M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学Ⅰ Ａ Ⅱ Ｂ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

８章－１　数列（１）

問題

【1】(1)　$(x_k-k)^2+(x_k-n+k-1)^2=2{x_k}^2-2(n+1)x_k+k^2+(n-k+1)^2$

$n-k+1$ において，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ とすると $n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

である．

また題意より

$$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2=\sum_{k=1}^{n}k^2,\quad \sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}k$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)}\qquad \text{(答)}$$

(2) (1) から $\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2$ は $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ の並べ方によらないで一定である．

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)-\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2\geqq 0$$

よって $\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2$ は

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2=0$$

すなわち，$x_k=n-k+1$ (ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$) のとき最大となる．

よって，求める並べ方は

$\boldsymbol{n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 1}$　(答)

【2】 $n=1$ のとき

$$a_1=S_1=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=8$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= \frac{4}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{4}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= 4n(n+1) \end{aligned}$$

上式は $n=1$ のときも成立する.

したがって

$$a_n=4n(n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である.

(1)

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{4(n+1)}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$B=\sum_{k=1}^{n}2^k a_k=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot 4k(k+1)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k+\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 2^k\right)$$

ここで

$$C=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k,\quad D=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 2^k$$

とおくと

$$\begin{array}{rl} C & = 1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots\cdots+n\cdot 2^n \\ -)\ 2C & = \qquad\quad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1} \\ \hline -C & = 2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1} \\ & = \dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1} \\ & = (1-n)\cdot 2^{n+1}-2 \\ \therefore\quad C & = (n-1)\cdot 2^{n+1}+2 \end{array}$$

また

$$
\begin{array}{rl}
D & = 1\cdot 2 + 4\cdot 2^2 + 9\cdot 2^3 + 16\cdot 2^4 + \cdots\cdots + n^2\cdot 2^n \\
-)\ 2D & = \qquad\quad 1\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 9\cdot 2^4 + \cdots\cdots + (n-1)^2\cdot 2^n + n^2\cdot 2^{n+1} \\
\hline
-D & = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + 7\cdot 2^4 + \cdots\cdots + (2n-1)\cdot 2^n - n^2\cdot 2^{n+1} \\
 & = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^k - n^2\cdot 2^{n+1} \\
 & = 2\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k - \sum_{k=1}^{n} 2^k - n^2\cdot 2^{n+1} \\
 & = 2C - \dfrac{2(2^n-1)}{2-1} - n^2\cdot 2^{n+1} \\
 & = 2C - (n^2+1)\cdot 2^{n+1} + 2 \\
\therefore\ \ D & = -2C + (n^2+1)\cdot 2^{n+1} - 2
\end{array}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
B &= 4(C+D) \\
&= 4\left\{-C + (n^2+1)\cdot 2^{n+1} - 2\right\} \\
&= \boldsymbol{4\left\{(n^2-n+2)\cdot 2^{n+1} - 4\right\}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【3】$M(a,\ b) = k$ をみたす項を第 k 群としてくくり，(b) にしたがって小さい順に並べると

$$\frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \cdots\cdots,\ \frac{k-1}{k},\ \frac{k}{k},\ \frac{k}{k-1},\ \frac{k}{k-2},\ \cdots\cdots,\ \frac{k}{2},\ \frac{k}{1}$$

となる．よって，第 k 群の末項までの項数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$ 項である．

(1)

(i) $m \leqq n$ のとき

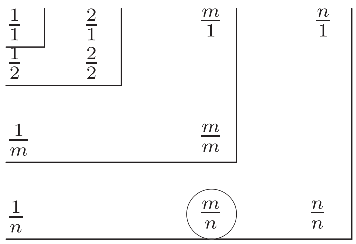
$M(m,\ n) = n$ より，$\dfrac{m}{n}$ は

第 n 群の第 m 項目

であるから，もとの数列の

$(n-1)^2 + m$ (番目)

である．



(ii) $m \geqq n$ のとき

$M(m,\ n) = m$ より，$\dfrac{m}{n}$ は

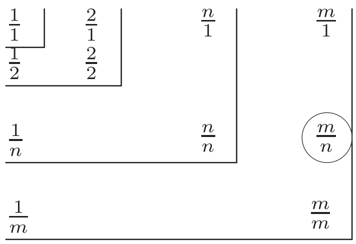
第 m 群の第 $m + (m-n)$ 項目

であるから，もとの数列の

$(m-1)^2 + \{m + (m-n)\}$

$= m^2 - n + 1$ (番目)

である．



よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{m \leqq n} \textbf{ のとき } \boldsymbol{(n-1)^2 + m} \textbf{ (番目)} \\ \boldsymbol{m \geqq n} \textbf{ のとき } \boldsymbol{m^2 - n + 1} \textbf{ (番目)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 1000 番目の項が第 k 群の項であるとすると

$$(k-1)^2 < 1000 \leqq k^2$$

をみたす．これをみたす正の整数 k は，$31^2 = 961$，$32^2 = 1024$ より，$k = 32$ であるから，1000 番目の項は第 32 群の項である．

また，第 32 群の末項は 1024 番目の項であるから，1000 番目の項は第 32 群の末項からさかのぼって数えて 25 番目の項である．

第 32 群は

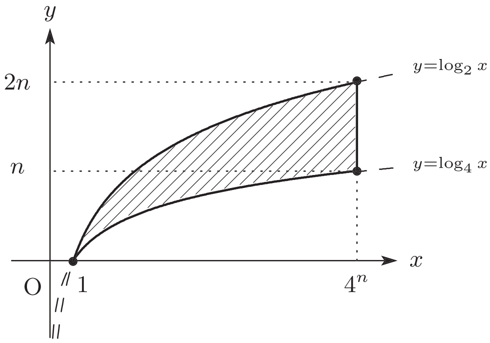
$$\frac{1}{32},\ \frac{2}{32},\ \cdots\cdots,\ \frac{31}{32},\ \frac{32}{32},\ \frac{32}{31},\ \cdots\cdots,\ \frac{32}{2},\ \frac{32}{1}$$

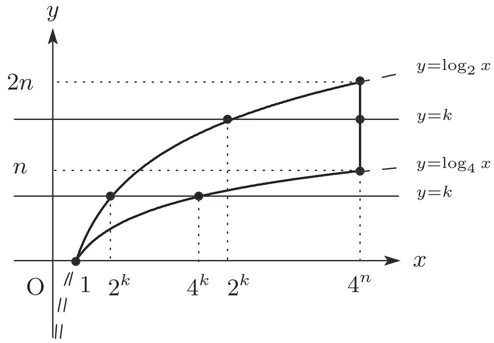
であるから，1000 番目の項は

$$\boldsymbol{\frac{32}{25}} \qquad \text{(答)}$$

である．

【4】条件をみたす領域を図示すると，下図のようになる．





直線 $y = k$ (ただし，k は整数) 上の条件をみたす格子点について考える．

(i) $0 \leqq k \leqq n$ のとき

直線 $y = k$ 上の格子点は

$4^k - 2^k + 1$　(個)

存在する．

(ii) $n + 1 \leqq k \leqq 2n$ のとき

直線 $y = k$ 上の格子点は

$4^n - 2^k + 1$　(個)

存在する．

したがって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(4^k - 2^k + 1) + \sum_{k=n+1}^{2n}(4^n - 2^k + 1)$$

$$= \left\{\frac{1\cdot(4^{n+1}-1)}{4-1} - \frac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1} + (n+1)\right\} + n\cdot(4^n+1) - \frac{2^{n+1}(2^n-1)}{2-1}$$

$$= \boldsymbol{\left(n - \frac{2}{3}\right)\cdot 4^n + 2n + \frac{5}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $$f(x)=k \iff k \leqq \sqrt{x} < k+1 \iff k^2 \leqq x < (k+1)^2$$

なので，これをみたす自然数 x の個数は

$(k+1)^2-k^2=\boldsymbol{2k+1}$ **(個)**　　(答)

である．

(2) $f(1)=1$，$f(n^2)=n$ であるから，(1) より $1 \leqq k \leqq n-1$ の k について $f(x)=k$ をみたす自然数 x は $2k+1$ 個ある．

したがって

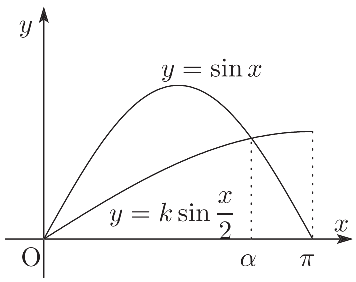
$$\begin{aligned}
& f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n^2) \\
=\ & \left\{f(1)+f(2)+f(2^2-1)\right\} \\
& +\left\{f(2^2)+f(5)+\cdots\cdots+f(3^2-1)\right\} \\
& +\left\{f(3^2)+f(10)+\cdots\cdots+f(4^2-1)\right\} \\
& +\ \cdots\cdots \\
& +\underbrace{\left\{f(k^2)+\cdots\cdots+f((k+1)^2-1)\right\}}_{2k+1\ \text{個}} \\
& +\ \cdots\cdots \\
& +\left\{f((n-1)^2)+\cdots\cdots+f(n^2-1)\right\} \\
& +f(n^2) \\
=\ & \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1)+n \\
=\ & 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2+\sum_{k=1}^{n-1} k+n \\
=\ & \frac{1}{3}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+n \\
=\ & \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

問題

【1】まず, $k \leqq 0$ のときは明らかに不適であるから, $k > 0$ でなければならない. このもとで, 2 曲線 $y = \sin x$ と $y = k\sin\dfrac{x}{2}$ の交点のうち原点でない方の x 座標を α $(0 < \alpha < \pi)$ とおくと

$$\sin\alpha = k\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore \quad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = k\sin\frac{\alpha}{2}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} \fallingdotseq 0$ より



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{2} \quad \cdots ①$$

で, $0 < \alpha < \pi$ より $0 < \cos\dfrac{\alpha}{2} < 1$ だから

$$0 < \frac{k}{2} < 1 \qquad \therefore \quad 0 < k < 2$$

このとき, 面積が 2 等分されるための条件は

$$\int_0^\alpha \left(\sin x - k\sin\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin x dx$$

$$\left[-\cos x + 2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$\therefore \quad -\cos\alpha + 2k\cos\frac{\alpha}{2} + 1 - 2k = 1 \quad \cdots ②$$

ここで, ①より

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{k^2}{2} - 1$$

であるから, ②より α を消去すると

$$1 - \frac{k^2}{2} + 2k\cdot\frac{k}{2} + 1 - 2k = 1 \qquad \therefore \quad k^2 - 4k + 2 = 0$$

これを解いて

$$k = 2 \pm \sqrt{2}$$

そして, $0 < k < 2$ なので, 求める k の値は

$$k = \mathbf{2 - \sqrt{2}} \qquad (答)$$

【2】(1)　$C : y = \sqrt{3}e\log x$

$$y' = \frac{\sqrt{3}e}{x}$$

いま，接点 A$(a,\ \sqrt{3}e\log a)$ での接線の方程式は

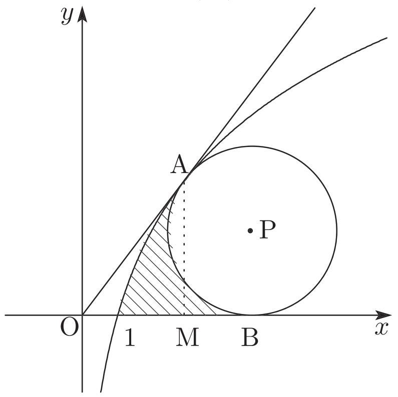
$$y - \sqrt{3}e\log a = \frac{\sqrt{3}e}{a}(x-a)$$

これが原点を通ることから

$\log a = 1$　　　　$\therefore\quad a = e$

よって，A$(e,\ \sqrt{3}e)$ で，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y = \sqrt{3}x}$　　(答)



(2) (1) から $\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ で △ OAB は 1 辺が $2e$ の正三角形である．OB の中点を M とし，線分 AM，曲線 C，x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_1^e \sqrt{3}e\log x\,dx$$
$$= \sqrt{3}e\Big[x\log x - x\Big]_1^e$$
$$= \sqrt{3}e$$

$\angle\mathrm{POB} = 30^\circ$ だから，円 P の半径

$$\mathrm{PB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{OB} = \frac{2e}{\sqrt{3}}$$

いま，台形 AMBP の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{MA}+\mathrm{BP})\cdot\mathrm{MB}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}e + \frac{2e}{\sqrt{3}}\right)e$$
$$= \frac{5\sqrt{3}}{6}e^2$$

おうぎ形 PAB の面積を S_3 とすると，$\angle\mathrm{APB} = 120^\circ$ で

$$S_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2e}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4\pi e^2}{9}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S = S_1 + S_2 - S_3$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3}e + \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4\pi}{9}\right)e^2} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $y^2 - 2xy + x^3 = 0$ を y について解いて

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - x^3} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = x(1 \pm \sqrt{1-x})} \qquad \text{(答)}$$

(2)

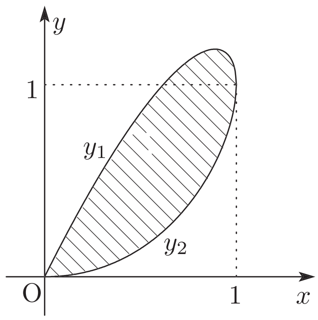
$$y_1 = x(1 + \sqrt{1-x}), \quad y_2 = x(1 - \sqrt{1-x})$$

とおくと, y_1, y_2 はいずれも $x \leqq 1$ の範囲で定義できて, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において

$$x(1 + \sqrt{1-x}) \geqq x(1 - \sqrt{1-x})$$

であるから, 求める面積を S とおくと

$$S = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx$$
$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x}dx$$



ここで, $1 - x = t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

より

$$S = 2\int_1^0 (1-t)\sqrt{t}(-dt)$$
$$= 2\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$
$$= 2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{8}{15}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $n = 1$ のとき, $y = 1 - x^{\frac{1}{m}}$ であり

$$A\ (m,\ 1) = \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{m}}\right)dx$$
$$= \left[x - \frac{m}{m+1}x^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{m+1}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n+1}} = 1$ のとき, $y = \left(1 - x^{\frac{1}{m}}\right)^{n+1}$ だから

$$A\ (m,\ n+1) = \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{m}}\right)^{n+1} dx$$

ここで $x^{\frac{1}{m}} = s$ とおくと

$$x = s^m \qquad \therefore \quad \frac{dx}{ds} = ms^{m-1}$$

だから

$$\int_0^1 \left(1-x^{\frac{1}{m}}\right)^{n+1} dx = \int_0^1 (1-s)^{n+1}\cdot ms^{m-1}ds$$

$$= \Big[(1-s)^{n+1}\cdot s^m\Big]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-s)^n\cdot s^m ds$$

$$= (n+1)\int_0^1 (1-s)^n\cdot s^m ds$$

また

$$A\ (m+1,\ n) = \int_0^1 (1-s)^n\cdot (m+1)s^m ds = (m+1)\int_0^1 (1-s)^n s^m ds$$

よって

$$\boldsymbol{A\ (m,\ n+1) = \frac{n+1}{m+1}A\ (m+1,\ n)} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の結果を繰り返し用いることにより

$$A\ (m,\ n) = \frac{n}{m+1}A\ (m+1,\ n-1)$$

$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}A\ (m+2,\ n-2)$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot 2}{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n-1)}A\ (m+n-1,\ 1)$$

$$= \frac{m!\cdot n!}{(m+n-1)!}\cdot\frac{1}{m+n} \quad (\because\ \ (1))$$

$$= \boldsymbol{\frac{m!\cdot n!}{(m+n)!}} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】

$$S=\int_0^a y\,dx+\int_a^\pi (2-y)\,dx$$

と表される．ここで

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta \geqq 0 \qquad (\text{等号は } \theta=0 \text{ のときのみ成立})$$

であるから，$t-\sin t=a$ $(0\leqq t\leqq \pi)$ をみたす t がただ1つ存在し，x と θ の対応関係は下表のようになる．

x	0	$\to$	a	$\to$	π
θ	0	$\to$	t	$\to$	π

ゆえに

$$S=\int_0^t (1-\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta+\int_t^\pi (1+\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^t (1-\cos\theta)^2 d\theta+\int_t^\pi (1-\cos^2\theta)d\theta$$

そこで，$S=S(t)$ とおくと

$$S'(t)=(1-\cos t)^2-(1-\cos^2 t)=-2\cos t(1-\cos t)$$

よって，$S(t)$ の増減は下表のようになる．

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

ゆえに，$S(t)$ は $t=\frac{\pi}{2}$ のとき極小かつ最小となるので，求める a の値は

$$a=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1} \qquad (\text{答})$$

そして，S の最小値は

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)^2 d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\theta$$

となるが，ここで $u=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ のグラフは直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$ に関して対称なので

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\theta$$

よって

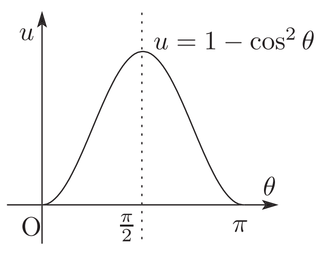
$$S\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(1-\cos\theta)^2+(1-\cos^2\theta)\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=2\Big[\theta-\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\boldsymbol{\pi-2} \qquad (\text{答})$$



９章－１　数列（２）

問題

【1】 $\boxed{1}$

(1) $a_n > 0$ なので両辺逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n+2}{3a_n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n} - 1\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{a_1} - 1 = 0$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n} - 1 = 0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_n} = 1$$

$$\therefore\quad a_n = \mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 両辺を 3^{n+1} (>0) で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = 3\cdot\frac{a_n}{3^n} + 1$$

$$\therefore\quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{1}{2} = 3\left(\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\quad \frac{a_n}{3^n} = \frac{5}{2}\cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad a_n = \boldsymbol{\frac{5}{2}\cdot 3^{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot 3^n} \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

$$x_{n+1} - \alpha y_{n+1} = \beta\,(x_n - \alpha y_n)$$

となる α，β を求める．

$$(6x_n + 3y_n) - \alpha\,(3x_n - 2y_n) = \beta(x_n - \alpha y_n)$$

$$\therefore\quad (3\alpha + \beta - 6)x_n - (\alpha\beta + 2\alpha + 3)y_n = 0$$

これが，すべての正の整数 n について成り立つためには

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta - 6 = 0 \\ \alpha\beta + 2\alpha + 3 = 0 \end{cases} \qquad \therefore\quad (\alpha,\ \beta) = (3,\ -3),\ \left(-\frac{1}{3},\ 7\right)$$

これより

$$\begin{cases} x_{n+1} - 3y_{n+1} = -3(x_n - 3y_n) & \cdots\cdots ① \\ x_{n+1} + \dfrac{1}{3}y_{n+1} = 7\left(x_n + \dfrac{1}{3}y_n\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より，数列 $\{x_n - 3y_n\}$ は，初項 $x_1 - 3y_1 = -3$，公比 -3 の等比数列であるから

$$x_n - 3y_n = (-3)\cdot(-3)^{n-1} = (-3)^n \quad \cdots\cdots ①'$$

② より，数列 $\left\{x_n + \dfrac{1}{3}y_n\right\}$ は，初項 $x_1 + \dfrac{1}{3}y_1 = 7$，公比 7 の等比数列であるから

$$x_n + \frac{1}{3}y_n = 7\cdot 7^{n-1} = 7^n \quad \cdots\cdots ②'$$

①$'$, ②$'$ より

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{\{9 \cdot 7^n + (-3)^n\}} \\ y_n = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{\{7^n - (-3)^n\}} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

＜参考＞

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の隣接 3 項間の漸化式をつくると，それぞれ

$x_1 = 6,\ x_2 = 45,\ x_{n+2} = 4x_{n+1} + 21x_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$y_1 = 3,\ y_2 = 12,\ y_{n+2} = 4y_{n+1} + 21y_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

となる.

【2】(1) 与式は任意の自然数 n に対して成り立つので，n を $n+1$ としても成り立つ.

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \quad \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$$

定義式の両辺に $1+\sqrt{2}$ をかければ

$$\begin{aligned} \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} &= \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore\quad a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$

ここで, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} は有理数, $\sqrt{2}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} a_{n+1} = \boldsymbol{a_n + 2b_n} \\ b_{n+1} = \boldsymbol{a_n + b_n} \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad \text{(答)}$$

(2) (i) $n = 1$ のときは, $a_1 = b_1 = 1$ より

$$a_1 - b_1\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$$

となり成立.

(ii) $n = k\ (\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定する．すなわち

$$a_k - b_k\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^k$$

が成り立っているとする．両辺に $1-\sqrt{2}$ をかければ

$$\begin{aligned} \left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(a_k - b_k\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) \\ &= (a_k + 2b_k) - (a_k + b_k)\sqrt{2} \\ &= a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2} \qquad (\because\ (1)) \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のときも成り立つ.

以上より, 数学的帰納法により，任意の正整数 n に対して，$a_n - b_n\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ が成り立つ.　〔証明終〕

(3) $\left|1-\sqrt{2}\right| < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\sqrt{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)^n = 0$$

ここで，$a_1 = b_1 = 1$, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ より，$b_n > 0$ である.

また，$b_{n+1} > b_n$ であるから，$\lim_{n\to\infty} b_n \fallingdotseq 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}-\sqrt{2}\right)=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

【3】n^2 と 4^{n-2} の値を順次書き出すと

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots\cdots$
n^2	1	4	9	16	25	36	$\cdots\cdots$
4^{n-2}	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64	256	$\cdots\cdots$

となり

$$\begin{cases} 1 \leqq n \leqq 3 \text{ のとき} & n^2 > 4^{n-2} \\ n=4 \text{ のとき} & n^2 = 4^{n-2} \end{cases}$$

であることが確かめられて

$n \geqq 5$ のとき　$n^2 < 4^{n-2}$　$\cdots\cdots(*)$

であると推測される.

$(*)$ を数学的帰納法により証明する.

(i) $n=5$ のとき

上の表より，$n^2 < 4^{n-2}$ は成立.

(ii) $n=k$ (ただし，$k \geqq 5$) のとき

$k^2 < 4^{k-2}$　$\cdots\cdots(\star)$

が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} 4^{(k+1)-2}-(k+1)^2 &= 4\cdot 4^{k-2}-(k^2+2k+1) \\ &> 4k^2-(k^2+2k+1) \qquad (\because\ (\star)) \\ &= 3k^2-2k-1 \\ &= 3\left(k-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3} \\ &> 0 \qquad (\because\ k \geqq 5) \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成立する.

(i), (ii) より，$(*)$ が成立する.

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{1 \leqq n \leqq 3} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{n^2 > 4^{n-2}} \\ \boldsymbol{n=4} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{n^2 = 4^{n-2}} \\ \boldsymbol{n \geqq 5} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{n^2 < 4^{n-2}} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【4】(a) より

$a_1 = 1$

(b) において

$n=1$ とすると

$a_1a_2 = 2a_1a_1 \iff a_2 = 2$

$n=2$ とすると

$$a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1) \iff 2+2a_3=8 \iff a_3=3$$

$n=3$ とすると

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=2(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1) \iff 8+3a_4=20 \iff a_4=4$$

以上より

$$a_n=n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots(*)$$

と推測できる．$(*)$ を数学的帰納法により証明する．

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$$a_1=1, \quad a_2=2$$

であり，成り立つ．

(ii) $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ (ただし，m は 2 以上の自然数) において

$$a_1=1,\ a_2=2,\ \cdots\cdots,\ a_m=m$$

であると仮定する．

このとき，(b) において $n=m$ とすると

$$\begin{aligned}
&a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_ma_{m+1}=2(a_1a_m+a_2a_{m-1}+\cdots\cdots+a_ma_1)\\
\iff\ &1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots\cdots+(m-1)\cdot m+m\cdot a_{m+1}\\
&\qquad=2\{1\cdot m+2\cdot(m-1)+\cdots\cdots+m\cdot 1\}\\
\iff\ &\sum_{k=1}^{m-1}k(k+1)+m\cdot a_{m+1}=2\sum_{k=1}^{m}k(m-k+1)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
m\cdot a_{m+1}&=2\sum_{k=1}^{m}k(m+1-k)-\sum_{k=1}^{m-1}k(k+1)\\
&=2\sum_{k=1}^{m}k(m+1-k)-\left\{\sum_{k=1}^{m}k(k+1)-m(m+1)\right\}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\{(2m+1)k-3k^2\}+m(m+1)\\
&=(2m+1)\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-3\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+m(m+1)\\
&=m(m+1)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{m+1}=m+1$$

となり，$n=m+1$ についても成立する．

したがって，数学的帰納法により，$(*)$ が証明された．

よって

$$a_n=\boldsymbol{n} \qquad \text{(答)}$$

である．

９章－２　積分（体積）

問題

【1】$x^2+(y-l)^2=r^2$ を y について解くと

$y=l\pm\sqrt{r^2-x^2}$

求める回転体の体積 V は

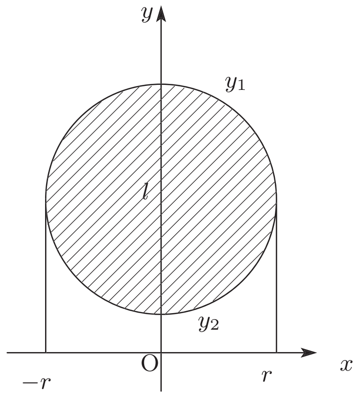
$y_1=l+\sqrt{r^2-x^2}$

を回転してできる立体の体積から

$y_2=l-\sqrt{r^2-x^2}$

を回転してできる立体の体積を引けばよい.

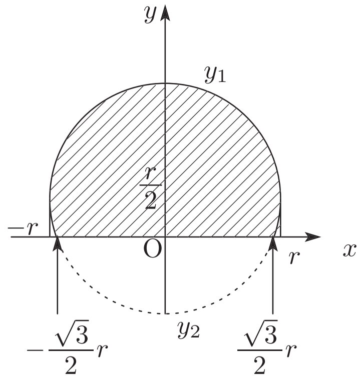
よって



(1)

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y_1^2dx-\pi\int_{-r}^{r}y_2^2dx$$
$$=\pi\int_{-r}^{r}(y_1^2-y_2^2)dx$$
$$=\pi\int_{-r}^{r}4l\sqrt{r^2-x^2}dx=4\pi l\cdot\frac{\pi r^2}{2}=\boldsymbol{2\pi^2r^2l}\qquad(答)$$

(2) $l=\dfrac{r}{2}$ のとき，y_2 は $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ で x 軸と交わり，右図のようになるから



$$V=2\left(\pi\int_0^r y_1^2dx-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r}y_2^2dx\right)$$
$$=2\pi\left\{\int_0^r(y_1^2-y_2^2)dx+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}y_2^2dx\right\}$$

$$\int_0^r(y_1^2-y_2^2)dx=4l\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$$
$$=4l\cdot\frac{\pi}{4}r^2=\pi r^2l=\frac{1}{2}\pi r^3$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}y_2^2dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\left(\frac{r}{2}-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\left(\frac{5}{4}r^2-x^2-r\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$$

ここで，$x=r\sin\theta$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\sqrt{r^2-x^2}dx=r^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta d\theta$ となるから

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}y_2^2dx=\left[\frac{5}{4}r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}r}-r^3\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{8}r^3-\frac{\sqrt{3}}{8}r^3-r^3\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}r^3-\frac{\pi}{6}r^3$$

$$\therefore\quad V=2\pi\left(\frac{\pi}{2}r^3+\frac{3\sqrt{3}}{8}r^3-\frac{\pi}{6}r^3\right)=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\pi r^3}\qquad(答)$$

【2】放物線上の点 P の y 座標を p とおくと

P$(0,\ p,\ 1-p^2)$ と A $(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ直線の方程式は

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-p}=\frac{z-1}{p^2}\quad (p \fallingdotseq 0)$$

直線 AP と，x 軸に垂直な平面　$x=t(0 \leqq t \leqq 1)$ との

交点 Q の座標は

$$x=t,\ y=p(1-t),\ z=1+p^2(t-1)$$

Q と x 軸との距離の平方は

$$y^2+z^2=p^2(1-t)^2+(p^2t+1-p^2)^2$$

よって，線分 AP$(0 \leqq x \leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V=\pi\int_0^1\{p^2(t-1)^2+(p^2t+1-p^2)^2\}dt$$

$$=\pi\left[\frac{p^2}{3}(t-1)^3+\frac{1}{3p^2}(p^2t+1-p^2)^3\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(p^4-2p^2+3)}\qquad \text{(答)}$$

これは，$p=0$ のときも成り立つ。

$\therefore\quad V=\frac{\pi}{3}\{(p^2-1)^2+2\} \geqq \frac{2}{3}\pi$

ゆえに，点 P が $(0,\ \pm 1,\ 0)$ のときの V の最小値は

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}\qquad \text{(答)}$$

【3】 $y=s$ における図形の切り口を考えると

$$0 \leqq z \leqq 1+s+3s^2+x(1-3s)$$
$$s \leqq x \leqq s+1$$

となるから

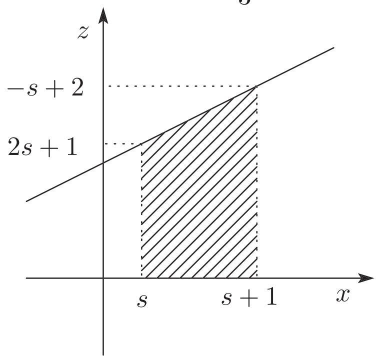
(i) $0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，切り口の面積は

$$\frac{1}{2}\{(2s+1-s+2)\times 1\}=\frac{s+3}{2}$$

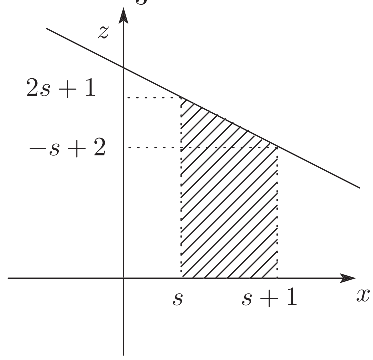
(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq s \leqq 1$ のとき，切り口の面積は

$$\frac{s+3}{2}$$

(i) $0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき



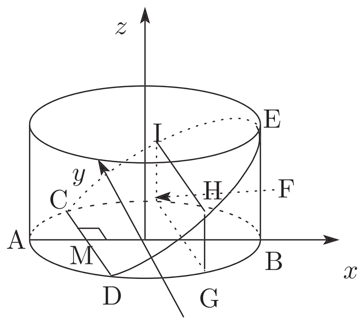
(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq s \leqq 1$ のとき



以上より

$$V=\frac{1}{2}\int_0^1 (s+3)ds$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{2}+3s\right]_0^1$$
$$=\boldsymbol{\frac{7}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【4】右図のように座標軸をとる．立体を x 軸に垂直な平面 $x=t$ で切った切り口 FGHI は長方形である．



下図より

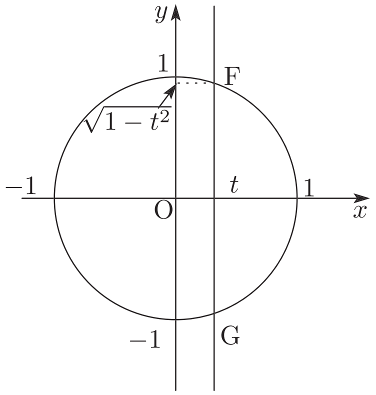
$$\mathrm{FG}=2\sqrt{1-t^2}$$

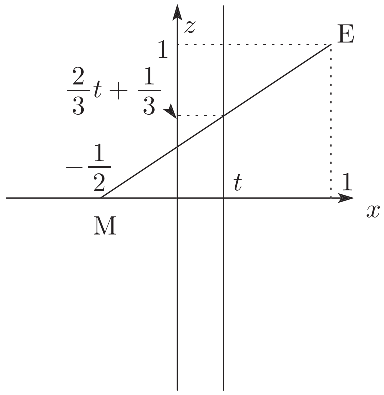
$$\mathrm{HG}=\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}$$

よって，長方形 FGHI の面積 S は

$$S=2\sqrt{1-t^2}\left(\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-t^2}$$





よって

$$V=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}S\,dt$$

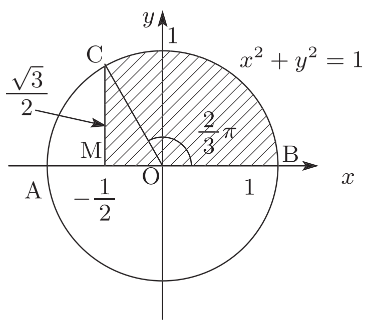
$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{9}\pi}\qquad\text{(答)}$$

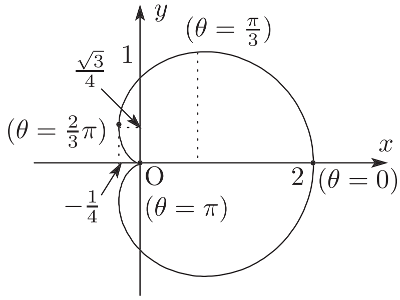


【5】θ の符号を変えると, x は同じ, y は符号だけ反対になる．すなわちこの曲線は, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分と，それを x 軸に関して対称に移したものからなる.

$$\frac{dx}{d\theta} = -(1+2\cos\theta)\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$= (1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)$$

θ が 0 から π まで変わるときの x, y の増減表は下のようになる．これと対称性から, 曲線の概形は右下のようになる.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0



求める体積を V とする.

$$V = \int_{-\frac{1}{4}}^{2} \pi y^2 dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \pi y^2 dx$$
$$= \pi\left(\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta\right)$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} \{(1+\cos\theta)\sin\theta\}^2\{-(2\cos\theta+1)\sin\theta\} d\theta$$
$$= -\pi \int_0^{\pi} (\cos\theta+1)^2(2\cos\theta+1)(1-\cos^2\theta)(\cos\theta)' d\theta$$

$$\therefore \quad V = -\pi \int_1^{-1} (t+1)^2(2t+1)(1-t^2) dt \quad (\cos\theta = t \quad \text{より})$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (t+1)^2(2t+1)(1-t^2) dt$$
$$= 2\pi \int_0^1 (-5t^4+4t^2+1) dt = \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ とすると，$5\theta=\pi$ より

$$\begin{aligned}\sin 3\theta=\sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta \quad&\iff\quad 3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta\\&\iff\quad 3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta\\&\qquad\qquad\qquad (\because\quad \sin\theta\fallingdotseq 0)\\&\iff\quad 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\qquad(\because\quad \cos\theta>0)$$

よって

$$a=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$b=\sin^2 2\theta=4\sin^2\theta\cos^2\theta=4\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

であるから

$$a+b=\frac{5}{4},\quad ab=\frac{5}{16}$$

よって，$a+b$, ab はともに有理数である．　　　〔証明終〕

(2) (1) より，$a+b=4ab$ であるから

$$(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n=\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}(a+b)^n=4^n(a^n+b^n)$$

ここで，$f(n)=4^n(a^n+b^n)$ とおく．任意の自然数 n に対して，これが整数になることを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$$f(1)=4^1(a^1+b^1)=5,\quad f(2)=4^2(a^2+b^2)=4^2\left\{(a+b)^2-2ab\right\}=15$$

より成立．

(ii) $f(n)$, $f(n+1)$ が整数であると仮定すると

$$\begin{aligned}f(n+2)=4^{n+2}(a^{n+2}+b^{n+2})&=4^{n+2}\{(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)\}\\&=5f(n+1)-5f(n)\end{aligned}$$

であるから，$f(n+2)$ も整数である．

(i), (ii) より，数学的帰納法により

任意の自然数 n に対して，$f(n)$ は整数である．　　　〔証明終〕

１０章－１　確率（１）

問題

【1】(1) 2 人を A，B とする．各カードについて A に与えるか B に与えるかの 2 通りの場合があるから，2^n 通りの分け方がある．この中からすべてのカードが 1 人に分けられる場合を除いて

$\boldsymbol{2^n-2}$ **(通り)**　　(答)

(2) (1) と同様に考えて，全部で 3^n 通りの分け方がある．このうち，3 人のうち 2 人に分ける分け方が $(2^n-2)\times 3$ 通り，誰か 1 人にのみすべてのカードが渡る場合が 3 通りある．そこで，これらを除いて

$3^n-3(2^n-2)-3=\boldsymbol{3^n-3\cdot 2^n+3}$ **(通り)**　　(答)

【2】(1) 11 個の玉のうち，6 個，5 個がそれぞれ同じものであるから，これら 11 個の玉を 1 列に並べる並べ方の総数は

$\dfrac{11!}{6!5!}=\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\boldsymbol{462}$ **(通り)**　　(答)

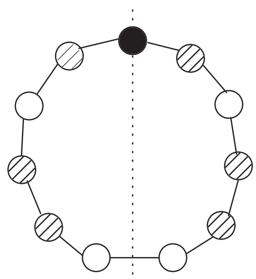
また，このうち左右対称であるものは，中央が白玉であり，左右にはそれぞれ 3 個の赤玉と 2 個の白玉がある．このとき左右どちらか一方の並び方が決まれば，他方の並び方も決まる．

よって，左右対称であるものの総数は

$\dfrac{5!}{3!2!}=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=\boldsymbol{10}$ **(通り)**　　(答)

(2) 1 個しかない黒玉を固定して考える．このとき 4 個の白玉と 6 個の赤玉を並べる並べ方の総数は，(1) と同様に考えて

$\dfrac{10!}{6!4!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ (通り)



また，このうち，右図のように裏返したときに自分自身に一致するものの個数は，(1) と同様に考えて

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ (通り)

これが「対称な」ネックレスの個数である．

一方，「対称でない」ネックレスの個数は

$\dfrac{210-10}{2}=100$ (個)

以上より，求めるネックレスの総数は

$10+100=\boldsymbol{110}$ **(個)**　　(答)

【3】(1) $6n$ 個の頂点から 1 つを選ぶと正三角形の残りの 2 頂点は決定する．

正三角形は 3 回重複して数えられるから

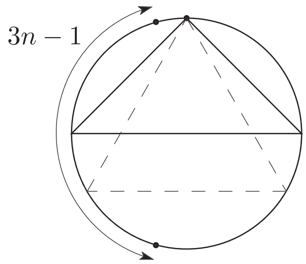
$\dfrac{{}_{6n}\mathrm{C}_1}{3}=\boldsymbol{2n}$ **(個)**　　(答)

(2) 正 $6n$ 角形の外接円の直径を 1 辺とする三角形である．

直径となる辺の選び方は $3n$ 通り，残りの 1 点の選び方は $6n-2$ 通りあるから

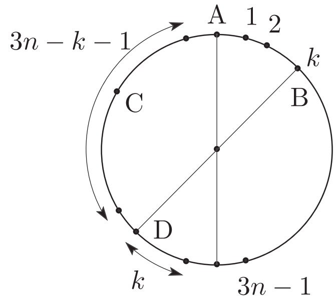
$3n\cdot(6n-2)=\boldsymbol{6n(3n-1)}$ **(個)**　　(答)

(3) 1 点を固定し，二等辺三角形の頂角とすると，底角となる 2 点の選び方は $3n-1$ 通りあり，このうちの 1 通りは正三角形となる．正三角形でない二等辺三角形は頂点の選び方が $6n$ 通りあるから，$(3n-2)\cdot 6n$ 個ある．これと正三角形の個数を足し合わせて



$(3n-2)\cdot 6n+2n=\boldsymbol{2n(9n-5)}$ **(個)**　　(答)

(4) 1 点 A を固定し，この頂点が鈍角となるときを考える．



残りの 2 点は A を通る直径に対して逆側にある．それぞれ B，C とすると，B が A から時計回りに数えて k 番目 (ただし，$1\leqq k\leqq 3n-1$) の点のとき，C は B を通る直径との交点 (これを D とする) よりも A に近い点にあり，C の存在し得るのは A と D との間の点のいずれかであり，その数は $3n-k-1$ 通りある．これが B の存在し得る $1\leqq k\leqq 3n-1$ のそれぞれにおいて考えられるので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3n-1}(3n-k-1)&=(3n-1)\sum_{k=1}^{3n-1}1-\sum_{k=1}^{3n-1}k\\&=(3n-1)\cdot(3n-1)-\frac{1}{2}(3n-1)\cdot 3n\\&=\frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)\ (\text{個})\end{aligned}$$

ある．A の存在し得る頂点の数は $6n$ 通りあるので

$6n\cdot\dfrac{1}{2}(3n-1)(3n-2)=\boldsymbol{3n(3n-1)(3n-2)}$ **(個)**　　(答)

【4】(1) $b_i=a_i+i-1$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ とすると

$1\leqq b_1<b_2<b_3<b_4<b_5\leqq 8$

となる．ここで題意をみたす $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の個数と $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ の個数は一致する．

よって，求める個数は

${}_8\mathrm{C}_5=\mathbf{56}$

(2) $c_i=\displaystyle\sum_{k=1}^{i}a_k$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ とすると

$c_1\geqq 1,\ c_5\leqq 4,\ c_i\leqq c_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

となるから，これは (1) と同じ条件になる．

よって，求める個数は

56

(3) $n\geqq 2$ のとき，n 桁の自然数の各桁の数字を最高位から $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ とする．こ

のとき

(a) $a_1 \geqq 1$

(b) $a_i \geqq 0$ $(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

(c) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq r$

をみたす整数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ の個数を求めればよい.

よって $d_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とすると

$d_1 \geqq 1,\ d_n \leqq r,\ d_i \leqq d_{i+1}$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

となるから, (1) と同様に考え, 求める個数は

$${}_{n+r-1}\mathrm{C}_n = \boldsymbol{\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}}$$

これは $n = 1$ のときもみたす.

【5】 $\boxed{1}$

${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である.

(1)
$$\begin{aligned} {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!\{(n-r)+r\}}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= {}_n\mathrm{C}_r \quad \text{〔証明終〕} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} r\cdot{}_n\mathrm{C}_r &= r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\ &= n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!} \\ &= n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad \text{〔証明終〕} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1)

$$P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{3k}={}_{n+1}\mathrm{C}_0+\sum_{k=1}^{n+1}({}_n\mathrm{C}_{3k}+{}_n\mathrm{C}_{3k-1})$$

ここで

$${}_{n+1}\mathrm{C}_0+\sum_{k=1}^{n+1}{}_n\mathrm{C}_{3k}={}_{n+1}\mathrm{C}_0+P_n-{}_n\mathrm{C}_0=P_n$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}{}_n\mathrm{C}_{3k-1}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+2}=R_n$$

であるから

$$\boldsymbol{P_{n+1}=P_n+R_n}$$

同様にして

$$\boldsymbol{Q_{n+1}=Q_n+P_n},\quad \boldsymbol{R_{n+1}=R_n+Q_n}$$

(2) (1) より

$$P_{n+1}+Q_{n+1}+R_{n+1}=2(P_n+Q_n+R_n)$$

$$\therefore\quad P_n+Q_n+R_n=(P_1+Q_1+R_1)\cdot 2^{n-1}$$

条件より

$$P_1=\sum_{k=0}^{1}{}_1\mathrm{C}_{3k}={}_1\mathrm{C}_0+{}_1\mathrm{C}_3=1$$

$$Q_1=\sum_{k=0}^{1}{}_1\mathrm{C}_{3k+1}={}_1\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_4=1$$

$$R_1=\sum_{k=0}^{1}{}_1\mathrm{C}_{3k+2}={}_1\mathrm{C}_2+{}_1\mathrm{C}_5=0$$

であるから

$$P_n+Q_n+R_n=2^n$$

これと，(1) より

$$P_{n+2}=P_{n+1}+R_{n+1}=P_{n+1}+R_n+Q_n=P_{n+1}+2^n-P_n \qquad \cdots ①$$

ここで

$$(P_{n+2}-\alpha\cdot 2^{n+2})=(P_{n+1}-\alpha\cdot 2^{n+1})-(P_n-\alpha\cdot 2^n)$$

とおくと

$$P_{n+2}=P_{n+1}+3\alpha\cdot 2^n-P_n$$

であるから，①より

$$\alpha=\frac{1}{3}$$

となるので

$$\left(P_{n+2}-\frac{2^{n+2}}{3}\right)-\left(P_{n+1}-\frac{2^{n+1}}{3}\right)+\left(P_n-\frac{2^n}{3}\right)=0$$

$P_n-\dfrac{2^n}{3}=x_n$ とすると

$$x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$$

$t^2-t+1=0 \iff t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ より

$$x_{n+2}-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x_{n+1}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(x_{n+1}-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x_n\right)$$

$$x_{n+2}-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(x_{n+1}-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x_n\right)$$

ここで

$$x_1 = P_1 - \frac{2^1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = P_2 - \frac{2^2}{3} = P_1 + R_1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

より

$$x_{n+1} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}x_n = \left(x_2 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}x_1\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

$$x_{n+1} - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}x_n = \left(x_2 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}x_1\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

辺々引いて

$$-\sqrt{3}\,i\,x_n = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

したがって

$$x_n = -\frac{i}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} + \frac{i}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n}$$

よって

$$\boldsymbol{P_n = \frac{1}{3}\left\{2^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n}\right\}}$$

(1) より

$$R_n = P_{n+1} - P_n$$
$$= \frac{1}{3}\left\{2^{n+1} - 2^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} - 1\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} - 1\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n}\right\}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{3}\left\{2^n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n} - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n}\right\}}$$

また

$$Q_n = 2^n - P_n - R_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{2^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

(3) $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{12} = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{6} = 1,\ 2^{12} = 4096$ より

$$P_{12} = \frac{1}{3}(2^{12} + 1 + 1) = \mathbf{1366}$$

$$Q_{12} = \frac{1}{3}\left(2^{12} - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \mathbf{1365}$$

$$R_{12} = 2^{12} - P_{12} - Q_{12} = 4096 - 1366 - 1365 = \mathbf{1365}$$

問題

【1】(1) $\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

よって，与式は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと

x： $0\to 1$　のとき　θ： $0\to\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

だから ① は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$　　(答)

(2)

$$\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

よって与式は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^2\frac{dx}{1+x}$$

$$=\Big[\log|1+x|\Big]_0^2$$

$=\mathbf{log\,3}$　　(答)

【2】(1) $f(x)=x\log x-(1+\log k)(x-k)-k\log k\ (x \geqq 1)$

とおくと

$f'(x)=\log x+1-(1+\log k)=\log x-\log k$

x	1		k	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

上の増減表から $x=k$ のとき極小かつ最小で，最小値は

$f(k)=0$

よって，$x \geqq 1$ のとき

$f(x) \geqq 0$

$\therefore\ x\log x \geqq (1+\log k)(x-k)+k\log k$ (等号は $x=k$ のとき)　（証明終）

(2) (1) から，$k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して

$$k-\frac{1}{2} \leqq x \leqq k+\frac{1}{2}$$

のとき

$$x\log x \geqq (1+\log k)(x-k)+k\log k$$

$$\therefore\ \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x\log x dx > \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \{(1+\log k)(x-k)+k\log k\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+\log k)(x-k)^2+kx\log k\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}=k\log k$$

$$\therefore\ \sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} x\log x dx > \sum_{k=2}^{n} k\log k=a_n$$

$$\therefore\ a_n < \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x\log x dx$$

さらに，$x>1$ のとき，$x\log x>0$ から

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x\log x dx < \int_{1}^{n+\frac{1}{2}} x\log x dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^{n+\frac{1}{2}}-\int_1^{n+\frac{1}{2}}\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left\{\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{4}$$

$$<\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left\{\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}+1$$　（証明終）

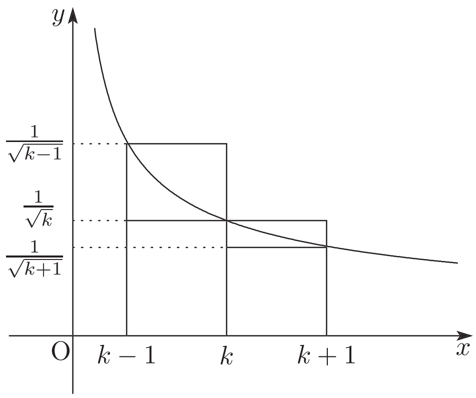
【3】右図より，$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ において

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{\sqrt{x}}\quad \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において

$$\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}\quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．



① において，$k=2$〜10000 まで足しあわせ，さらに 1 を加えると

$$S<1+\int_{1}^{10000}\frac{dx}{\sqrt{x}}=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{10000}=199$$

であり，② において $k=1$〜9999 まで足しあわせ，さらに $\frac{1}{100}$ を加えると

$$S>\int_{1}^{10000}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{100}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{10000}+\frac{1}{100}=198.01$$

以上より

$198.01<S<199$

だから，求める値は

198　　(答)

【4】右図より

$$\mathrm{AP}_1 = 2 \times \frac{\ell}{2} \sin \frac{\pi}{2n}$$

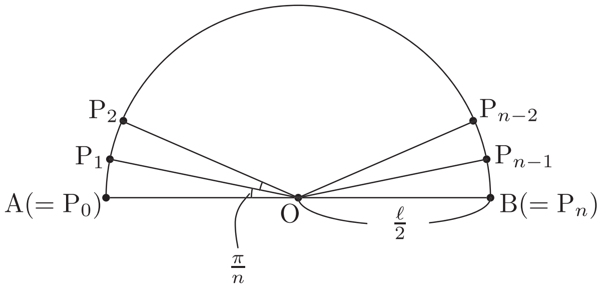
$$\mathrm{AP}_2 = 2 \times \frac{\ell}{2} \sin \frac{2\pi}{2n}$$

.

.

$$\mathrm{AP}_k = 2 \times \frac{\ell}{2} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

となる.

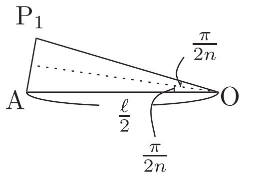


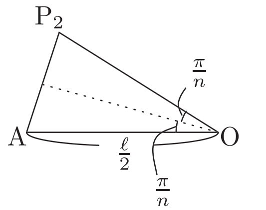
これより

$$\frac{\mathrm{AP}_1 + \mathrm{AP}_2 + \cdots\cdots + \mathrm{AP}_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \times \ell \left(\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \times \ell \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$$





よって求める値は

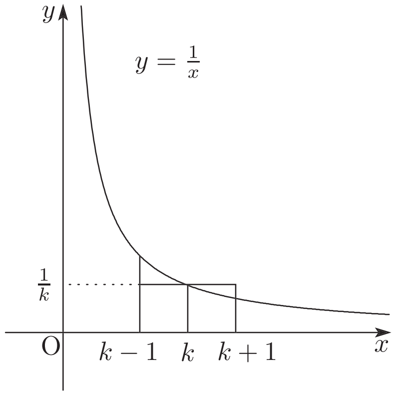
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \ell \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n} = \ell \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x dx$$

$$= \ell \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}\ell} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $y=\dfrac{1}{x}$ は減少関数で，$k \geqq 2$ において右図のような面積を考えて



$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx > \frac{1}{k} > \int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx \ \cdots\cdots ①$$

① より，$m \geqq 2$ として

$$\sum_{k=n+1}^{mn}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx > \sum_{k=n+1}^{mn}\frac{1}{k}$$

$$> \sum_{k=n+1}^{mn}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\int_{n}^{mn}\frac{1}{x}dx > \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{mn}}$$

$$\boldsymbol{> \int_{n+1}^{mn+1}\frac{1}{x}dx} \ \cdots ② \qquad \text{(答)}$$

(2) $$\int_{n}^{mn}\frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_{n}^{mn} = \log mn - \log n = \log m$$

$$\int_{n+1}^{mn+1}\frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_{n+1}^{mn+1}$$

$$= \log(mn+1) - \log(n+1)$$

$$= \log\frac{mn+1}{n+1}$$

$$= \log\frac{m+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \ \to\ \log m \quad (n\to\infty)$$

よって，はさみうちの原理を ② で用いて

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{mn}\right) = \boldsymbol{\log m} \qquad \text{(答)}$$

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠAⅡB

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学T

Z-KAI

会員番号		氏　名	