$ の条件 $x>0$，$x \neq 1$ を考え，次の場合に分けて考える．

(i) $0<x<1$ のとき

$$x^2+y^2>4y \iff x^2+(y-2)^2>4 \quad \cdots ②$$

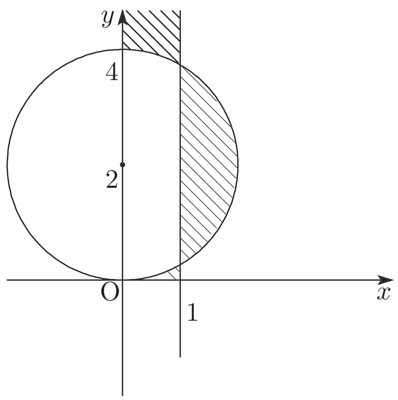
(ii) $1<x$ のとき

$$x^2+y^2<4y \iff x^2+(y-2)^2<4 \quad \cdots ③$$

以上より，与えられた不等式をみたす $x$，$y$ の条件は，① かつ (② または ③) であるから

$$y>0 \text{ かつ } \begin{cases} 0<x<1, & x^2+(y-2)^2>4 \\ \quad\text{または} & \\ 1<x, & x^2+(y-2)^2<4 \end{cases}$$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在する領域は，下図．

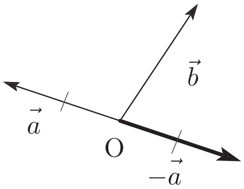



(答)

図の斜線部で，境界を含まない．

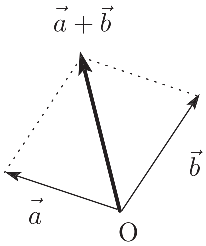
## 問題

【1】(1)




(答)

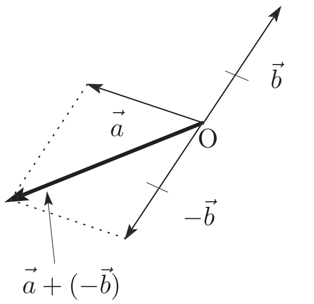
(2)

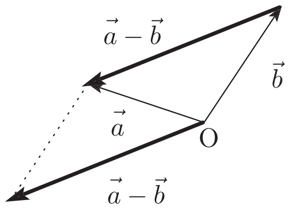



(答)

(3)

逆ベクトルから　$\left\{\vec{a}+(-\vec{b})\right\}$　　　　対角線から

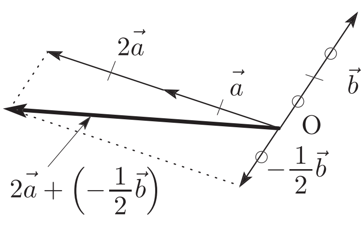


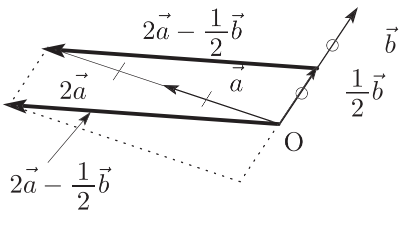




(答)

(4)

逆ベクトルから　$\left\{2\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\right\}$　　　　対角線から

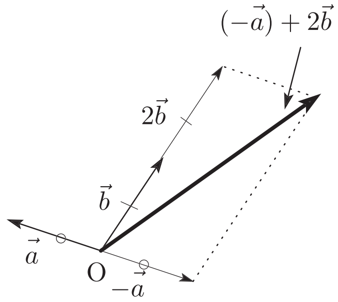


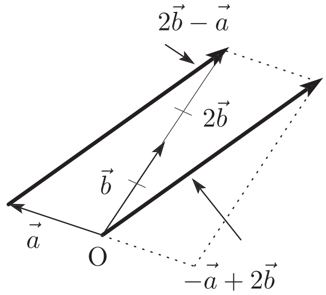




(答)

(5)

逆ベクトルから $\left\{(-\vec{a})+2\vec{b}\right\}$ 　　対角線から $\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)$

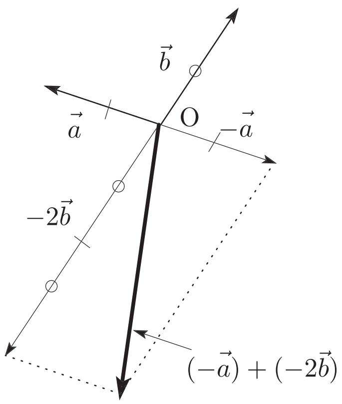


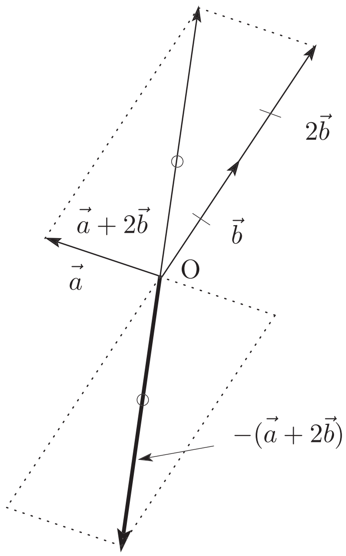




(答)

(6)

逆ベクトルから① $\left((-\vec{a})+(-2\vec{b})\right)$ 　逆ベクトルから② $\left(-(\vec{a}+2\vec{b})\right)$

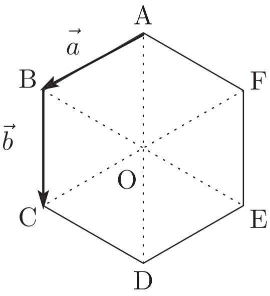



(答)

【2】正六角形の中心を O とする．

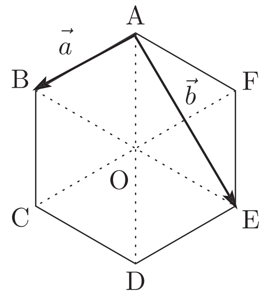
(1)




$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BO}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{2\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

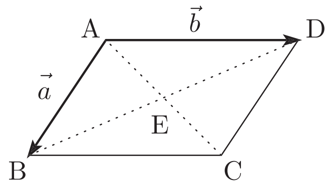



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$= \boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} \quad \text{(答)}$$




平行四辺形の 2 本の対角線の交点は，それぞれの対角線を 2 等分するから

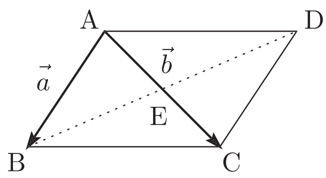
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)} \quad \text{(答)}$$

一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \quad \text{(答)}$$




$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{a}$$
$$= \boldsymbol{\vec{b} - 2\vec{a}} \quad \text{(答)}$$

【4】ベクトルの成分を縦書きで表す．すなわち

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と書く．

(1)

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{12} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

また

$$\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{148} = \boldsymbol{2\sqrt{37}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

より，$\vec{a}$ に平行な単位ベクトルは

$$\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

同様に

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

より，$\vec{b}$ に平行な単位ベクトルは

$$\pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2t \\ 3-2t \end{pmatrix}$$

であり，

$$\vec{a} + t\vec{b} \mathbin{/\!/} \vec{c} \iff \text{「}\vec{a} + t\vec{b} = k\vec{c}\text{をみたす 0 でない実数 } k \text{ が存在する」} \cdots (*)$$

ゆえに，$k$ を実数として，

$$\begin{pmatrix} 4+2t \\ 3-2t \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4 + 2t = -2k & \cdots ① \\ 3 - 2t = k & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より，

$$-k = 7 \qquad \therefore \quad k = -7$$

② より，

$$-2t = -7 - 3 \qquad \therefore \quad t = 5$$

このとき $(*)$ はみたされるから，求める $t$ の値は，$\boldsymbol{t = 5}$　　(答)

【5】(1)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$$

であり，

$$\begin{aligned}\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &\iff \quad \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\2x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{cases}11=x+2y & \cdots① \\ 10=2x+y & \cdots②\end{cases}$$

① × 2 − ② より，

$$3y=12 \qquad \therefore \quad y=4$$

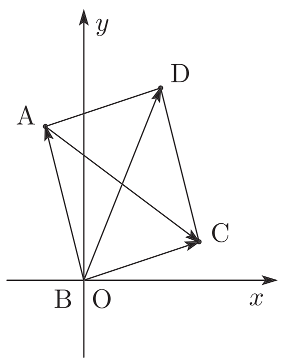
② × 2 − ① より，

$$3x=9 \qquad \therefore \quad x=3$$

よって

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 4)} \qquad (\text{答})$$

(2) B を原点として，平行四辺形 ABCD を図示すると右のようになる．




$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}} & \cdots① \\ \overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}} & \cdots②\end{cases}$$

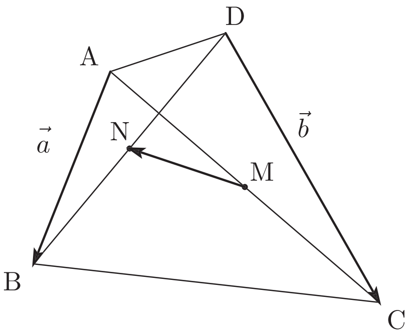
① + ② より，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\ \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

② − ① より，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{4}\end{pmatrix} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【6】A を始点として考える．




$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AN}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

ところで四角形 ABCD について

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots (**)\end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}} = \vec{0}$$

より

$$-\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(**) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right) - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

以上より，$(*)$ とから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \quad (答)\end{aligned}$$

<別解>

BC の中点を L とする．M は AC の中点であるから，△ABC において中点連結定理より

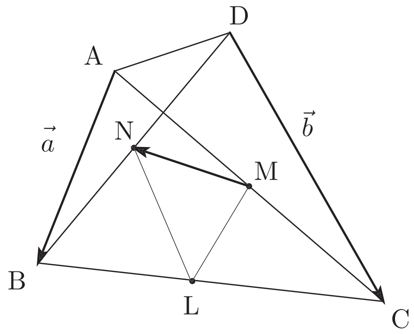
$$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

また N は BD の中点であるから，△DBC において中点連結定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

以上から

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{ML}} + \overrightarrow{\mathrm{LN}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$



【7】■方針

残りの 1 頂点を D とする．頂点の順序が指定されていないので，四角形 ABCD が平行四辺形，四角形 ABDC が平行四辺形，四角形 ADBC が平行四辺形の 3 通りの場合を考える．

■解答

(i) 四角形 ABCD が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

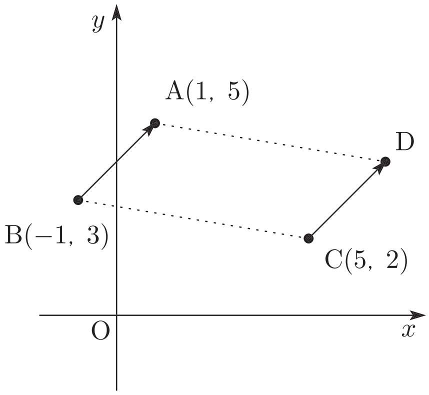
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}x-5=2\\y-2=2\end{cases}$$

よって，$(x,\ y)=(7,\ 4)$




(ii) 四角形 ABDC が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

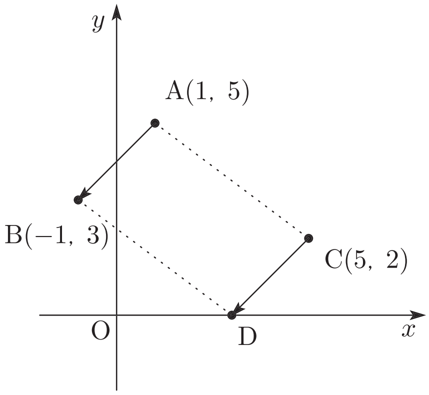
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}x-5=-2\\y-2=-2\end{cases}$$

よって，$(x,\ y)=(3,\ 0)$



(iii) 四角形 ADBC が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

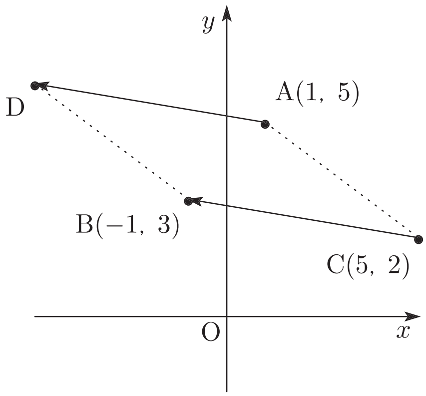
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-1=-6 \\ y-5=1 \end{cases}$$

よって，$(x,\ y)=(-5,\ 6)$




以上より，求める点の座標は

**(7, 4)，(3, 0)，(−5, 6)　(答)**

【8】

「4 角形 ABCD が平行四辺形である」 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(I) 「$\Longrightarrow$」の証明

与えられたベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表す.

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\text{（証明終）}\end{aligned}$$

(II) 「$\Longleftarrow$」の証明

「4 角形 ABCD が平行四辺形である」 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\Longrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

を示す.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\\iff\ &\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad\text{（証明終）}$$

以上より，題意は示された. 〔証明終〕

【9】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ より，

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

であるから，求める単位ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(2) AB の中点を M とすると $\mathrm{M}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{5}$$

また，$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ に対し，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=1\cdot(-2)+2\cdot 1=0$$

より，$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であり，これと点 C の条件より，$\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は同じ向きのベクトルである．

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{a}\right)\\&=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに求める座標は

$$\mathrm{C}\left(\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}}\right) \qquad \text{(答)}$$

## １０章　ベクトル（２）－内積－

### 問題

【1】△ABC は直角三角形であるから，$\mathrm{AC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=1$，また，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{6}$ である．これより，$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BC}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ であり，下図 1〜5 より，

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}\qquad(\text{答})$$

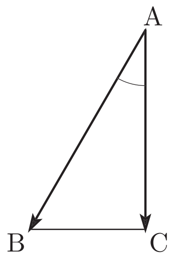
(2) $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos\frac{2}{3}\pi=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}\qquad(\text{答})$$

(3) $$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1}\qquad(\text{答})$$

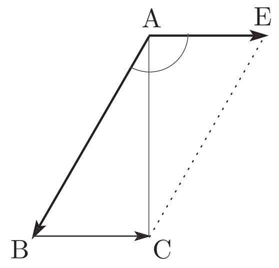
(4) $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\cos\frac{2}{3}\pi&=\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\mathbf{-1}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

(5) $$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\cos\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot0=\mathbf{0}\qquad(\text{答})$$

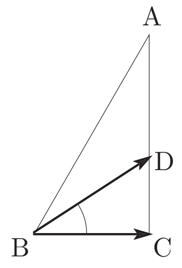
〔図 1〕



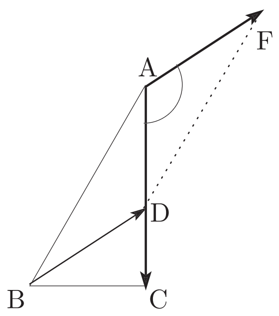

〔図 2〕



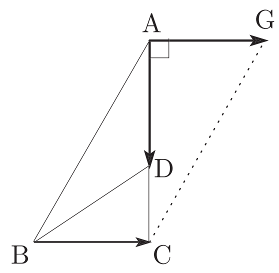

〔図 3〕




〔図 4〕




〔図 5〕



【2】(1)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$$

より，

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

ここで $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を $\alpha\ \ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とすると，

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=-12+12=0$$

であるから，

$$\alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\qquad\text{(答)}$$

同様に

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を $\beta\ \ (0\leqq\beta\leqq\pi)$ とすると，

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=30-4=26$$

また

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|&=\sqrt{10^2+(-2)^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}\\\left|\vec{a}\right|&=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}\\&=\frac{26}{2\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\beta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より，

$$\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 3+2t \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} - t\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 3-2t \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} + t\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - t\vec{b}\right) &= \begin{pmatrix} 2+t \\ 3+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-t \\ 3-2t \end{pmatrix} \\ &= 4 - t^2 + 9 - 4t^2 \\ &= 13 - 5t^2 = 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$t = \pm\sqrt{\frac{13}{5}} = \pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 与えられた条件より

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{6}$$

両辺 2 乗して

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$$
$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$$

整理して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(1+9-6)=\mathbf{2}\qquad(答)$$

(2) (1) の結果より

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\qquad(答)$$

(3) 求める面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot9-2^2}\\&=\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\qquad(答)\end{aligned}$$

(4) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\geqq 0$ より

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right| \text{ が最小} \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2 \text{ が最小}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=9t^2+4t+1\\&=9\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{5}{9}\end{aligned}$$

したがって $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$, すなわち $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ を最小にする $t$ の値は,

$$\boldsymbol{t=-\frac{2}{9}}\qquad(答)$$

【4】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = \mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BAC} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC} &= \sqrt{1 - \cos^2\angle\mathrm{BAC}} \quad (\because \quad \sin\angle\mathrm{BAC} \geqq 0) \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ である.
(2 つのベクトルの内積をとることで容易に証明できる)

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \ \vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \ \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$$

より, $\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である. また

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

であるから, 求める単位ベクトルは

$$\pm \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ より,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} p + 1 = 2 & \cdots ① \\ q + r = -1 & \cdots ② \end{cases} \end{aligned}$$

また $\vec{x} \mathbin{/\!/} \vec{y}$ より,

$\vec{x} = k\vec{y}$ となる 0 でない実数 $k$ が存在する

ゆえに

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} p = k & \cdots ③ \\ q = kr & \cdots ④ \end{cases} \end{aligned}$$

① より $p = 1$, ③ より $k = 1$. ④ に代入して

$$q = r \ \cdots ⑤$$

②, ⑤ より $q = r = -\dfrac{1}{2}$.
以上より,

$$\boldsymbol{p = 1,\ \ q = r = -\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2,\quad \left|\vec{y}\right|=\sqrt{1+r^2}$$

また

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\r\end{pmatrix}=2r$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{y}\right|}=\cos\frac{\pi}{6}\\ \iff\ & 2r=2\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \iff\ & 2r=\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}\end{aligned}$$

両辺正であるから $r>0$. この条件のもとで両辺 2 乗して

$$\begin{aligned}4r^2&=3(1+r^2)\\ r^2&=3\end{aligned}$$

$r>0$ に注意して

$$\boldsymbol{r=\sqrt{3}}\qquad\text{(答)}$$

【6】(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta\\ &=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta}\qquad(\because\quad 0<\theta<\pi\text{より},\ \sin\theta>0)\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\qquad\text{〔証明終〕}\end{aligned}$$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする. 上の結果より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\\ &=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|\qquad\text{〔証明終〕}\end{aligned}$$

【7】与えられた条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \quad \cdots(*)$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\sqrt{2}$$

である．$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2&=\left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\ 4+1+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=2\end{aligned}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{3}{2}$$

よって求める面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot1^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\\ &=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad (答)\end{aligned}$$

【8】 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\quad \cdots(*)$ の両辺と $\vec{a}$ との内積をとると

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}&=\vec{a}\cdot\vec{0}\\ \left|\vec{a}\right|^2-1-1&=0\\ \left|\vec{a}\right|^2&=2\\ \therefore\quad \left|\vec{a}\right|&=\sqrt{2}\ (>0)\end{aligned}$$

また $(*)$ の両辺と $\vec{b}$ との内積をとると

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}&=\vec{b}\cdot\vec{0}\\ -1+\left|\vec{b}\right|^2-1&=0\\ \left|\vec{b}\right|^2&=2\\ \therefore\quad \left|\vec{b}\right|&=\sqrt{2}\ (>0)\end{aligned}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\\ &=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\theta=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}\qquad(答)$$

【9】点 P は，円 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 上を動くから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix}=2+\cos\theta$$

ゆえに求める最大値，最小値は

$$\begin{cases}\textbf{最大値 3}\quad \boldsymbol{(\cos\theta=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{P}\,(3,\ 2))}\\ \textbf{最小値 1}\quad \boldsymbol{(\cos\theta=-1 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{P}\,(1,\ 2))}\end{cases}$$ (答)

【10】点 P は円 $x^2+y^2=r^2$ 上を動くから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおける．ここで $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-r\begin{pmatrix} \cos\theta-1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta-1 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\left\{-r\begin{pmatrix} \cos\theta-1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right\}\cdot\left\{-r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta-1 \end{pmatrix}\right\}\\ &=r^2\ \{(\cos\theta-1)\cos\theta+\sin\theta(\sin\theta-1)\}\\ &=r^2\ (1-\cos\theta-\sin\theta)\end{aligned}$$

ここで

$$f(\theta)=1-\cos\theta-\sin\theta$$

とおくと

$$f(\theta)=1-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

よって

$$\begin{cases} \max f(\theta)=1+\sqrt{2} & \left(\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1 \iff \theta=\dfrac{5}{4}\pi\text{のとき}\right) \\ \min f(\theta)=1-\sqrt{2} & \left(\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \iff \theta=\dfrac{\pi}{4}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

以上より，求める最大値，最小値は

$$\begin{cases} \textbf{最大値} : (\boldsymbol{1+\sqrt{2})r^2} & \left(\boldsymbol{\theta=\dfrac{5}{4}\pi} \iff \mathbf{P}\left(\boldsymbol{-\dfrac{r}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{r}{\sqrt{2}}}\right)\ \textbf{のとき}\right) \\ \textbf{最小値} : (\boldsymbol{1-\sqrt{2})r^2} & \left(\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}} \iff \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{r}{\sqrt{2}},\ \dfrac{r}{\sqrt{2}}}\right)\ \textbf{のとき}\right) \end{cases}$$

(答)

## 添削課題

【1】AB = 2，BC = $\sqrt{3}$，$\angle$BAC = 60° である．

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 30° = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3}$　(答)

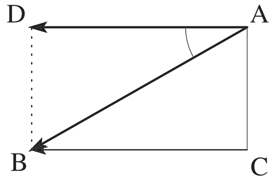
(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos 90° = 1\cdot\sqrt{3}\cdot 0 = \mathbf{0}$　(答)

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 30°$

$= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \mathbf{3}$　(答)

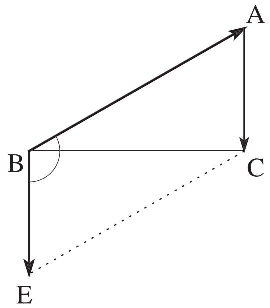



(4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}$

$= \left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BE}\right|\cos 120°$

$= 2\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$= \mathbf{-1}$　(答)




【2】$\triangle$ABC は二等辺三角形より，$\angle$BAC = 90°

したがって，$\angle$BAD = $\angle$DAC = 45° となる．

これより，AD = BD = CD = $\sqrt{2}$

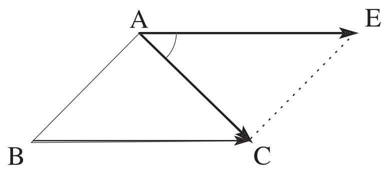
(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 45° = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{4}$　(答)

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$

$= \left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AE}\right|\cos 45°$

$= 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \mathbf{4}$　(答)




(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 45°$

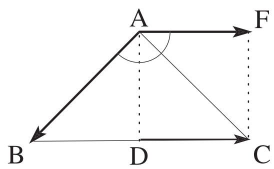
$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{2}$　(答)

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|\cos 135°$

$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \mathbf{-2}$　(答)



【3】(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ より

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{7})^2$$
$$\therefore\quad |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$$
$$\therefore\quad 4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$$
$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{6}\qquad (答)$$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{6}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\qquad (答)$$

(3) $$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4^2-4\cdot6+4\cdot(\sqrt{3})^2=4$$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\geqq0$ より

$$|\vec{a}-2\vec{b}|=\mathbf{2}\qquad (答)$$

【4】 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$ であればよいので

$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})&=|\vec{a}|^2+(2+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t|\vec{b}|^2\\&=1^2+(2+t)\cdot\frac{1}{2}+2t\cdot1^2\\&=\frac{5}{2}t+2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{5}{2}t+2=0\qquad \therefore\quad t=\boldsymbol{-\frac{4}{5}}\qquad (答)$$

【5】(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 = \mathbf{5}$ (答)

また

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$ (答)

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(\sqrt{3}-1) + (-2)\cdot(\sqrt{3}+1) = \mathbf{-4}$ (答)

また

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

よって，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\theta = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$ (答)

M2TK

高 2 難関大数学 K

Z-KAI

| 会員番号 | |
|---|---|

| 氏　名 | |
|---|---|