M3JSB/M3JB/M3TB

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学Ｔ

8章　数と式

問題

【1】与えられた方程式

$x^4 - ax^3 + 11x^2 - ax + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (\#)$

は，$x = 0$ を解にもつことはないから，両辺を $x^2 (\fallingdotseq 0)$ で割ることができる．このとき，

$x^2 - ax + 11 - a \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$ を用いて $x + \dfrac{1}{x} = t$ とすれば，①は

$t^2 - 2 - at + 11 = 0 \iff t^2 - at + 9 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$

となる．

また，$x \fallingdotseq 0$ の下で

$x + \dfrac{1}{x} = t \iff x^2 - tx + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$

である．

次が成り立つ：

与えられた 4 次方程式 (#) が 4 個の異なる正の実数解をもつ

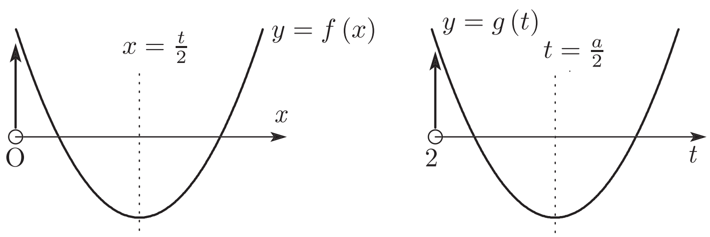
$\iff$ ②が異なる 2 解 $t = \alpha,\ \beta$ をもち，かつそのそれぞれについて方程式③：

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0, \quad x^2 - \beta x + 1 = 0$$

がいずれも異なる正の 2 解をもつ.

これが成り立つ条件を求める.

図 1



I. まず，③が正の 2 異実数解をもつ条件を求める．図 1 の左側を参照のこと．③の左辺を $f(x)$ とする：$f(x) = x^2 - tx + 1$

- $f(x) = 0$ の判別式 $D > 0$ だから，
  $D = t^2 - 4 > 0 \qquad \therefore\ t < -2,\ 2 < t$
- $y = f(x)$ の軸 $x = \dfrac{t}{2}$ について
  $x = \dfrac{t}{2} > 0 \qquad \therefore\ t > 0$
- $x = 0$ における $f(x)$ の値は正でなければならないが，$f(0) = 1 > 0$ より，これは成立.

これらをまとめて，$t > 2 \quad \cdots\cdots\cdots ④$

II. 従って，2 次方程式②が $t>2$ をみたす，異なる実数解をもつならば，そのそれぞれが 2 つの異実数解をもつから，方程式 (#) は合計 4 個の異なる実数解をもつことになる．

そこで，方程式 ② ： $t^2-at+9=0$ が $t>2$ に 2 異実数解をもつ条件を求める．この左辺を $g(t)$ とする：$g(t)=t^2-at+9$. 図 1 の右側を参照のこと．

- ②の判別式 $D_g>0$ であるから
  $D_g=a^2-36>0 \qquad \therefore\ a<-6,\ 6<a$
- $y=g(t)$ の軸 $t=\dfrac{a}{2}$ について
  $t=\dfrac{a}{2}>2 \qquad \therefore\ a>4$
- $t=2$ での $g(t)$ の値 $g(2)$ について
  $g(2)=4-2a+9>0 \qquad \therefore\ a<\dfrac{13}{2}$

これらをまとめて，求める a の範囲は

$6<a<\dfrac{13}{2}$ 　　(答)

【2】 まず，整式 $f(x)$ の次数を決定する．$f(x)$ が n 次の整式であるとすると，与えられた恒等式

$f\left(x^2\right)=x^3f(x-1)+4x^4+2x^2 \quad \cdots\cdots\cdots(\#)$

の

- 左辺 $f\left(x^2\right)$ の次数は $2n$ であり，また
- 右辺については，$x^3f(x-1)$ は $n+3$ 次になるから，右辺の次数は $n+3$ と 4 の大きい方 (小さくない方) $\max\{n+3,\,4\}$ である．

従って，(#) の両辺の次数について

$2n=\max\{n+3,\,4\}$

が成り立つが，条件より $n+3\geqq 2+3=5$ であるから

$2n=n+3 \qquad \therefore\ f(x)$ の次数は 3

そこで以下，3 次式 $f(x)$ を，恒等式 (#) に対して数値代入法を用いることにより求める．

- $x=0$ のとき，(#) は $f(0)=0$ となる．これは，整式 $f(x)$ の定数項は 0 であることを意味するから，
  $f(x)=ax^3+bx^2+cx$
  と置ける．
- $x=1$ のとき，(#) の左辺は $f(1)=a+b+c$，また右辺は
  $1\cdot f(0)+4+2=6 \quad (\because\ f(0)=0) \qquad \therefore\ a+b+c=6 \quad \cdots\cdots\cdots①$
- $x=-1$ のとき，(#) の左辺は $f(1)=a+b+c\ (=6)$，また右辺は
  $-1\cdot f(-2)+6=8a-4b+2c+6 \qquad \therefore\ -4a+2b-c=0 \quad \cdots\cdots\cdots②$
- $x=2$ のとき，(#) の左辺は $f(4)=64a+16b+4c$，また右辺は
  $8f(1)+64+8=8\cdot 6+64+8=120 \qquad \therefore 16a+4b+c=30 \quad \cdots\cdots\cdots③$

①, ②, ③を連立して，$a,\,b,\,c$ の値を求めると

$$a=1,\, b=3,\, c=2 \qquad \therefore \quad f(x)=x^3+3x^2+2x \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

が必要である．

逆に $(*)$ が十分であることを確かめる．等式 $(\#)$ が恒等式であることを示せば十分である．

まず，$(\#)$ の左辺は $x^6+3x^4+2x^2$ である．

右辺について

$$f(x)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2) \qquad \therefore \quad f(x-1)=(x-1)x(x+1)=x\left(x^2-1\right)$$

より，右辺は

$$x^4\left(x^2-1\right)+4x^4+2x^2=x^6+3x^4+2x^2$$

となり，確かに恒等式となるから，$(*)$ で十分．

以上より，求める $f(x)$ は

$$f(x)=x^3+3x^2+2x \qquad \text{(答)}$$

【3】与えられた条件と除法の原理より，$Q_1(x)$，$Q_2(x)$ を整式として

$$f(x)=(x+2)Q_1(x)+9 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+7x-4 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

(1) 求める余りは高々 1 次式であるから，それを $ax+b$ と置く．$f(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った商を $Q_3(x)$ とすれば

$$f(x)=(x-1)(x+2)Q_3(x)+ax+b \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

③において

- $x=-2$ として $f(-2)=-2a+b$，また (i) より $f(-2)=9$ だから $-2a+b=9$
- $x=1$ として $f(1)=a+b$，また②より $f(1)=3$ だから $a+b=3$

これらを連立して $a=-2,\, b=5$ より，求める余りは $-2x+5$ (答)

(2) 求める余りは高々 2 次だから px^2+qx+r と置ける．このとき，商を $Q(x)$ と置けば

$$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+px^2+qx+r \quad \cdots\cdots\cdots (\#)$$

- $x=1$ として $f(1)=p+q+r$，②より $f(1)=3$ $\quad \therefore p+q+r=3$
- $x=-2$ として $f(-2)=4p-2q+r$, (i) より $f(-2)=9$ $\quad \therefore 4p-2q+r=9$
- また，$(\#)$ を微分すると

$$f'(x)=2(x-1)(x+2)Q(x)+(x-1)^2Q(x) + (x-1)^2(x+2)Q'(x)+2px+q$$

$$\therefore f'(1)=2p+q$$

また②を微分して

$$f'(x)=2(x-1)Q_2(x)+(x-1)^2Q_2'(x)+7 \qquad \therefore f'(1)=7$$

よって

$$2p+q=7$$

これら 3 式を連立して $p,\, q,\, r$ を求めれば

$$p=3,\ q=1,\ r=-1 \qquad \therefore \text{ 求める余りは } 3x^2+x-1 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $f(x)=x^2+x+1=0$ とすれば

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\omega,\ \omega^2 \quad \left(ただし\ \omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)$$

k を非負整数として $n-1=6k \Longleftrightarrow n=6k+1$ であるから

$$P_n(x)=P_{6k+1}(x)=x^{6k+1}+1-(x+1)^{6k+1} \quad \cdots\cdots\cdots(\#)$$

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$ に注意して

• $x=\omega$ のとき

$$\begin{aligned}P_{6k+1}(\omega)&=\omega^{6k}\omega+1-(\omega+1)^{6k+1}\\&=\omega+1-\left(-\omega^2\right)^{6k+1}\\&=\omega+1+\omega^2=0\end{aligned}$$

• $x=\omega^2$ のとき

$$\begin{aligned}&P_{6k+1}\left(\omega^2\right)\\&=\left(\omega^2\right)^{6k}\omega^2+1-\left(\omega^2+1\right)^{6k+1}\\&=\omega^2+1-(-\omega)^{6k+1}\\&=\omega^2+1+\omega=0\end{aligned}$$

従って，$P_{6k+1}(x)$ は $x-\omega,\ x-\omega^2$ のいずれでも割り切れる．

$x-\omega$ と $x-\omega^2$ は定数以外に共通因数をもたないから，$P_{6k+1}(x)$ はその積

$$f(x)=(x-\omega)(x-\omega^2)$$

で割り切れる．

以上から, $n-1$ が 6 の倍数のとき, $P_n(x)$ を $f(x)$ で割った余りは 0 である．　(答)

NOTE ．

一般に，2 つの整式 $P(x)$，$Q(x)$ が定数以外に共通因数をもたないとき，それら 2 つの整式は『互いに素である』と言われる．整数の場合とまったく同様である．

(2) $P_n(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $R_n(x)$ として，$n=1,2,\cdots,6$ の場合を求めてみる．

- $n=1$ のとき，$P_1(x)=0$ であるから，$R_1(x)=0$
- $n=2$ のとき，$P_2(x)=-2x$ であるから，$R_2(x)=-2x$
- $n=3$ のとき，$P_3(x)=-3x^2-3x$ であるから，$R_3(x)=3$
- $n=4$ のとき，$P_4(x)=-4x^3-6x^2-4x$ であるから，$R_4(x)=2x+2$
- $n=5$ のとき，$P_5(x)=-5x^4-10x^3-10x^2-5x$ であるから，$R_5(x)=0$
  (もちろんこの結果は (1) で示されている．)
- $n=6$ のとき, $P_6(x)=-6x^5-15x^4-20x^3-15x^2-6x$ であるから, $R_6(x)=1$

次に，$P_{n+6}(x)$ と $P_n(x)$ を $f(x)=x^2+x+1$ で割った余りは等しいことを示す．

つまり示すべきことは

$$R_{n+6}(x)=R_n(x)$$

である．これが示されれば，例えば

$$R_2(x)=R_8(x)=R_{14}(x)=\cdots=-2x \qquad \therefore R_{6k+2}(x)=-2x$$

が，任意の非負整数 k について成り立つことが証明される．

$$\begin{aligned}&P_{n+6}(x),\ P_n(x)\ を\ f(x)\ で割った余りが等しい\\&\qquad\Longleftrightarrow P_{n+6}(x)-P_n(x)\ は\ f(x)\ で割り切られる\end{aligned}$$

であるから，$G(x)=P_{n+6}(x)-P_n(x)$ を求めると

$$G(x)=P_{n+6}(x)-P_n(x)$$

$$= x^{n+6}+1-(x+1)^{n+6}-\{x^n+1-(x+1)^n\}$$
$$= x^{n+6}-x^n-\left\{(x+1)^{n+6}-(x+1)^n\right\}$$
$$= x^n\left(x^6-1\right)-(x+1)^n\left\{(x+1)^6-1\right\}$$

この $G(x)$ が $f(x)=x^2+x+1$ で割り切れることは，$G(\omega)=G\left(\omega^2\right)=0$ と同値であり

- $x=\omega$ のとき，
  $$\omega^6-1=0,\quad (\omega+1)^6-1=\left(-\omega^2\right)^6-1=0$$
  であるから
  $$G(\omega)=\omega^n\left(\omega^6-1\right)-(\omega+1)^n\left\{(\omega+1)^6-1\right\}=0$$
- $x=\omega^2$ のときも
  $$\left(\omega^2\right)^6-1=0,\quad \left(\omega^2+1\right)^6-1=(-\omega)^6-1=0$$
  であるから
  $$G\left(\omega^2\right)=\omega^{2n}\left(\omega^{12}-1\right)-\left(\omega^2+1\right)^n\left\{\left(\omega^2+1\right)^6-1\right\}=0$$

従って，$G(x)=P_{n+6}(x)-P_n(x)$ は
$$(x-\omega)(x-\omega^2)=x^2+x+1=f(x)$$
で割り切れるから，$P_{n+6}(x)$ と $P_n(x)$ を $f(x)$ で割った余りは等しい．

以上から，正整数 n を 6 で割った余りに着目して，帰納的に次が示されたことになる：

k を非負整数として
$$\begin{cases} n=6k+1 \text{ のとき，余りは } 0 \\ n=6k+2 \text{ のとき，余りは } -2x \\ n=6k+3 \text{ のとき，余りは } 3 \\ n=6k+4 \text{ のとき，余りは } 2x+2 \\ n=6k+5 \text{ のとき，余りは } 0 \\ n=6(k+1) \text{ のとき，余りは } 1 \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

NOTE .

n を 6 を法として合同類に分けて，余りを分類して，次の表を得る：

n (mod6)	1	2	3	4	5	0
$R_n(x)$	0	$-2x$	3	$2x+2$	0	1

添削課題

【1】$f(x)-2$ が $(x-1)^2$ で割り切れるから $P(x)$ を整式として

$$f(x)=(x-1)^2P(x)+2$$

と表せる．ここで $Q(x)$ を整式として

$$P(x)=(x+1)^2Q(x)+ax+b$$

とおくと

$$f(x)+2=\left\{(x+1)^2-4x\right\}P(x)+4\cdots\cdots①$$

となり，これを $(x+1)^2$ で割った余りは

$-4x(ax+b)+4$ を $(x+1)^2$で割った余り

であり

$$-4x(ax+b)+4=-4a(x+1)^2+(8a-4b)x+4a+4$$

だから，① を $(x+1)^2$ で割った余りは

$$(8a-4b)x+4a+4$$

に等しい．

条件より，これが 0 だから

$$8a-4b=0,\ 4a+4=0 \qquad \therefore\quad a=-1,\ b=-2$$

よって，求める最低次の $f(x)$ は，$Q(x)=0$ として

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)^2(-x-2)+2 \\ &=\boldsymbol{-x^3+3x} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

である．

問題

【1】(1) $f(x)$ を微分すれば

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 3 - k$$

である．$f(x)$ が極大値，極小値をもつためには，2 次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 実解をもつことが必要かつ十分であるから，その判別式を D として

$$D/4 = k^2 - 3(3-k) > 0$$

$$\iff k < \frac{-3-3\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} < k \qquad \text{(答)}$$

(2) α, β は (1) で考えた 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の解だから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2k}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{3-k}{3}$$

これより，

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{k^2+3k-9}}{3} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より，

$$f(\alpha) - f(\beta) = 4$$

左辺に注目すると，

$$(\text{左辺}) = \int_\beta^\alpha f'(x)dx \ = \ 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \frac{3(\beta-\alpha)^3}{6}$$

よって，

$$\frac{3(\beta-\alpha)^3}{6} = 4 \iff \beta - \alpha = 2$$

$$\iff \frac{2\sqrt{k^2+3k-9}}{3} = 2 \quad (\because \quad (2)\text{ より})$$

$$\iff k^2 + 3k - 9 = 9$$

$$\iff (k+6)(k-3) = 0$$

$$\iff k = -6,\ 3 \qquad \text{(答)}$$

これらは (1) で求めた条件をみたす.

【2】 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の 2 点 P, Q の x 座標を p, q $(p<q)$ とすると, 直線 PQ の式は

$$y=\frac{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{4}p^2}{q-p}(x-p)+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}(p+q)x-\frac{1}{4}pq \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①が点 (4, 5) を通るので

$$p+q-\frac{1}{4}pq=5$$

①の傾きを m とおくと

$$p+q=4m, \quad pq=4(4m-5)$$

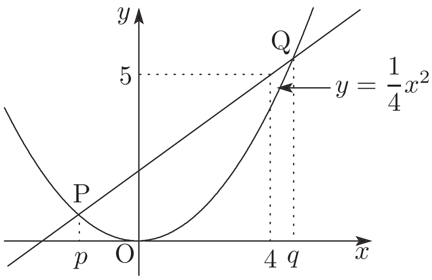
従って, p, q は

$$t^2-4mt+4(4m-5)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

の 2 解である．ここで, ②の判別式を D とすれば,

$$\frac{D}{4}=4m^2-4(4m-5)=4\{(m-2)^2+1\}>0$$

より，p，q は確かに実数で，また $p\neq q$ をみたす．



ここで

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{1+m^2}(q-p)$$

$$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=16m^2-16(4m-5)=16\left(m^2-4m+5\right)$$

だから

$$\mathrm{PQ}^2=\left(1+m^2\right)(q-p)^2=16\left(m^2+1\right)\left(m^2-4m+5\right)$$

そこで，$f(m)=\left(m^2+1\right)\left(m^2-4m+5\right)$ と置くと,

$$f'(m)=4m^3-12m^2+12m-4=4(m-1)^3$$

だから，$f'(m)=0$ より

$$m=1$$

を得る．関数 $f(m)$ の増減表は次のようになる：

m	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$
$f(m)$	↘	極小	↗

このとき，$f(1)=4$, $\mathrm{PQ}=4\sqrt{f(m)}$ より,

傾き $m=1$ のとき, PQ の最小値は 8 となる.　　(答)

【3】 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ とおく．

$y=f(x)$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつためには，関数 $f(x)$ が極大値・極小値を持つことが必要である．

従って，$f'(x)=3x^2+6ax+3b$ であるから

$f'(x)=3x^2+6ax+3b=3(x^2+2ax+b)=0 \quad \cdots$①

が相異なる 2 つの実数解を持たなくてはならない．よって①の判別式を D として

$\dfrac{D}{4}=a^2-b>0$

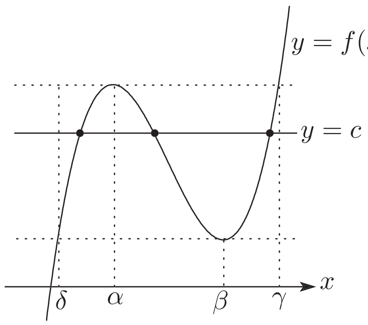
が成立することが必要．

ここで，①の 2 つの実数解を $\alpha=-a-\sqrt{a^2-b}$, $\beta=-a+\sqrt{a^2-b}$ とする．このとき，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小である．

次に，$f(x)=f(\alpha)$ となる α 以外の x の値を γ とし，$f(x)=f(\beta)$ となる β 以外の x の値を δ とすると，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	δ	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$f(\beta)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗	$f(\alpha)$	↗

これより，下のグラフを得る：



従って，2 つのグラフが相異なる 3 つの交点を持つのは $f(\beta)<c<f(\alpha)$ のときであり，また，このとき $y=f(x)$ と $y=c$ の交点の x 座標は 3 つの開区間

$(\delta,\ \alpha)$, $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \gamma)$

に各々 1 つずつある．

方程式

$f(x)-f(\alpha)=x^3+3ax^2+3bx-(\alpha^3+3a\alpha^2+3b\alpha)=0$

の解が，α, γ となるので，解と係数の関係より

$\gamma+2\alpha=-3a$

よって

$\gamma=-a+2\sqrt{a^2-b}$

同様にして，$\delta=-a-2\sqrt{a^2-b}$ となる．

以上より題意が示された．（証明終）

【4】(1) $y=x^3-4x$ より, $y'=3x^2-4$ であるから，接点の x 座標を t とおくと, 接線の方程式は,

$$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t$$
$$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

これが点 $(-2,\ 4)$ を通ることから,

$$4=-2(3t^2-4)-2t^3$$
$$\therefore t^3+3t^2-2=0$$

これを解いて,

$$(t+1)(t^2+2t-2)=0$$
$$\therefore t=-1,\quad -1\pm\sqrt{3}$$

これらを①に代入して, 求める接線の方程式は,

$y=-x+2,\quad y=(8\pm6\sqrt{3})x+20\pm12\sqrt{3}$ (複号同順) (答)

(2) C 上の点 $(3,\ 15)$ における接線の方程式を $y=mx+n$ とおくと, 2 式より y を消去して得られる 3 次方程式

$$x^3-4x=mx+n \quad\Longrightarrow\quad x^3-(m+4)x-n=0$$

は接点の x 座標 $x=3$ を重解にもつ．よって, 残りの解を α とおくと, 解と係数の関係より,

$$3+3+\alpha=0 \qquad \therefore\quad \alpha=-6$$

これは接線が再び C と交わる点の x 座標である．

従って求める座標は，$(-6,\ -192)$ である． (答)

【5】曲線 $y=x^4-6x^2$ は x 軸に関して対称であるから，点 (a, b) が $x\geqq0$ をみたす領域にある場合を考える．

このとき，$y=x^4-6x^2$ の $x=t$ における接線の方程式は，$y'=4x^3-12x$ より

$$y=(4t^3-12t)(x-t)+t^4-6t^2$$
$$=(4t^3-12t)x-3t^4+6t^2$$

となる．これが点 $(a,\ b)$ を通るので

$$b=(4t^3-12t)a-3t^4+6t^2 \quad \therefore\ 3t^4-4at^3-6t^2+12at+b=0 \ \cdots\cdots\cdots ①$$

ところで，曲線 $y=x^4-6x^2$ のグラフにおいて，相異なる 2 点で接する直線

$$y=-9$$

が 1 本存在する．従って，相異なる 4 つの接線が引けるための条件は

- ①が相異なる 4 つの解をもち，かつ
- 点 (a, b) が直線 $y=-9$ 上にない，つまり $b\neq-9$

が成り立つことである．

そこで，①の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=12t^3-12at^2-12t+12a=12(t^3-at^2-t+a)$$
$$=12(t-a)(t-1)(t+1)$$

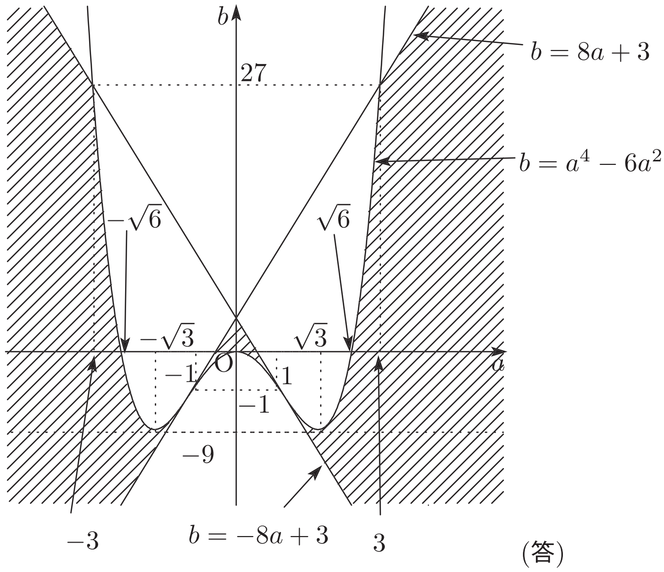
であるから，一つ目の条件から，$a\fallingdotseq1$ であり

(i) $a>1$ のとき

$$f(-1)<0,\ f(1)>0,\ f(a)<0$$

(ii) $0 \leqq a < 1$ のとき

$f(-1) < 0,\ f(a) > 0,\ f(1) < 0$



(答)

ここで

$f(a) = -a^4 + 6a^2 + b,\ f(1) = 8a + b - 3,\ f(-1) = -8a + b - 3$

であるから，$a < 0$ の場合も考慮すると点 $(a,\ b)$ の存在する領域は

(i) $-8a + b - 3 < 0,\ 8a + b - 3 > 0,\ -a^4 + 6a^2 + b < 0,\ b \neq -9,\ a > 1$

(ii) $-8a + b - 3 < 0,\ 8a + b - 3 < 0,\ -a^4 + 6a^2 + b > 0,\ b \neq -9,\ 0 \leqq a < 1$

(iii) (i)，(ii) と b 軸に関して対称な領域

である．

これを図示すると上図の斜線部分のようになる．ただし，境界は含まず，また直線 $b = -9$ も含まない．

直線 $b = 8a + 3,\ b = -8a + 3$ は，4 次曲線 $b = a^4 - 6a^2$ の，それぞれ点 $(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$ における接線になっていることに注意せよ．

また，与えられた 4 次曲線 $y = x^4 - 6x^2$ を，2 回微分すると

$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x + 1)(x - 1)$

となり，これら 2 点はこの曲線の変曲点であることが解る．

一般に，変曲点で接する接線は，その曲線と交差的に接する．

添削課題

【1】$f(x)=x(x^2-a)$ であり，$f'(x)=3x^2-a$ だから

(i) $a \leqq 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x)$ は単調増加関数でつねに $f(x) \geqq 0$ だから，$|f(x)|$ の最大値は $f(1)$．ここで

$$f(1)=1-a \geqq 1 \qquad \therefore f(1)>\frac{1}{4}$$

(ii) $a>0$ のとき

(ア) $\sqrt{\dfrac{a}{3}} \geqq 1$ すなわち $a \geqq 3$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x)$ は単調減少し，$f(x) \leqq 0$ だから，$|f(x)|$ の最大値は $-f(1)$．ここで

$$-f(1)=a-1 \geqq 3-1=2 \qquad \therefore -f(1)>\frac{1}{4}$$

(イ) $f(x)=-f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)$，$x>\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ となる x は $2\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ だから，

$\sqrt{\dfrac{a}{3}}<1 \leqq 2\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ すなわち $\dfrac{3}{4} \leqq a<3$ のとき

$|f(x)|$ の最大値は $-f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)$ で，

$$-f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} \geqq \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}$$

$$\therefore -f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geqq \frac{1}{4}$$

(ウ) $2\sqrt{\dfrac{a}{3}}<1$ すなわち $0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき $|f(x)|$ の最大値は $f(1)$．　ここで，

$$f(1)=1-a>1-\frac{3}{4} \qquad \therefore f(1)>\frac{1}{4}$$

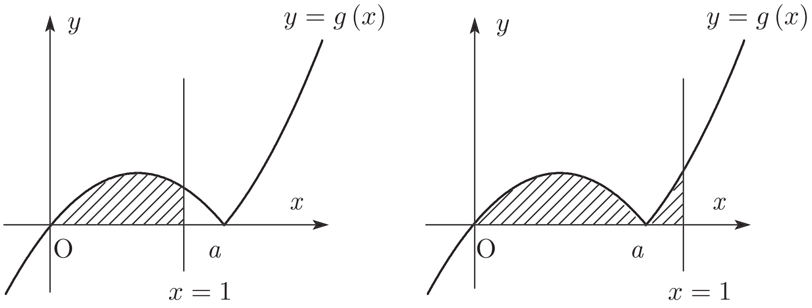
以上により，題意は示された．　　(証明終)

１０章　微分・積分（２）

問題

【1】被積分関数を $g(x)$ とする：$g(x) = x\left|x-a\right|$． $y = g(x)$ のグラフは次の図 1 のようになる．

図 1



$a \geqq 1$ のとき　　　　　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

(i) $a \geqq 1$ のとき, $0 \leqq x \leqq 1$ において常に $x - a \leqq 0$ が成り立つから,

$$f(a) = \int_0^1 -x(x-a)dx = \int_0^1 (ax - x^2)dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$$

よって, $f(a)$ は $a \geqq 1$ の範囲において増加関数である.

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき,

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq a \quad ならば \quad x - a \leqq 0 \\ a \leqq x \leqq 1 \quad ならば \quad x - a \geqq 0 \end{cases}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} f(a) &= -\int_0^a x(x-a)dx + \int_a^1 x(x-a)dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1 \\ &= -\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

a で微分して,

$$f'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$$

よって, $0 \leqq a \leqq 1$ における $f'(a)$ の符号は次のようになる.

$$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(a) \leqq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1 \quad \Rightarrow \quad f'(a) \geqq 0 \end{cases}$$

以上 (i)(ii) より, $a \geqq 0$ の範囲における $f(a)$ の増減表は次のようになる:

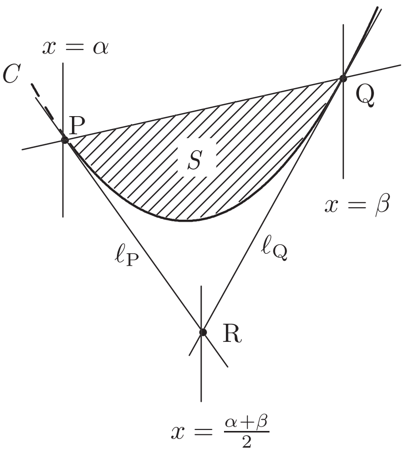
a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

以上より, 求める最小値は,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β (ただし $\alpha < \beta$) とする．図 2 を見られたい.

図 2



直線 PQ を $y = kx + b$ とおけば，$x = \alpha,\ \beta$ は方程式

$$x^2 = kx + b \Longleftrightarrow x^2 - kx - b = 0$$

の 2 解となるから，因数分解

$$x^2 - kx - b = (x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つ.

直線 PQ と曲線 C に囲まれた図形の面積を S とすれば,

$$S = \int_\alpha^\beta \left\{(kx + b) - x^2\right\} dx = \int_\alpha^\beta -(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

が成り立つ.

題意より $S = \dfrac{1}{6}$ であるから，$(\beta - \alpha)^3 = 1$ より $\beta - \alpha = 1 \quad \cdots\cdots\cdots(\#)$

他方, P における C の接線 ℓ_P は傾き 2α, y 切片 $-\alpha^2$ であるから, $\ell_\mathrm{P} : y = 2\alpha x - \alpha^2$

同様に Q における C の接線 ℓ_Q は $\ell_\mathrm{Q} : y = 2\beta x - \beta^2$ となる.

この 2 直線の交点を R(X, Y) とすれば，ℓ_P，ℓ_Q の方程式を連立して

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2},\ Y = \alpha\beta \qquad \therefore \quad \alpha + \beta = 2X,\ \alpha\beta = Y$$

$(\#)$ より

$$1 = (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (2X)^2 - 4Y$$

となるから，$Y = X^2 - \dfrac{1}{4}$ を得る.

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は任意の実数値をとり得るから，求める軌跡は

$y=x^2-\dfrac{1}{4}$ 　　(答)

(2) $C_1: y=x^3-2x^2$ と $C_2: y=a\left(x^2-2x\right)$ の共有点の x 座標を求める．方程式を連立して

$$x^3-2x^2=a\left(x^2-2x\right) \iff x^2(x-2)-ax(x-2)=0$$
$$\iff x(x-2)(x-a)=0$$

であるから，$x=0,\,2,\,a$ を得るが，C_1 と C_2 によって 2 つの領域が得られるから，$a\neq 2$ が必要である ($a\neq 0$ は問題の条件にある).

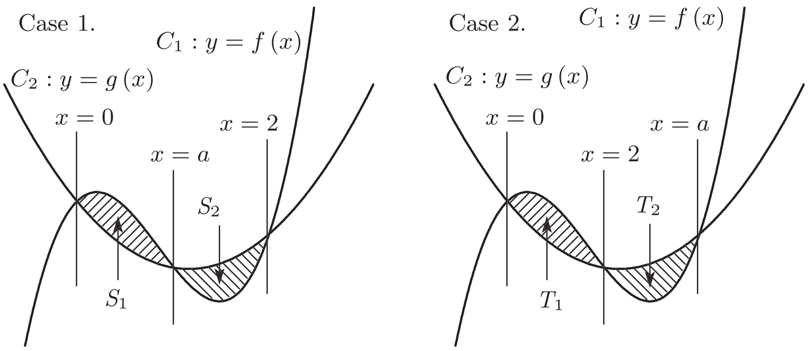
曲線 C_1 の方程式を $y=f(x)$，C_2 の方程式を $y=g(x)$ とする．以下，誤解の恐れのないときには $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ を $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ で表す.

a の値について，

Case 1. $0<a<2$ のとき，　Case 2. $2<a$ のとき，

に場合を分ける.

図 3



Case 1.　$0<a<2$ のとき，$0\leqq x\leqq a$ における領域の面積を S_1，$a\leqq x\leqq 2$ における領域の面積を S_2 とすると，

$$S_1=\int_0^a (f(x)-g(x))\,dx=\int_0^a (f-g)$$
$$S_2=\int_a^2 (g(x)-f(x))\,dx=\int_a^2 (g-f)$$

であるから，

$$S_1=S_2 \iff S_1-S_2=0$$

に注意して

$$S_1-S_2=\int_0^a (f-g)-\int_a^2 (g-f)$$
$$=\int_0^a f-\int_0^a g-\int_a^2 g+\int_a^2 f=\int_0^2 f-\int_0^2 g=\int_0^2 (f-g)=0$$

となる.

非積分関数 $f-g$ は

$$f(x)-g(x)=\left(x^3-2x^2\right)-a\left(x^2-2x\right)=x^3-(a+2)x^2+2ax$$

であるから，積分を計算して

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left\{x^3-(a+2)x^2+2ax\right\}dx&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^2\\&=4-\frac{8}{3}(a+2)+4a\end{aligned}$$

これが 0 に等しいから，

$$4-\frac{8}{3}(a+2)+4a=0 \qquad \therefore \quad a=1$$

これは条件 $0<a<2$ をみたす.

Case 2. $2<a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ 上の領域の面積を T_1，$2 \leqq x \leqq a$ 上の領域の面積を T_2 とすれば，

$$T_1=\int_0^2 (f-g), \quad T_2=\int_2^a (g-f)$$

であるから，$T_1=T_2 \Longleftrightarrow T_1-T_2=0$ より，

$$\begin{aligned}\int_0^2 (f-g)-\int_2^a (g-f)&=\int_0^2 f-\int_0^2 g-\int_2^a g+\int_2^a f\\&=\int_0^a f-\int_0^a g=\int_0^a (f-g)=0\end{aligned}$$

となる．Case 1 の場合と同様にして

$$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0$$

を得るが，$a \neq 0$ であるから，$a=4$．これは $a>2$ をみたす.

以上より，

求める a の値は $a=1,\ 4$ 　　(答)

【3】与えられた定積分を

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt=2x^3+9x^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

とおく.

$$f(x-t)=2(x-t)+3=(2x+3)-2t$$

であるから, ①の被積分関数は

$$\begin{aligned}f(x-t)g(t)&=\{(2x+3)-2t\}g(t)\\&=(2x+3)g(t)-2tg(t)\end{aligned}$$

よって① の左辺は

$$(2x+3)\int_0^x g(t)dt-2\int_0^x tg(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots ①'$$

と表すことができる.

そこで, $g(t)$ を n 次の整式とし, 最高次の係数を $a(\neq 0)$ とすると,

$$g(t)=at^n+h(t) \qquad \Bigl(\text{ただし } h(t) \text{ は } (n-1) \text{ 次以下の整式}\Bigr)$$

と表される．このとき,

$$\int_0^x g(t)dt=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\int_0^x h(t)dt$$

$$\int_0^x tg(t)dt = \frac{a}{n+2}x^{n+2} + \int_0^x th(t)dt$$

であるから, ①$'$ の $(n+2)$ 次の項は,

$$2 \cdot \frac{a}{n+1} - 2 \cdot \frac{a}{n+2} = \frac{2a}{(n+1)(n+2)} \neq 0$$

従って①$'$ は $n+2$ の整式となり, ① が x の恒等式であることから,

$$n+2 = 3 \qquad \therefore \quad n = 1$$

そこで, 改めて $g(x) = ax + b$ とおくと, ① の左辺は,

$$\begin{aligned}
&(2x+3)\int_0^x (at+b)dt - 2\int_0^x \left(at^2+bt\right)dt \\
&= (2x+3)\left[\frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^x - 2\left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2\right]_0^x \\
&= (2x+3)\left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right) - 2\left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right) \\
&= \frac{a}{3}x^3 + \left(\frac{3a}{2} + b\right)x^2 + 3bx
\end{aligned}$$

①が恒等式であることから

$$\frac{a}{3} = 2, \quad \frac{3a}{2} + b = 9, \quad 3b = 0 \qquad \therefore \quad a = 6, \quad b = 0$$

以上より

$$g(x) = 6x \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) すべての n に対して

$$f_n(x) = a_nx + b_n \quad (a_n > 0)$$

と書けることを, 数学的帰納法で証明する.

(I) $f_1(x) = x + 1$ であるから

$$a_1 = 1(>0), \quad b_1 = 1$$

とすることにより $n = 1$ のときは成立する.

(II) $n = k\,(\geqq 1)$ のときの成立, すなわち

$$f_k(x) = a_kx + b_k \quad (a_k > 0)$$

と表されることを仮定すると

$$\begin{aligned}
x^2 f_{k+1}(x) &= x^3 + x^2 + \int_0^x tf_k(t)dt \\
&= x^3 + x^2 + \int_0^x (a_kt^2 + b_kt)dt \\
&= x^3 + x^2 + \left[\frac{1}{3}a_kt^3 + \frac{1}{2}b_kt^2\right]_0^x \\
&= \left(1 + \frac{1}{3}a_k\right)x^3 + \left(1 + \frac{1}{2}b_k\right)x^2
\end{aligned}$$

であり, $a_k > 0$ (帰納法の仮定) より

$$1 + \frac{1}{3}a_k > 0$$

そこで $a_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{3}a_k,\ b_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{2}b_k$ とおけば

$$f_{k+1}(x) = a_{k+1}x + b_{k+1} \quad (a_{k+1} > 0)$$

と表されるので, $n = k+1$ のときも成立する.

以上 (I), (II) より, すべての n に対して $f_n(x)$ は 1 次式である.（証明終）

(2) (1) の考察から, $f_n(x) = a_n x + b_n$ に対して

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1 \quad \cdots\cdots\cdots ① \\ b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + 1 \quad \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

であることがわかるので, この漸化式を解いて a_n, b_n を求める.

まず, ①より

$$a_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_n - \frac{3}{2} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

次に, ②より

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(b_n - 2)$$

なので

$$\begin{aligned} b_n - 2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_1 - 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - 2) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad b_n = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

以上より

$$f_n(x) = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}x + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】 (i) $x \leqq -2$ のとき

$$g(x) = \int_{-2}^{2} |x-t|(t^2-a^2)dt \;=\; -\int_{-2}^{2}(x-t)(t^2-a^2)dt$$
$$= \int_{-2}^{2}(t^3 - xt^2 - a^2t + a^2x)dt \;=\; 2\int_{0}^{2}(-xt^2 + a^2x)dt$$
$$= 2\left[-\frac{x}{3}t^3 + a^2xt\right]_0^2 \;=\; 2x\left(2a^2 - \frac{8}{3}\right) \;=\; \frac{4}{3}(3a^2-4)x$$

(ii) $2 < x$ のとき

$$g(x) = \int_{-2}^{2}(x-t)(t^2-a^2)dt = -\frac{4}{3}(3a^2-4)x$$

(iii) $-2 < x \leqq 2$ のとき

$$g(x) = \int_{-2}^{2}|x-t|(t^2-a^2)dt$$
$$= \int_{-2}^{x}(x-t)(t^2-a^2)dt + \int_{x}^{2}(t-x)(t^2-a^2)dt$$
$$= \int_{-2}^{x}(x-t)(t^2-a^2)dt + \int_{2}^{x}(x-t)(t^2-a^2)dt$$
$$= \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{x}{3}t^3 + \frac{a^2}{2}t^2 - a^2xt\right]_{-2}^{x} + \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{x}{3}t^3 + \frac{a^2}{2}t^2 - a^2xt\right]_{2}^{x}$$
$$= 2\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} + \frac{a^2x^2}{2} - a^2x^2\right) - \left(-4 - \frac{8}{3}x + 2a^2 + 2a^2x\right)$$
$$- \left(-4 + \frac{8}{3}x + 2a^2 - 2a^2x\right)$$
$$= \frac{1}{6}x^4 - a^2x^2 - 4a^2 + 8 \;=\; \frac{1}{6}(x^2-3a^2)^2 - \frac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8$$

$g(x)$ が最小値をもつとき，$x \leqq -2$, $2 < x$ では直線の方程式なので

$3a^2 - 4 \leqq 0$ かつ $0 < a$　　$\therefore$　$0 < a \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

①のとき, $-2 \leqq x \leqq 2$ で最小値をもてばよいので, (iii) より

$x^2 \leqq 4$ かつ $0 < 3a^2 \leqq 4$

$-2 < x \leqq 2$ で，$g(x)$ は x の複 2 次式となるので, $x^2 = 3a^2$ のとき

$$g(x) \geqq g(\pm\sqrt{3}a) = -\frac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8$$

以上より，$\boldsymbol{0 < a \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ のとき，最小値

$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8}$　　(答)

をとる.

<参考> この解答は, 次のことを利用している.

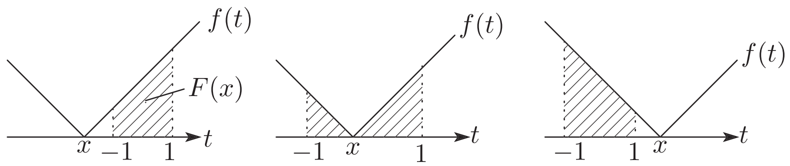
$$F(x) = \int_{-1}^{1}|x-t|dt$$

を考える. 被積分関数を $f(t)$ として

$$f(t) = |x-t| = \begin{cases} t-x & (x \leqq t) \\ -t+x & (t < x) \end{cases}$$

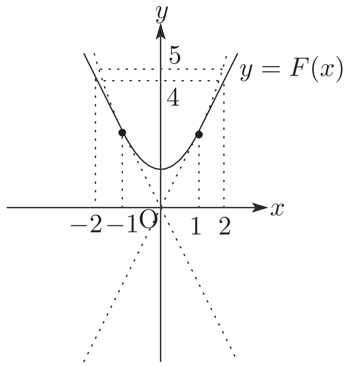
より, 積分軸を t にとって作図すると, 定積分の上, 下端の値 1, -1 を考慮して, 次の 3 つの場合がある.

i) $x \leqq -1$　　ii) $-1 < x \leqq 1$　　iii) $x \geqq 1$



このとき, $F(x)$ は斜線部分の面積となる.

$$F(x) = \begin{cases} -2x & (x \leqq -1) \\ 1+x^2 & (-1 < x \leqq 1) \\ 2x & (1 < x) \end{cases}$$



M3JSB/M3JB/M3TB

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	