M3MA

本科 1 期 6 月度

# 解答

Z会東大進学教室

# 難関大数学Ⅲ

# 難関大理系数学 M

## ８章－１　場合の数・確率（３）

### 問題

【1】(1) 白球 3 個，赤球 2 個，黒球 1 個を横一列に並べ，左から順に球を取り出すと考える．
つまり，黒球の左側に並んだ球が取り出される．
このとき，球の並べ方は
$\dfrac{6!}{3!2!} = 60$ 通り
ある．赤球をちょうど 2 個取り出すのは，黒球の左側に赤球が 2 つあるときであり，
黒球の左側に白球がいくつあるかで場合を分けると
白球 0 個のとき，1 通り
白球 1 個のとき，$\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通り
白球 2 個のとき，$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り
白球 3 個のとき，$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$ 通り
であるから，求める確率は
$\dfrac{1+3+6+10}{60} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$　　(答)

(2) 赤球より白球が多く含まれているのは
(赤 0，白 1) − 黒 − (赤 2，白 2) : $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り
(赤 0，白 2) − 黒 − (赤 2，白 1) : $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通り
(赤 0，白 3) − 黒 − (赤 2，白 0) : 1 通り
(赤 1，白 2) − 黒 − (赤 1，白 1) : $\dfrac{3!}{2!} \times 2! = 6$ 通り
(赤 1，白 3) − 黒 − (赤 1，白 0) : $\dfrac{4!}{3!} = 4$ 通り
(赤 2，白 3) − 黒 − (赤 0，白 0) : $\dfrac{5!}{2!3!} = 10$ 通り
の場合であるから，求める確率は
$\dfrac{6+3+1+6+4+10}{60} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　　(答)

【2】 (i) $n = 1$ のとき．
3 の目がでればよいので，求める確率は $\dfrac{1}{6}$
(ii) $n \geqq 2$ のとき，出る目に関して，以下の場合が考えられる．
① 3 の目が 1 個，他は全て 1 の目が出る
② 2 の目が 2 個，他は全て 1 の目が出る
① のとき，求める確率は
$${}_n\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{6^n}$$
② のとき，求める確率は
$${}_n\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{6^n}$$

①，② は排反なので，求める確率は

$$\frac{n}{6^n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{6^n}=\frac{n(n+1)}{2\cdot 6^n}\quad\cdots(*)$$

ここで，$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$\frac{1\cdot 2}{2\cdot 6}=\frac{1}{6}$$

となり，(i) の場合もみたす．以上より，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2\cdot 6^n}}\qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 硬貨を 6 回投げたとき，表が $a$ 回，裏が $b$ 回出るとすると

$$a+b=6$$

であり，点 P の $x$ 座標は

$$x=a-b$$

と表せる．6 回目の移動で点 P が原点に戻るのは

$$a+b=6 \text{ かつ } a-b=0$$

$$\therefore\quad a=b=3$$

のときである．何回目に表が出るかで ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りあるので，求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{5}{16}}\qquad \text{(答)}$$

(2) 2 回の移動で原点に戻る確率は

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

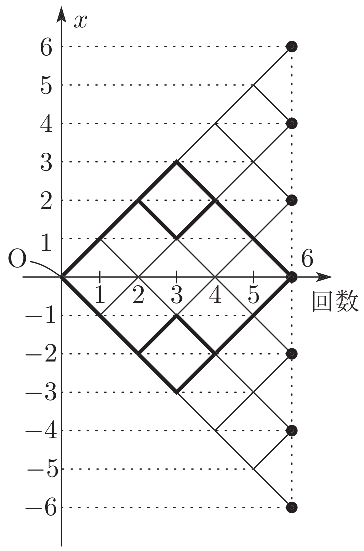
4 回の移動で原点に戻る確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}\qquad \text{(答)}$$

(3) $x$ 座標を縦軸とし，硬貨を投げる回数を横軸として，点 P の移動をグラフに表すと右図のようになる．




よって，6 回目の移動で点 P が初めて原点に戻るのは右図の太線部分のように変化するときなので求める確率は

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\boldsymbol{\frac{1}{16}}\qquad \text{(答)}$$

## ８章－２　積分の計算（１）

### 問題

【1】$C$ は積分定数とする.

(1)
$$\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int \sin x dx$$
$$= \boldsymbol{x\sin x + \cos x + C} \qquad (答)$$

(2)
$$\int xe^{-x} dx = \int x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx$$
$$= \boldsymbol{-xe^{-x} - e^{-x} + C} \qquad (答)$$

(3)
$$\int (\log x)^2 dx = \int (x)'(\log x)^2 dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int (x)' \log x dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2\int 1 dx$$
$$= \boldsymbol{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C} \qquad (答)$$

(4)
$$\int x^2\cos x dx = \int x^2(\sin x)' dx$$
$$= x^2\sin x - 2\int x\sin x dx$$
$$= x^2\sin x - 2\int x(-\cos x)' dx$$
$$= x^2\sin x - 2\left(-x\cos x - \int -\cos x dx\right)$$
$$= \boldsymbol{x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C} \qquad (答)$$

(5)
$$\int_1^e x(\log x)^2 dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\log x)^2 dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\log x dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \left(\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx\right)$$
$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\right) = \boldsymbol{\frac{e^2-1}{4}} \qquad (答)$$

(6) $$I=\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x dx$$

とおく.

$$\begin{aligned}
I=\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x dx &= \int_0^{\pi}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\sin x dx\\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2}\sin x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\cos x dx\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{2x}}{2}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{2x}}{2}(-\sin x)dx\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\cos x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}I
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{5}{4}I = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}(1+e^{2\pi})$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} e^{2x}\sin x dx = \boldsymbol{\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ (答)

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$ (答)

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ (答)

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos xdx\\
&=\left[\cos^{n-1}x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos^{n-1}x)'dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 xdx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\\
&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n
\end{aligned}$$

したがって

$\boldsymbol{I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}}$ (答)

(3) (1), (2) より, $\boldsymbol{n}$ が偶数のとき

$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}\\
&=\cdots\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}I_0\\
&=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$ (答)

$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき

$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}\\
&=\cdots\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}I_1\\
&=\boldsymbol{\frac{(n-1)(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n(n-2)\cdot\cdots\cdot 3}}
\end{aligned}$$ (答)

【3】(1) $t=x+1$ とおくと，$x=t-1$ であり

$dt=dx$

$x:0\to 1$ のとき，$t:1\to 2$

なので

$$\int_0^1 (2x-1)\sqrt{x+1}dx=\int_1^2 (2t-3)\sqrt{t}dt=\int_1^2 (2t^{\frac{3}{2}}-3t^{\frac{1}{2}})dt$$

$$=\left[\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと，$x=t^2-1$ より

$dx=2tdt$

$x:3\to 4$ のとき，$t:2\to\sqrt{5}$

であるから

$$\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_2^{\sqrt{5}}\frac{2dt}{t^2-1}$$

$$=\int_2^{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\Big[\log|t-1|-\log|t+1|\Big]_2^{\sqrt{5}}$$

$$=\left\{\log(\sqrt{5}-1)-\log 1-\log(\sqrt{5}+1)+\log 3\right\}$$

$$=\boldsymbol{\log\frac{3(3-\sqrt{5})}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $e^x-1=t$ とおくと，$e^x=t+1$ であり

$\dfrac{dt}{dx}=e^x$ すなわち $dx=\dfrac{dt}{t+1}$

$x:1\to 2$ のとき，$t:e-1\to e^2-1$

なので

$$\int_1^2\frac{dx}{e^x-1}=\int_{e-1}^{e^2-1}\frac{dt}{t(t+1)}$$

$$=\int_{e-1}^{e^2-1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\Big[\log|t|-\log|t+1|\Big]_{e-1}^{e^2-1}$$

$$=\log\frac{e^2-1}{e-1}-\log\frac{e^2-1+1}{e-1+1}$$

$$=\boldsymbol{\log(e+1)-1} \qquad \text{(答)}$$

(4) $x=2\sin t$ とおくと

$dx=2\cos t dt$

$x:1\to 2$ のとき $t:\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{2}$

なので

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\ dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t)dt$$

$$= \Big[2t+\sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad (\text{答})$$

(5) $x = 3\tan t$ とおくと

$$dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt$$

$x : 0 \to 3$ のとき $t : 0 \to \dfrac{\pi}{4}$

なので

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+9}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\tan^2 t+9}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}} \qquad (\text{答})$$

(6) $(x^2+1)' = 2x$ より

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}-1}{3}} \qquad (\text{答})$$

(7) $(e^x-1)' = e^x$ より

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}dx = \int_1^2 \frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx$$

$$= \Big[\log|e^x-1|\Big]_1^2$$

$$= \log(e^2-1) - \log(e-1) = \boldsymbol{\log(e+1)} \qquad (\text{答})$$

(8) $f(x) = \cos^3 x\sin^4 x$ とおくと

$$f(-x) = \cos^3(-x)\sin^4(-x) = \cos^3 x\sin^4 x$$

$$\therefore \quad f(x) = f(-x)$$

であるから，$f(x)$ は偶関数である．よって

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin^4 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin^2 x)\sin^4 x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)'(\sin^4 x - \sin^6 x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{35}} \qquad (\text{答})$$

【4】(1) 右辺は

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}&=\frac{a(x^2+x+1)+(x-1)(bx+c)}{x^3-1}\\&=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}\end{aligned}$$

と変形できるので，等式 $\dfrac{x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ が任意の $x$ に対して成り立つためには

$$\begin{cases}a+b=0\\a-b+c=1\\a-c=1\end{cases}$$

$\therefore\ \ \boldsymbol{a=\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{2}{3},\ c=-\dfrac{1}{3}}$ (答)

(2) $\dfrac{x^4+1}{x^3-1}=x+\dfrac{x+1}{x^3-1}$

であり，さらに (1) より

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+1}{x^3-1}\,dx&=\int\left(x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx\\&=\int\left(x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\right)dx\\&=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}\log|x^2+x+1|+C\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+C}\ \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

# ９章－１　図形と方程式（１）

## 問題

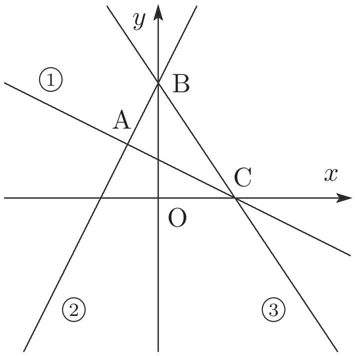
【1】3 直線を

$ax+y-a=0$ ……  ①

$x-ay+a(a+1)=0$ ……  ②

$(a+1)x+y-a-1=0$ ……  ③

とおく．①と②，②と③，③と①の交点を A，B，C とすると




$$\mathrm{A}\left(-\frac{a}{1+a^2},\ \frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)$$

$\mathrm{B}(0,\ a+1)$

$\mathrm{C}(1,\ 0)$

である．

**■解答 1**　ベクトルを用いる．

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(-\frac{a^2+a+1}{1+a^2},\ \frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-1,\ a+1)$$

であるから，求める面積 $S$ は

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\left|-\frac{a^2+a+1}{1+a^2}\cdot(a+1)-\left(\frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)\cdot(-1)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(a^2+a+1)(-a-1+a)}{1+a^2}\right|$$

$$=\boldsymbol{\frac{a^2+a+1}{2a^2+2}}\qquad(答)$$

**■解答 2**　①の法線ベクトルは $(a,\ 1)$ であり，②の法線ベクトルは $(1,\ -a)$ であり，この 2 つのベクトルの内積について

$$(a,\ 1)\cdot(1,\ -a)=a-a=0$$

であるから，$\angle\mathrm{BAC}=90°$

よって

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-\frac{a}{1+a^2}\right)^2+\left\{\frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}-(a+1)\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{(1+a^2)^2}+\frac{1}{(1+a^2)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\left(-\frac{a}{1+a^2}-1\right)^2+\left(\frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2+a^2(a^2+a+1)^2}{(1+a^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2}{1+a^2}} = \frac{a^2+a+1}{\sqrt{1+a^2}}$$

よって

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \boldsymbol{\frac{a^2+a+1}{2a^2+2}} \qquad \text{(答)}$$

**【2】** (1) 円 $C$ の中心 $\mathrm{A}(0,\,2)$ と直線 $l:2x-y+a=0$ の距離 $d$ は

$$d = \frac{|0\cdot 2 - 1\cdot 2 + a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a-2|}{\sqrt{5}}$$

よって，円 $C$ と直線 $l$ が共有点をもつための条件は

$d \leqq$（円 $C$ の半径）

$$\therefore \quad \frac{|a-2|}{\sqrt{5}} \leqq 3$$

$$\therefore \quad |a-2| \leqq 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad -3\sqrt{5} \leqq a-2 \leqq 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{2-3\sqrt{5} \leqq a \leqq 2+3\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $l$ が $C$ によって切り取られる線分の長さを $L$ とすると，3 平方の定理より

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 9-d^2$$

$$\therefore \quad d^2 = 9-\frac{L^2}{4} = 9-5 = 4 \quad (\because \quad L = 2\sqrt{5})$$

$$\therefore \quad d = 2$$

のときであるから，(1) より

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{5}} = 2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = 2\pm 2\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

**【3】** (1) 2 円 $C_1$，$C_2$ の交点を通る図形（のうち $C_2$ 以外の図形）の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2-4+k\left\{(x-1)^2+(y-2)^2-2\right\} = 0$$

$$x^2-4x+y^2-2y+1+k(x^2-2x+y^2-4y+3) = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

である．ここで，$k=-1$ のとき，①は直線となるので，求める方程式は

$$x^2-4x+y^2-2y+1-(x^2-2x+y^2-4y+3) = 0$$

$$\boldsymbol{x-y+1=0} \qquad \text{(答)}$$

(2) （解答１）①が原点 O を通るとき

$$1+3k = 0 \qquad \therefore \quad k = -\frac{1}{3}$$

であるから，求める円の方程式は

$$x^2-4x+y^2-2y+1-\frac{1}{3}(x^2-2x+y^2-4y+3) = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x^2+y^2-5x-y=0} \qquad \text{(答)}$$

（解答２）$C_1$ と $C_2$ の交点は $C_1$ と直線 $x-y+1=0 \Longleftrightarrow y=x+1$ の交点に他ならないので，2 式より $y$ を消去すると

$$(x-2)^2+x^2 = 4$$

$$2x^2-4x = 0$$

$$\therefore \quad x = 0,\ 2$$

であるから

$\mathrm{P}(0,\ 1),\ \mathrm{Q}(2,\ 3)$

よって，OP の垂直 2 等分線

$$y = \frac{1}{2}$$

と OQ の垂直 2 等分線

$$y = -\frac{2}{3}(x-1) + \frac{3}{2}$$

の交点が円の中心であるから，その座標は $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となる．したがって，原点と中心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ の距離は $\frac{\sqrt{26}}{2}$ となるので，求める方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}} \qquad \text{(答)}$$

## 問題

【1】(1)
$$f(x)=\int x\cos x dx$$
$$=x\sin x-\int\sin x dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

このとき，$x=0$ とすると

$$f(0)=\cos 0+C=1+C=0 \qquad \therefore\quad C=-1$$

よって

$$\boldsymbol{f(x)=x\sin x+\cos x-1} \qquad (\text{答})$$

(2) $0<x<\pi$ において $f'(x)=x\cos x$ の符号変化，すなわち $f(x)$ の増減は下表のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | 極大 | ↘ | $-2$ |

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，極大かつ最大となり，その最大値は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1} \qquad (\text{答})$$

【2】$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ とおく．

$f(-1)=0$ より

$$a-b+c=0 \ \cdots\cdots\ ①$$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin x dx=0$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2ax+b)\sin x dx=\Big[-(2ax+b)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2a\cos x dx$$
$$=\Big[-(2ax+b)\cos x+2a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$
$$\therefore\quad 2a+b=0 \ \cdots\cdots\ ②$$

さらに，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=1$ より

$$2\left[\frac{1}{3}ax^3+cx\right]_0^1=1$$
$$\therefore\quad \frac{2}{3}a+2c=1 \ \cdots\cdots\ ③$$

したがって，連立方程式①，②，③を解くと

$$a=-\frac{3}{16},\ b=\frac{3}{8},\ c=\frac{9}{16}$$

であるから，求める $f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=-\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{9}{16}} \qquad (\text{答})$$

【3】$f(x)$ は

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2 \sin t dt$$
$$= x^2 \int_0^x \sin t dt - 2x \int_0^x t \sin t dt + \int_0^x t^2 \sin t dt$$

と変形でき，微分すると

$$f'(x) = 2x \int_0^x \sin t dt + x^2 \sin x - 2 \int_0^x t \sin t dt - 2x(x \sin x) + x^2 \sin x$$
$$= 2x \Big[-\cos t\Big]_0^x - 2\left(\Big[-t \cos t\Big]_0^x + \int_0^x \cos t dt\right)$$
$$= -2x \cos x + 2x + 2x \cos x - 2\Big[\sin t\Big]_0^x$$
$$= \boldsymbol{2x - 2\sin x} \qquad (答)$$

さらに

$$f''(x) = \boldsymbol{2 - 2\cos x} \qquad (答)$$

【4】(1) (i) $a = \int_0^1 f(t) e^t \, dt$ とおくと，$f(x) = x + a$ であるから

$$a = \int_0^1 (t+a) e^t \, dt = \int_0^1 te^t \, dt + a \int_0^1 e^t \, dt$$
$$= \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt + a\Big[e^t\Big]_0^1$$
$$= e - \Big[e^t\Big]_0^1 + a(e-1)$$
$$= 1 + a(e-1)$$
$$\therefore \quad a = \frac{1}{2-e}$$

よって

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{1}{2-e}} \qquad (答)$$

(ii) $x + x\int_0^x f(t) \, dt - \int_0^x tf(t) \, dt = e^x - 1$ の両辺を $x$ で微分すると

$$1 + \int_0^x f(t) \, dt + xf(x) - xf(x) = e^x$$
$$\therefore \quad \int_0^x f(t) \, dt = e^x - 1$$

さらに，両辺を $x$ で微分して

$$\boldsymbol{f(x) = e^x} \qquad (答)$$

(2) $a = \int_0^1 tg(t) \, dt$ とおくと，$f(x) = x^2 + a$ であるから

$$g(x) = e^{-x} + x\int_0^1 (t^2 + a) \, dt$$
$$= e^{-x} + x\left[\frac{t^3}{3} + at\right]_0^1$$
$$= e^{-x} + \left(\frac{1}{3} + a\right) x$$

よって

$$
\begin{aligned}
a &= \int_0^1 tg(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(te^{-t} + \frac{t^2}{3} + at^2\right)\,dt \\
&= \Big[-te^{-t}\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{-t}dt + \left[\frac{t^3}{9} + \frac{a}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{e} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^1 + \frac{1}{9} + \frac{a}{3} \\
&= -\frac{2}{e} + \frac{10}{9} + \frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad a = \frac{5}{3} - \frac{3}{e}$$

であるから

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + \frac{5}{3} - \frac{3}{e},\ g(x) = e^{-x} + \left(2 - \frac{3}{e}\right)x} \qquad \text{(答)}$$

## １０章－１　図形と方程式（２）

### 問題

【1】(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと題意より

$$\frac{|4x-3y+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3x+4y-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$|4x-3y+3|=|3x+4y-4|$$

$$4x-3y+3=\pm(3x+4y-4)$$

$$x-7y+7=0,\ 7x+y-1=0$$

よって，点 P の軌跡は

**2 直線 $\boldsymbol{x-7y+7=0,\ \ 7x+y-1=0}$**　　(答)

(2) 直線 BC: $y=0$ と放物線 $y=x^2+3$ は共有点をもたないので，放物線上の任意の点 A に対し，A，B，C を結ぶと，三角形ができる．ここで，$\mathrm{A}(s,\ t)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，P は △ ABC の重心なので,

$$x=\frac{s+1+2}{3},\ y=\frac{t}{3}$$

$$\Longleftrightarrow s=3x-3,\ t=3y\ \cdots(*)$$

ここで，$s$ は任意の実数をとるので，$x$ も任意の実数をとる．

また，A は放物線 $y=x^2+3$ 上の点なので，$t=s^2+3\ \cdots(**)$ をみたす．

$(*)$ を $(**)$ に代入すると

$$3y=(3x-3)^2+3$$

$$y=3x^2-6x+4$$

よって，点 P の軌跡は

**放物線 $\boldsymbol{y=3x^2-6x+4}$**　　(答)

(3)

$$y=mx-4m \iff mx-y-4m=0\ \cdots(*)$$

$(*)$ と原点の距離が 1 未満であればよいので,

$$\frac{|-4m|}{\sqrt{m^2+1}}<1$$

$$|-4m|<\sqrt{m^2+1}$$

$$16m^2<m^2+1$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{15}}{15}<m<\frac{\sqrt{15}}{15}$$

このとき，$x^2+y^2=1$ と $y=mx-4m$ を連立させると

$$x^2+(mx-4m)^2=1$$

$$(1+m^2)x^2-8m^2x+16m^2-1=0$$

この 2 解を $\alpha$，$\beta$ とすると，2 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{8m^2}{1+m^2}$$

また，$\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4m^2}{1+m^2}$$

$$y = mx - 4m = m \cdot \frac{4m^2}{1+m^2} - 4m$$
$$= \frac{-4m}{1+m^2}$$
ここで，$m \fallingdotseq 0$ のとき
$$\frac{x}{y} = \frac{4m^2}{-4m} = -m \qquad \therefore\ m = -\frac{x}{y}$$
これを，$x = \dfrac{4m^2}{1+m^2}$ に代入して
$$x = \frac{4 \cdot \left(-\dfrac{x}{y}\right)^2}{1 + \left(-\dfrac{x}{y}\right)^2}$$
$$= \frac{4x^2}{y^2 + x^2}$$
ここで，$m \fallingdotseq 0$ より，$x \fallingdotseq 0$ であるので，上式を変形すると
$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$
$(x-2)^2 + y^2 = 4$ (ただし，$x \fallingdotseq 0$ より，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ は除く)

一方，$m = 0$ のとき，$x = y = 0$ であることから，求める軌跡は円 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ であるが，$-\dfrac{\sqrt{15}}{15} < m < \dfrac{\sqrt{15}}{15}$ より，$0 \leqq m^2 < \dfrac{1}{15}$ であり，
$$x = \frac{4m^2}{1+m^2} = 4 - \frac{4}{1+m^2}$$
よって，$\dfrac{15}{4} < \dfrac{4}{1+m^2} \leqq 4$ より，$0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$. これより，求める軌跡は

**円 $\boldsymbol{(x-2)^2 + y^2 = 4}$ の $\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{1}{4}}$ の部分** (答)

【2】(1) $a^2 + b^2 + a + b - 1 = 0$
$$\Longleftrightarrow (a+b)^2 - 2ab + a + b - 1 = 0$$
であるから，$X = a+b,\ Y = ab$ より
$$X^2 - 2Y + X - 1 = 0$$
$\therefore$ $\boldsymbol{Y = \frac{1}{2}(X^2 + X - 1)}$ (答)

(2) $X = a+b,\ Y = ab$ より，$a,\ b$ は $t$ の 2 次方程式
$$t^2 - Xt + Y = 0$$
の実数解として得られる．よって
$$a,\ b \text{ が実数} \Longleftrightarrow t^2 - Xt + Y = 0 \text{ が実数解をもつ}$$
$$\Longleftrightarrow X^2 - 4Y \geqq 0$$
である．したがって，点 $(X,\ Y)$ は
$$Y = \frac{1}{2}(X^2 + X - 1) \text{ かつ } X^2 - 4Y \geqq 0$$
をみたす．ここで
$$\frac{1}{2}(X^2 + X - 1) \leqq \frac{1}{4}X^2$$
$$\therefore\ -1 - \sqrt{3} \leqq X \leqq -1 + \sqrt{3}$$

以上より，求める軌跡は

**放物線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+x-1)$ の $-1-\sqrt{3}\leqq x\leqq -1+\sqrt{3}$ の部分**　　(答)

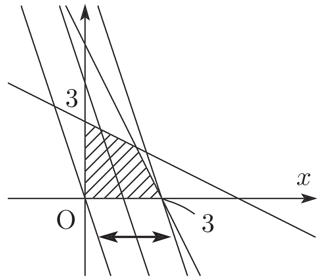
【3】(1) 4 つの不等式で表される領域を $D$ とし，$D$ を図示すると，右図のようになる．ここで

$3x+y=k \Longleftrightarrow y=-3x+k$ ……①

とおくと，①は傾き $-3$ の直線を表す．よって，① と領域 $D$ が共有点をもつ範囲で $y$ 切片 $k$ を動かすとき，その最大値・最小値は

点 $(3,\ 0)$ を通るとき，最大で，$k=9$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$k=0$



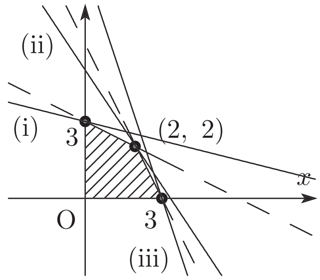

となる．よって，$0\leqq k\leqq 9$ の範囲で変化させたとき，直線①と領域 $D$ は共有点をもつので

**$0\leqq 3x+y\leqq 9$**　　(答)

(2) (1) と同様に

$ax+y=l \Longleftrightarrow y=-ax+l$ ……②

とおくと，②は傾き $-a$（負）の直線を表すので，領域 $D$ の境界の直線の傾き $-\dfrac{1}{2}$，$-2$ との大小で場合をわける．




(i) $-\dfrac{1}{2}\leqq -a \Longleftrightarrow 0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，② と $D$ が共有点をもつように動かしたときの $y$ 切片 $l$ の値は

点 $(0,\ 3)$ を通るとき，最大で，$l=3$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$l=0$

(ii) $-2<-a<-\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}<a<2$ のとき，② と $D$ が共有点をもつように動かしたときの $y$ 切片 $l$ の値は

点 $(2,\ 2)$ を通るとき，最大で，$l=2a+2$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$l=0$

(iii) $-2\geqq -a \Longleftrightarrow a\geqq 2$ のとき，② と $D$ が共有点をもつように動かしたときの $y$ 切片 $l$ の値は

点 $(3,\ 0)$ を通るとき，最大で，$l=3a$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$l=0$

以上より

**$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $0\leqq ax+y\leqq 3$**

**$\dfrac{1}{2}<a<2$ のとき $0\leqq ax+y\leqq 2a+2$**

**$a\geqq 2$ のとき $0\leqq ax+y\leqq 3a$**

となる．　　(答)

(3) $b\neq 0$ より

$ax+by=m \Longleftrightarrow y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{m}{b}$

とおき，$\dfrac{a}{b}=A$ とすると，$A>0$ であり

$$y=-Ax+\frac{m}{b}$$

となるので，(2) の結果から

$0<A \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $0 \leqq Ax+y \leqq 3$

$\dfrac{1}{2}<A<2$ のとき $0 \leqq Ax+y \leqq 2A+2$

$A \geqq 2$ のとき $0 \leqq Ax+y \leqq 3A$

すなわち

$0<\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $0 \leqq \dfrac{a}{b}x+y \leqq 3$

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$ のとき $0 \leqq \dfrac{a}{b}x+y \leqq 2\cdot\dfrac{a}{b}+2$

$\dfrac{a}{b} \geqq 2$ のとき $0 \leqq \dfrac{a}{b}x+y \leqq 3\cdot\dfrac{a}{b}$

$b>0$ なので

$\boldsymbol{0<a \leqq \dfrac{1}{2}b}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+by \leqq 3b}$

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}b<a<2b}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+by \leqq 2a+2b}$

$\boldsymbol{a \geqq 2b}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+by \leqq 3a}$

となる．　　(答)

## 問題

【1】(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2}{n^2}\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi$$
$$=\int_0^1 x\cos x^2\pi dx=\int_0^1\frac{1}{2\pi}(x^2\pi)'\cos x^2\pi dx$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi}\sin x^2\pi\right]_0^1=\mathbf{0}\qquad \text{(答)}$$

(2)

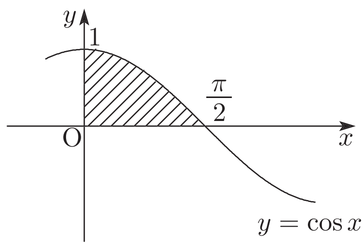
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\frac{n}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+4}{n}\cdots\frac{n+2(n-1)}{n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{n+2k}{n}=\int_0^1\log(1+2x)dx$$
$$=\left[\left(\frac{1+2x}{2}\right)\log(1+2x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+2x}{2}\cdot\frac{2}{1+2x}dx$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}\log 3-1}\qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$
$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^2$$
$$=\mathbf{\log 3}\qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $x$ 軸，$y$ 軸で囲まれた部分は右図の斜線部分のようになる．
よって，求める面積を $S$ とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}\qquad \text{(答)}$$

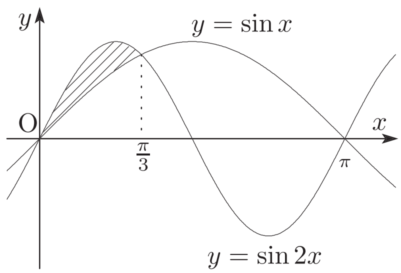



(2) $y=\sin x$ と $y=\sin 2x$ のグラフを考える．
この 2 つのグラフの $0\leqq x\leqq\pi$ における交点の $x$ 座標は方程式 $\sin x=\sin 2x$ の解なので，これを解くと

$$\sin x(2\cos x-1)=0$$

$\therefore\quad x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$

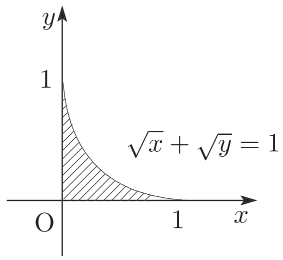
である．よって，不等式の表す領域は右図の



斜線部分のようになり，求める面積を $S$ とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\quad \text{(答)}$$

(3) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ のグラフは右図のようになる．ここで，$y\geqq 0$ のもとで，曲線の方程式は




$$y=(1-\sqrt{x})^2$$

と変形できるので，求める面積は

$$\int_0^1 ydx=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx$$
$$=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx$$
$$=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{6}}\quad \text{(答)}$$

【3】(1) $y'=\dfrac{1}{x}$ より，曲線 $y=2+\log x$ 上の点 $(t,\,2+\log t)$ における接線の方程式は

$$y-(2+\log t)=\frac{1}{t}(x-t)\qquad \therefore\quad y=\frac{1}{t}x+1+\log t$$

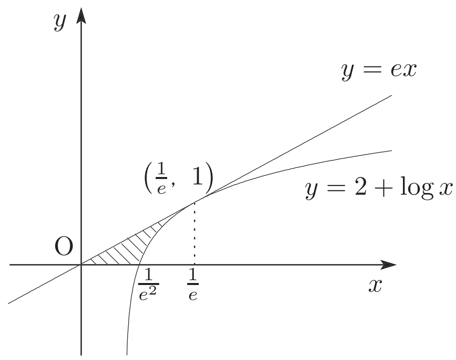
これが原点を通るから

$$1+\log t=0\qquad \therefore\quad t=\frac{1}{e}$$

よって，直線 $\ell$ の方程式は

$$\boldsymbol{y=ex}\quad \text{(答)}$$

(2) 曲線 $y=2+\log x$ と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は




$$2+\log x=0\qquad \therefore\quad x=\frac{1}{e^2}$$

であり，求める面積を $S$ とすると

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{e}\times 1-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}(2+\log x)dx$$

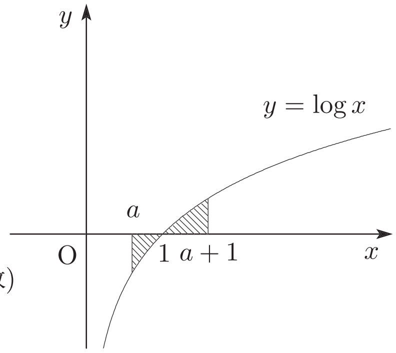
ここで

$$\int\log xdx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\log x-x+C\ (C\text{ は積分定数})$$

であるから

$$S=\frac{1}{2e}-\Big[2x+x\log x-x\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2e}-\frac{1}{e^2}}\quad \text{(答)}$$

【4】(1) $0<a<1$ より，$S(a)$ は右図の斜線部分の面積である．よって




$$S(a)=\int_a^1(-\log x)dx+\int_1^{a+1}\log x dx$$

であり，不定積分

$$\int \log x dx = x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= x\log x - x + C \ (C \text{ は積分定数})$$

より $F(x)=x\log x-x$ とおくと

$$S(a)=F(a)+F(a+1)-2F(1)$$
$$=\boldsymbol{(a+1)\log(a+1)+a\log a-2a+1} \qquad (\text{答})$$

(2) (1) より

$$S'(a)=\log(a+1)+\log a=\log a(a+1)$$

であり

$$S'(a)>0 \iff \log a(a+1)>0 \iff a(a+1)>1$$

より，$0<a<1$ における $S(a)$ の増減は下表のようになる．

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S(a)$ | | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | |

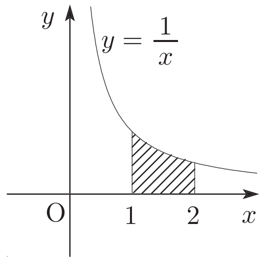
したがって，$S(a)$ は

$$\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad (\text{答})$$

のとき極小かつ最小となる．

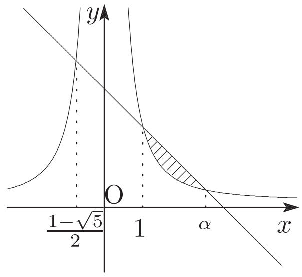
## 添削課題

【1】(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=1,\ x=2$ で囲まれる図形は右図の斜線部分のようになる．したがって，求める面積は




$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^2$$
$$=\mathbf{\log 2}\qquad\text{(答)}$$

(2) 2 曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$，$y=2-x$ の共有点の $x$ 座標は，2 式より $y$ を消去して得られる方程式




$$\frac{1}{x^2}=2-x$$
$$\therefore\quad x^3-2x^2+1=0$$
$$\therefore\quad (x-1)(x^2-x-1)=0$$

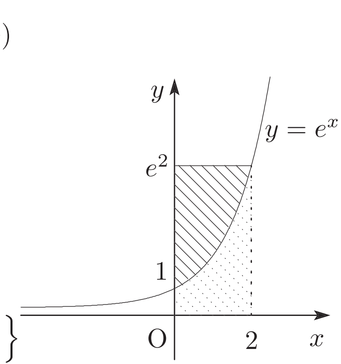
の実数解なので，これを解くと

$$x=1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ と直線 $y=2-x$ で囲まれる図形は上図の斜線部分のようになる．したがって，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，求める面積は

$$\int_1^{\alpha}\left(2-x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha}$$
$$=2\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{1}{\alpha}-\left(2-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=2\alpha-\frac{\alpha+1}{2}+\alpha-1-\frac{5}{2}$$
$$\left(\because\quad \alpha^2=\alpha+1,\ \frac{1}{\alpha}=\alpha-1\right)$$
$$=\frac{5}{2}\alpha-4$$
$$=\mathbf{\frac{5\sqrt{5}-11}{4}}\qquad\text{(答)}$$

(3) 曲線 $y=e^x$ と $y$ 軸および直線 $y=e^2$ で囲まれる図形は右図の斜線部分のようになる．したがって，求める面積は




$$2e^2-\int_0^2 e^x dx=2e^2-\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=\mathbf{e^2+1}\qquad\text{(答)}$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1+3\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$=\int_0^1(1+3x)dx=\left[x+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\mathbf{\frac{5}{2}}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1)

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

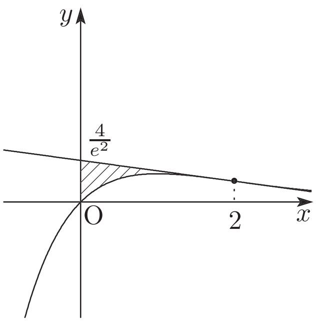
であるから，$y$ の増減および凹凸は下の表のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $\frac{2}{e^2}$ | $\searrow$ |

よって，点 $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$ は変曲点であり，この点における $C$ の接線 $\ell$ の方程式は

$$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x-2) \qquad \therefore\ \boldsymbol{y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}}$$ (答)

(2) (1) より，$C$ の概形は右図のようになり，題意の図形は右図の斜線部分である．よって，この面積は




$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} - xe^{-x}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{4}{e^2}x\right]_0^2 + \left[xe^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{-x}\,dx$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \frac{8}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \left[e^{-x}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{e^2} + \frac{1}{e^2} - 1 = \boldsymbol{\frac{9}{e^2} - 1}$$ (答)

M3MA

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

Z-KAI

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|