M3MB

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大文系数学Ｍ

問題

【1】(1) くじを 3 本引くとき，くじの引き方は全部で

$${}_{20}C_3 = 1140 \text{ 通り}$$

ある．いま，3 本ともはずれのとき，くじの引き方は

$${}_{17}C_3 = 680 \text{ 通り}$$

であるから，3 本ともはずれる確率は

$$\frac{680}{1140} = \frac{34}{57}$$

よって，少なくとも 1 本があたりである確率は

$$1 - \frac{34}{57} = \mathbf{\frac{23}{57}} \quad \text{(答)}$$

(2) くじを 4 本引くとき，くじの引き方は全部で

$${}_{20}C_4 = 4845 \text{ 通り}$$

ある．いま，当たりくじを 3 本引くとき，くじの引き方は

$${}_{3}C_3 \times {}_{17}C_1 = 17 \text{ 通り}$$

よって，当たりくじを 3 本引く確率は

$$\frac{17}{4845} = \frac{1}{285}$$

であるから，当たりくじが 2 本以下である確率は

$$1 - \frac{1}{285} = \mathbf{\frac{284}{285}} \quad \text{(答)}$$

【2】(1) 白球 3 個，赤球 2 個，黒球 1 個を横一列に並べ，左から順に球を取り出すと考える．つまり，黒球の左側に並んだ球が取り出される．

このとき，球の並べ方は

$$\frac{6!}{3!2!} = 60 \text{ 通り}$$

ある．赤球をちょうど 2 個取り出すのは，黒球の左側に赤球が 2 つあるときであり，黒球の左側に白球がいくつあるかで場合を分けると

白球 0 個のとき，1 通り

白球 1 個のとき，$\frac{3!}{2!} = 3$ 通り

白球 2 個のとき，$\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

白球 3 個のとき，$\frac{5!}{3!2!} = 10$ 通り

であるから，求める確率は

$$\frac{1+3+6+10}{60} = \mathbf{\frac{1}{3}} \quad \text{(答)}$$

(2) 赤球より白球が多く含まれているのは

(赤 0，白 1) − 黒 − (赤 2，白 2) : $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通り

(赤 0，白 2) − 黒 − (赤 2，白 1) : $\frac{3!}{2!} = 3$ 通り

(赤 0，白 3) − 黒 − (赤 2，白 0) : 1 通り

(赤 1，白 2) − 黒 − (赤 1，白 1) : $\dfrac{3!}{2!} \times 2! = 6$ 通り

(赤 1，白 3) − 黒 − (赤 1，白 0) : $\dfrac{4!}{3!} = 4$ 通り

(赤 2，白 3) − 黒 − (赤 0，白 0) : $\dfrac{5!}{2!3!} = 10$ 通り

の場合であるから，求める確率は

$$\frac{6+3+1+6+4+10}{60} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad (答)$$

【3】 (i) $n = 1$ のとき.

3 の目がでればよいので，求める確率は $\dfrac{1}{6}$

(ii) $n \geqq 2$ のとき，出る目に関して，以下の場合が考えられる.

① 3 の目が 1 個，他は全て 1 の目が出る

② 2 の目が 2 個，他は全て 1 の目が出る

① のとき，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{6^n}$$

② のとき，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{6^n}$$

①，② は排反なので，求める確率は

$$\frac{n}{6^n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{6^n} = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 6^n} \quad \cdots (*)$$

ここで，$(*)$ に $n = 1$ を代入すると

$$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

となり，(i) の場合もみたす．以上より，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2 \cdot 6^n}} \qquad (答)$$

【4】 (1) 硬貨を 6 回投げたとき，表が a 回，裏が b 回出るとすると

$$a + b = 6$$

であり，点 P の x 座標は

$$x = a - b$$

と表せる．6 回目の移動で点 P が原点に戻るのは

$$a + b = 6 \text{ かつ } a - b = 0$$

$$\therefore \quad a = b = 3$$

のときである．何回目に表が出るかで ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りあるので，求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{5}{16}} \qquad (答)$$

(2) 2 回の移動で原点に戻る確率は

$${}_2\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

4 回の移動で原点に戻る確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

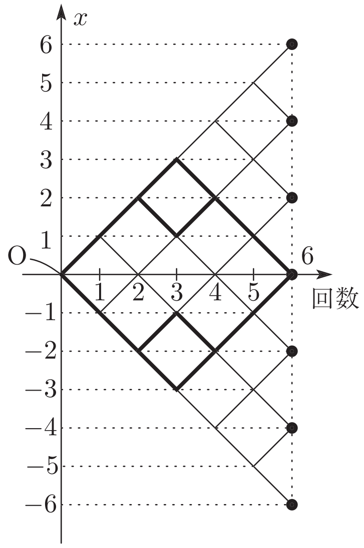
よって，求める確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{16}} \qquad \text{(答)}$$

(3) x 座標を縦軸とし，硬貨を投げる回数を横軸として，点 P の移動をグラフに表すと右図のようになる．

よって，6 回目の移動で点 P が初めて原点に戻るのは右図の太線部分のように変化するときなので求める確率は

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\boldsymbol{\frac{1}{16}} \qquad \text{(答)}$$



【5】(1) p_k の定義より

$$p_k={}_{101}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{101-k}=\frac{101!}{(101-k)!k!}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{101-k}$$

であるので

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{\dfrac{101!}{(101-k)!k!}}{\dfrac{101!}{(102-k)!(k-1)!}}\cdot\frac{\left(\dfrac{1}{6}\right)^k\left(\dfrac{5}{6}\right)^{101-k}}{\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{102-k}}$$

$$=\frac{102-k}{k}\cdot\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{102-k}{5k}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{p_k}{p_{k-1}}>1$ を解くと

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{102-k}{5k}>1$$

$$102-k>5k \quad (\because \quad 1\leqq k\leqq 101)$$

$$k<17$$

よって，$k=1$，2，$\cdots$，16 で，$\dfrac{p_k}{p_{k-1}}>1$ すなわち $p_{k-1}<p_k$

一方

$\dfrac{p_k}{p_{k-1}}=1$ を解くと，$k=17$ であるので，$k=17$ のとき，$p_{k-1}=p_k$

$\dfrac{p_k}{p_{k-1}}<1$ を解くと，$k>17$ であるので，$k=18$，19，$\cdots$，101 のとき，$p_{k-1}>p_k$

以上をまとめると

$$p_0<p_1<\cdots<p_{15}<p_{16}=p_{17}>p_{18}>\cdots>p_{101}$$

よって，p_k を最大にする k は

$\boldsymbol{k=16,\ 17}$ (答)

９章　図形と方程式（１）

問題

【1】点 A，B，C における接線の方程式は

$x=5$ ……①

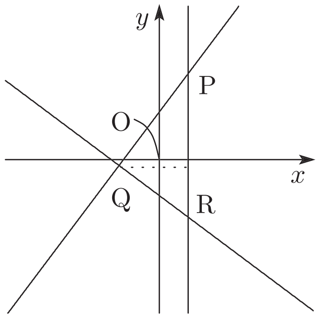
$-4x+3y=25$ ……②

$-3x-4y=25$ ……③

であり，①と②，②と③，③と①の交点を順に P，Q，R とすると

P(5, 15)，Q(−7, −1)，R(5, −10)　（答）

また，3 角形 PQR の面積は



■**解答 1**　PR を底辺とみると，求める面積は

$\frac{1}{2}(15+10)\cdot\{5-(-7)\}=\mathbf{150}$　（答）

■**解答 2**　②，③の法線ベクトルは $(-4,\ 3)$，$(-3,\ -4)$ であり，内積が

$(-4,\ 3)\cdot(-3,\ -4)=0$

すなわち，2 直線②，③は直交する．したがって，求める面積は

$\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+16^2}\sqrt{12^2+9^2}=\mathbf{150}$　（答）

■**解答 3**　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-12,\ -16)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(0,\ -25)$ であるから

$\frac{1}{2}\left|(-12)\cdot(-25)-(-16)\cdot 0\right|=\mathbf{150}$　（答）

【2】(1) 円 C の中心 A$(-3, 2)$ と直線 $l: ax-y+2a+1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{\left|-3a+2\cdot(-1)+2a+1\right|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$$

C と l が異なる 2 点で交わるためには

$$d<(\text{円 }C\text{ の半径})\iff\frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}<2$$

$$\iff|a+1|<2\sqrt{a^2+1}$$

$$\iff(a+1)^2<4(a^2+1)\ \cdots\cdots\ ①$$

であることが必要十分条件であり，①が成り立つことを示す．

$$4(a^2+1)-(a+1)^2=3a^2-2a+3$$

$$=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$$

であり，①が成り立つ．

以上より，l は a の値に関係なく，C と異なる 2 点で交わる．（証終）

(2) l が C によって切り取られる線分の長さを L とすると，3 平方の定理より

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2=4-d^2$$

$$\therefore\quad L^2=16-4d^2=16-4\cdot\frac{(a+1)^2}{a^2+1}=12-\frac{8a}{a^2+1}$$

であるから，$\frac{8a}{a^2+1}$ のとり得る値の範囲を調べる．

$a \fallingdotseq 0$ のもとで

$$\frac{8a}{a^2+1}=\frac{8}{a+\frac{1}{a}}$$

と変形でき，$a>0$ のとき，相加・相乗平均の関係より

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

（等号成立は $a=1$ のとき）

すなわち

$$(0<)\frac{8a}{a^2+1}=\frac{8}{a+\frac{1}{a}} \leqq 4$$

また，$a<0$ のとき，$-a>0$，$-\frac{1}{a}>0$ なので相加・相乗平均の関係より

$$-a+\left(-\frac{1}{a}\right) \geqq 2\sqrt{(-a)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=2$$

（等号成立は $a=-1$ のとき）

すなわち

$$-4 \leqq \frac{8a}{a^2+1}=\frac{8}{a+\frac{1}{a}}(<0)$$

$a=0$ のとき，$\frac{8a}{a^2+1}=0$ なので，まとめると

$$-4 \leqq \frac{8a}{a^2+1} \leqq 4$$

したがって，L は $\frac{8a}{a^2+1}=-4$ すなわち $a=-1$ のとき最大で，その最大値は

4　(答)

また，L は $\frac{8a}{a^2+1}=4$ すなわち $a=1$ のとき最小で，その最小値は

$\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$　(答)

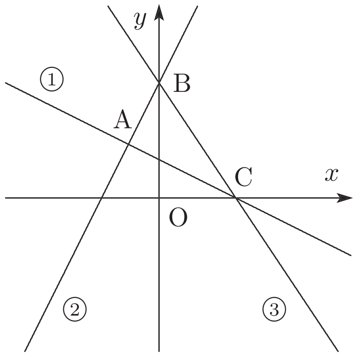
【3】3 直線を

$ax+y-a=0$ …… ①

$x-ay+a(a+1)=0$ …… ②

$(a+1)x+y-a-1=0$ …… ③

とおく．①と②，②と③，③と①の交点を A，B，C とすると



$$\mathrm{A}\left(-\frac{a}{1+a^2},\ \frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)$$

$\mathrm{B}(0,\ a+1)$

$\mathrm{C}(1,\ 0)$

である．

■**解答 1**　ベクトルを用いる．

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(-\frac{a^2+a+1}{1+a^2},\ \frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-1,\ a+1)$

であるから，求める面積 S は

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left| -\frac{a^2+a+1}{1+a^2}\cdot(a+1) - \left(\frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)\cdot(-1) \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \frac{(a^2+a+1)(-a-1+a)}{1+a^2} \right|$$

$$= \boldsymbol{\frac{a^2+a+1}{2a^2+2}} \quad (答)$$

■解答 2　①の法線ベクトルは $(a,\ 1)$ であり，②の法線ベクトルは $(1,\ -a)$ であり，この 2 つのベクトルの内積について

$(a,\ 1)\cdot(1,\ -a) = a - a = 0$

であるから，$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$

よって

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\left(-\frac{a}{1+a^2}\right)^2 + \left\{\frac{a^3+a^2+a}{1+a^2} - (a+1)\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \frac{1}{(1+a^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\left(-\frac{a}{1+a^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{a^3+a^2+a}{1+a^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2 + a^2(a^2+a+1)^2}{(1+a^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2}{1+a^2}} = \frac{a^2+a+1}{\sqrt{1+a^2}}$$

よって

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \boldsymbol{\frac{a^2+a+1}{2a^2+2}} \quad (答)$$

【4】(1) 円 C の中心 $\mathrm{A}(0,\, 2)$ と直線 $l : 2x - y + a = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|0\cdot 2 - 1\cdot 2 + a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a-2|}{\sqrt{5}}$$

よって，円 C と直線 l が共有点をもつための条件は

$d \leqq$（円 C の半径）

$$\therefore\ \frac{|a-2|}{\sqrt{5}} \leqq 3$$

$$\therefore\ |a-2| \leqq 3\sqrt{5}$$

$$\therefore\ -3\sqrt{5} \leqq a-2 \leqq 3\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{2-3\sqrt{5} \leqq a \leqq 2+3\sqrt{5}} \quad (答)$$

(2) l が C によって切り取られる線分の長さを L とすると，3 平方の定理より

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 9 - d^2$$

$$\therefore \quad d^2 = 9 - \frac{L^2}{4} = 9 - 5 = 4 \quad (\because \quad L = 2\sqrt{5})$$

$$\therefore \quad d = 2$$

のときであるから，(1) より

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{5}} = 2$$

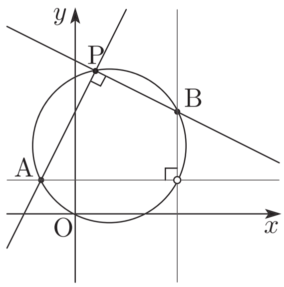
$$\therefore \quad \boldsymbol{a = 2 \pm 2\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

１０章　図形と方程式（２）

問題

【1】(1)　$ax-y-3a+3=0 \iff a(x-3)-y+3=0$

$x+ay-a+1=0 \iff x+1+a(y-1)=0$



より，$ax-y-3a+3=0$ は定点 B(3, 3) を通る直線，$x+ay-a+1=0$ は定点 A(−1, 1) を通る直線である．また，$a=0$ のとき，2 直線の方程式は

$y=3,\ x=-1$

となり互いに垂直である．

$a \fallingdotseq 0$ のとき 2 直線 $x+ay-a+1=0$, $ax-y-3a+3=0$ の傾きはそれぞれ $-\dfrac{1}{a}$, a であり

$$-\frac{1}{a}\cdot a=-1$$

なので，$a \fallingdotseq 0$ のときも，2 直線は互いに垂直である．

よって，点 P は A, B を直径の両端とする円周

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

上にあるが，直線 $x+ay-a+1=0$ は x 軸に平行になることはなく，直線 $ax-y-3a+3=0$ は y 軸に平行になることはないので，この円周上の点で直線 $y=1$ と直線 $x=3$ の交点 (3, 1) は除かれる．よって，求める点 P の軌跡は

円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ から点 (3, 1) を除いた図形　(答)

(2) P と l の方程式から y を消去する

$$x^2=ax-a+2 \qquad \therefore\ \ x^2-ax+a-2=0 \ \cdots\cdots\ (*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$D=a^2-4a+8=(a-2)^2+4>0$$

であるから，2 次方程式 $(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつ．すなわち，C と l は異なる 2 点で交わる．（証終）

$(*)$ の 2 解を α, β とすると

$$\mathrm{A}(\alpha,\ a\alpha-a+2),\ \ \mathrm{B}(\beta,\ a\beta-a+2)$$

とおけて，M$(X,\ Y)$ とおくと，M は線分 AB の中点なので

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \ Y=\frac{a(\alpha+\beta)}{2}-a+2$$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=a$ であるから

$$X=\frac{a}{2},\ Y=\frac{a^2}{2}-a+2$$

$$\therefore\ \ Y=\frac{(2X)^2}{2}-2X+2=2X^2-2X+2$$

よって，求める点 M の軌跡は

放物線 $y=2x^2-2x+2$　(答)

【2】領域 D は点 A$(2,\ 1)$ を中心とし，半径 1 の円周および内部であり，図示すると右図のようになる（境界はすべて含む）．ここで

$x+y=k$ ……①

とおくと，①は傾き -1 の直線を表し，この直線が領域 D と共有点をもつための条件は

$$\frac{|1\cdot 2+1\cdot 1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq 1$$

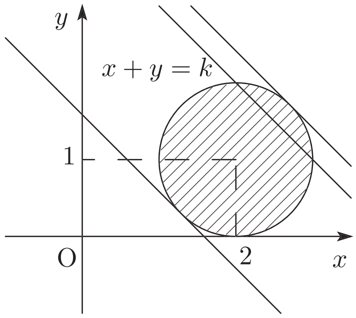
$\therefore\ \ |3-k|\leqq\sqrt{2}$

$\therefore\ \ -\sqrt{2}\leqq 3-k\leqq\sqrt{2}$

$\therefore\ \ 3-\sqrt{2}\leqq k\leqq 3+\sqrt{2}$

すなわち

$\boldsymbol{3-\sqrt{2}\leqq x+y\leqq 3+\sqrt{2}}$ （答）



次に

$\dfrac{y}{x}=m\Longleftrightarrow y=mx$ ……②

とおくと，②は原点 O を通り傾き m の直線なので，この直線が領域 D と共有点をもつための条件は

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\leqq 1$$

$\therefore\ \ |2m-1|\leqq\sqrt{m^2+1}$

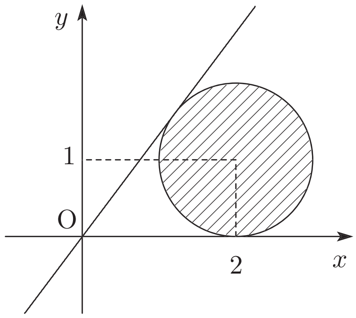
両辺非負なので，2 乗して

$4m^2-4m+1\leqq m^2+1$

$\therefore\ \ m(3m-4)\leqq 0$ すなわち $0\leqq m\leqq\dfrac{4}{3}$

よって

$\boldsymbol{0\leqq\dfrac{y}{x}\leqq\dfrac{4}{3}}$ （答）



また

$x^2+y^2=r$ ……③

とおくと，$x^2\geqq 0$, $y^2\geqq 0$ より，$r\geqq 0$ であり，③は原点 O を中心とする半径 $\sqrt{r}$ の円（$r=0$ のときは原点 O）である．

よって，この円が領域 D と共有点をもつための条件は

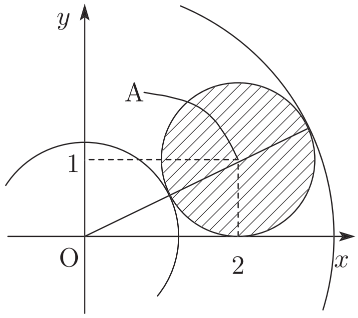
$\mathrm{OA}-1\leqq\sqrt{r}\leqq\mathrm{OA}+1$

$\therefore\ \ \sqrt{5}-1\leqq\sqrt{r}\leqq\sqrt{5}+1$

$\therefore\ \ 6-2\sqrt{5}\leqq r\leqq 6+2\sqrt{5}$

よって

$\boldsymbol{6-2\sqrt{5}\leqq x^2+y^2\leqq 6+2\sqrt{5}}$ （答）



【3】(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと題意より

$$\frac{|4x-3y+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3x+4y-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$|4x-3y+3|=|3x+4y-4|$$

$$4x-3y+3=\pm(3x+4y-4)$$

$$x-7y+7=0,\ 7x+y-1=0$$

よって，点 P の軌跡は

2 直線 $\boldsymbol{x-7y+7=0,\ \ 7x+y-1=0}$ (答)

(2) 直線 BC: $y=0$ と放物線 $y=x^2+3$ は共有点をもたないので，放物線上の任意の点に対し，A，B，C を結ぶと，三角形ができる．ここで，$\mathrm{A}(s,\ t)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，P は△ ABC の重心なので，

$$x=\frac{s+1+2}{3},\ y=\frac{t}{3}$$

$$\Longleftrightarrow s=3x-3,\ t=3y\ \cdots(*)$$

ここで，s は任意の実数をとるので，x も任意の実数をとる．

また，A は放物線 $y=x^2+3$ 上の点なので，$t=s^2+3\ \cdots(**)$ をみたす．

$(*)$ を $(**)$ に代入すると

$$3y=(3x-3)^2+3$$

$$y=3x^2-6x+4$$

よって，点 P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=3x^2-6x+4}$ (答)

(3) $y=mx-4m \iff mx-y-4m=0\ \cdots(*)$

$(*)$ と原点の距離が 1 未満であればよいので，

$$\frac{|-4m|}{\sqrt{m^2+1}}<1$$

$$|-4m|<\sqrt{m^2+1}$$

$$16m^2<m^2+1$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{15}}{15}<m<\frac{\sqrt{15}}{15}$$

このとき，$x^2+y^2=1$ と $y=mx-4m$ を連立させると

$$x^2+(mx-4m)^2=1$$

$$(1+m^2)x^2-8m^2x+16m^2-1=0$$

この 2 解を α，β とすると，2 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{8m^2}{1+m^2}$$

また，$\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4m^2}{1+m^2}$$

$$y=mx-4m=m\cdot\frac{4m^2}{1+m^2}-4m$$

$$=\frac{-4m}{1+m^2}$$

ここで，$m \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{x}{y} = \frac{4m^2}{-4m} = -m \qquad \therefore\ m = -\frac{x}{y}$$

これを，$x = \dfrac{4m^2}{1+m^2}$ に代入して

$$x = \frac{4 \cdot \left(-\dfrac{x}{y}\right)^2}{1 + \left(-\dfrac{x}{y}\right)^2} = \frac{4x^2}{y^2 + x^2}$$

ここで，$m \fallingdotseq 0$ より，$x \fallingdotseq 0$ であるので，上式を変形すると

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ (ただし，$x \fallingdotseq 0$ より，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ は除く)

一方，$m = 0$ のとき，$x = y = 0$ であることから，求める軌跡は円 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ であるが，$-\dfrac{\sqrt{15}}{15} < m < \dfrac{\sqrt{15}}{15}$ より，$0 \leqq m^2 < \dfrac{1}{15}$ であり，

$$x = \frac{4m^2}{1+m^2} = 4 - \frac{4}{1+m^2}$$

よって，$\dfrac{15}{4} < \dfrac{4}{1+m^2} \leqq 4$ より，$0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$．これより，求める軌跡は

円 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ の $0 \leqq x < \dfrac{1}{4}$ の部分　　(答)

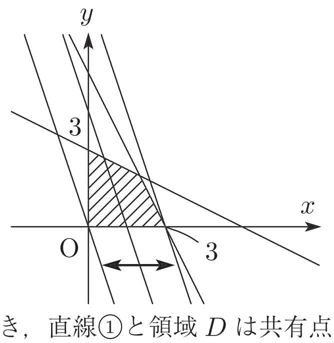
【4】(1) 4 つの不等式で表される領域を D とし，D を図示すると，右図のようになる．ここで

$3x + y = k \iff y = -3x + k$ $\cdots\cdots$ ①

とおくと，①は傾き -3 の直線を表す．よって，① と領域 D が共有点をもつ範囲で y 切片 k を動かすとき，その最大値・最小値は

点 $(3,\ 0)$ を通るとき，最大で，$k = 9$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$k = 0$



となる．よって，$0 \leqq k \leqq 9$ の範囲で変化させたとき，直線①と領域 D は共有点をもつので

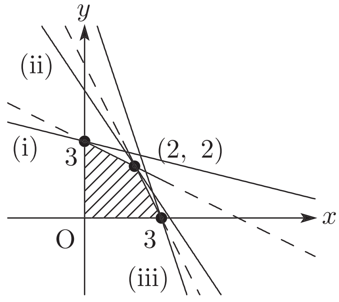
$0 \leqq 3x + y \leqq 9$　　(答)

(2) (1) と同様に

$ax + y = l \iff y = -ax + l$ $\cdots\cdots$ ②

とおくと，②は傾き $-a$（負）の直線を表すので，領域 D の境界の直線の傾き $-\dfrac{1}{2}$，-2 との大小で場合をわける．

(i) $-\dfrac{1}{2} \leqq -a \iff 0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，② と D が共有点をもつように動かしたときの



y 切片 l の値は

点 $(0,\ 3)$ を通るとき，最大で，$l=3$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$l=0$

(ii) $-2<-a<-\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2}<a<2$ のとき，② と D が共有点をもつように動かしたときの y 切片 l の値は

点 $(2,\ 2)$ を通るとき，最大で，$l=2a+2$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$l=0$

(iii) $-2 \geqq -a \iff a \geqq 2$ のとき，② と D が共有点をもつように動かしたときの y 切片 l の値は

点 $(3,\ 0)$ を通るとき，最大で，$l=3a$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき，最小で，$l=0$

以上より

$\boldsymbol{0<a \leqq \dfrac{1}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+y \leqq 3}$

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a<2}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+y \leqq 2a+2}$

$\boldsymbol{a \geqq 2}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+y \leqq 3a}$

となる.　　(答)

(3) $b \fallingdotseq 0$ より

$$ax+by=m \iff y=-\frac{a}{b}x+\frac{m}{b}$$

とおき，$\dfrac{a}{b}=A$ とすると，$A>0$ であり

$$y=-Ax+\frac{m}{b}$$

となるので，(2) の結果から

$0<A \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $0 \leqq Ax+y \leqq 3$

$\dfrac{1}{2}<A<2$ のとき $0 \leqq Ax+y \leqq 2A+2$

$A \geqq 2$ のとき $0 \leqq Ax+y \leqq 3A$

すなわち

$0<\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $0 \leqq \dfrac{a}{b}x+y \leqq 3$

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$ のとき $0 \leqq \dfrac{a}{b}x+y \leqq 2\cdot\dfrac{a}{b}+2$

$\dfrac{a}{b} \geqq 2$ のとき $0 \leqq \dfrac{a}{b}x+y \leqq 3\cdot\dfrac{a}{b}$

$b>0$ なので

$\boldsymbol{0<a \leqq \dfrac{1}{2}b}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+by \leqq 3b}$

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}b<a<2b}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+by \leqq 2a+2b}$

$\boldsymbol{a \geqq 2b}$ **のとき** $\boldsymbol{0 \leqq ax+by \leqq 3a}$

となる.　　(答)

添削課題

【1】(1) 点 P を $(X,\ Y)$ とおき, P を通る直線を $y=m(x-X)+Y$ とする.

これが $y=x^2$ と接するので, 2 式より y を消去して得られる x の 2 次方程式

$x^2-mx+mX-Y=0$ ······ ①

が重解をもち, ①の判別式を D とおくと

$D=m^2-4(mX-Y)=0$ ······ ②

②の解を $m_1,\ m_2$ とすると

$m_1+m_2=4X,\quad m_1m_2=4Y$

2 つの接線が直交するということは, $m_1m_2=-1$ が必要十分条件である.

よって, 求める軌跡は

$4Y=-1$ $\qquad\therefore$ **直線** $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}}$ $\qquad$(答)

である.

(2) x 軸に接し, さらに, この円は $(0,\ -3)$ を中心とする円に外接するので, 円の中心を $(a,\ b)$ とすれば, $b<0$ で半径は $-b$ である. 円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

とおけ, この円が, さらに

円 : $x^2+(y+3)^2=1$

と外接するので, (中心間の距離) = (半径の和) より

$\sqrt{a^2+(b+3)^2}=-b+1$

両辺正なので 2 乗して, 整理すると

$-8b=a^2+8$ $\qquad\therefore\quad b=-\dfrac{1}{8}a^2-1$

よって, 求める軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{8}x^2-1}$ $\qquad$(答)

である.

(3) 2 直線を

$$\begin{cases} x+ay-1=0 & \cdots\cdots\ ① \\ ax-y-1=0 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

とおく. ① + ② × a より

$(1+a^2)x=a+1$ $\qquad\therefore\quad x=\dfrac{a+1}{a^2+1}$

したがって

$$y=ax-1=\frac{a^2+a}{a^2+1}-1=\frac{a-1}{a^2+1}$$

$$\therefore\quad x-y=\frac{2}{a^2+1}>0$$

$$\therefore\quad \frac{x}{x-y}=\frac{a+1}{2}$$

これから

$$a=\frac{2x}{x-y}-1=\frac{x+y}{x-y}$$

$x+\dfrac{x+y}{x-y}\cdot y-1=0$ より

$$x^2-xy+xy+y^2-x+y=0$$

$\therefore\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

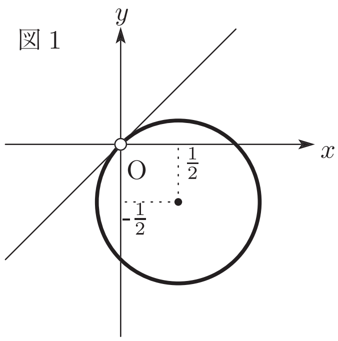
ただし，$x-y>0$ より，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ を除く．

したがって，求める軌跡は

円 $\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}}$ の $\boldsymbol{(0,\ 0)}$ 以外の部分

である．

図 1



【2】〔I〕

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq -x+5 \\ y \leqq 2x-1 \end{cases}$$

各交点を図のように A, B, C とおくと

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{B}(2,\ 3),\ \mathrm{C}(5,\ 0)$$

となり, 不等式をみたす領域は, 図 1 の斜線部分となる (境界含む).

$k=\dfrac{1}{2}x+y$ より

$$y=-\frac{1}{2}x+k \quad \cdots ①$$

①は y 切片 k, 傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線である．

よって, ①が斜線部分との共有点をもつような k の範囲を調べればよい．

図 1 より, 点 B を通るときから, 点 A を通るときまでなので

(i) 点 B を通るとき

$$k=\frac{1}{2}\cdot 2+3=4$$

(ii) 点 A を通るとき

$$k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0=\frac{1}{4}$$

よって

最大値 4, 最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ (答)

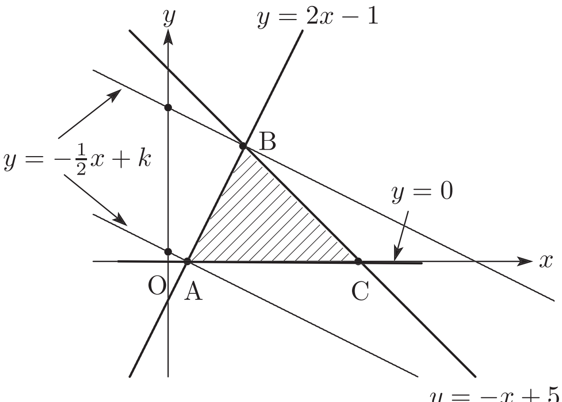
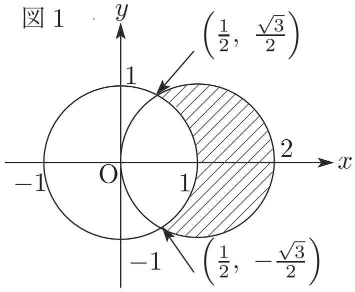


図 1

〔II〕

(1) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ x^2+y^2 \leqq 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ (x-1)^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$

より, 求める領域は**右図の斜線部分**のようになる．ただし, **境界はすべて含む**．　(答)



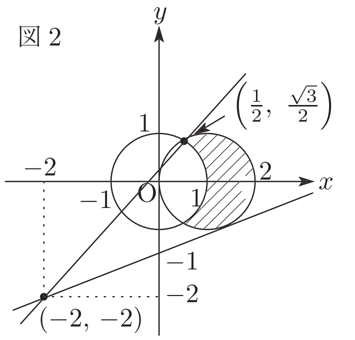
(2) (1) の領域より, $x \neq -2$ である．

すると，$k=\dfrac{y+2}{x+2} \iff y=k(x+2)-2$

と変形でき，これは $(-2,\ -2)$ を通る傾き k の直線に他ならない．

右上図より $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るとき k の値は最大であり, $(x-1)^2+y^2=1$ に接するとき最小である．よって，k の最大値は

$$k=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+2}{\frac{1}{2}+2}=\frac{\sqrt{3}+4}{5}$$



次に接するときの k の値を求める．2 式より y を消去して得られる方程式

$$x^2+\{k(x+2)-2\}^2-2x=0$$

$$\therefore \quad (1+k^2)x^2+2(2k^2-2k-1)x+4k^2-8k+4=0$$

が重解をもつのは，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=(2k^2-2k-1)^2-(k^2+1)(4k^2-8k+4)=-8k^2+12k-3 \ =0$$

$$\therefore \quad k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

図より，$0<k<\dfrac{1}{2}$ なので

$$k=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

よって

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5}}$**, 最小値** $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}}$　(答)

M3MB

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大文系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	