3MJSS/3MJS/3MJ

本科１期６月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中３選抜東大・医学部数学

中３数学

中３東大数学

８章　２次関数（５）－２次関数と２次方程式－

問題

【1】(1) $y = 2x^2 - x - 1$ に $y = 0$ を代入すると，

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$D > 0$ なので，x 軸との共有点は **2** 個.

(2) $y = -x^2 + 3x - 7$ に $y = 0$ を代入すると，

$$-x^2 + 3x - 7 = 0$$
$$x^2 - 3x + 7 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -19$$

$D < 0$ なので，x 軸との共有点は **0** 個.

(3) $y = 2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$ に $y = 0$ を代入すると，

$$2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$$

$\dfrac{D}{4} = 0$ なので，
x 軸との共有点は **1** 個.

(4) $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 5x - 25$ に $y = 0$ を代入すると，

$$-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25 = 0$$
$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4} = (-10)^2 - 1 \cdot 100 = 0$$

$\dfrac{D}{4} = 0$ なので，
x 軸との共有点は **1** 個.

(5) $y = -\dfrac{5}{3}x^2 + x - \dfrac{2}{3}$ に $y = 0$ を代入すると，

$$-\frac{5}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} = 0$$
$$5x^2 - 3x + 2 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31$$

$D < 0$ なので，x 軸との共有点は **0** 個.

(6) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{6}$ に $y = 0$ を代入すると，

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$$
$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4$$

$\dfrac{D}{4} > 0$ なので，
x 軸との共有点は **2** 個.

【2】(1) $y=x^2+7x+2$, $y=2x-1$ から y を消去して，

$$\begin{aligned} x^2+7x+2&=2x-1 \\ x^2+5x+3&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=5^2-4\cdot1\cdot3=13$$

$D>0$ なので，共有点は **2 個**.

(2) $y=-x^2+5x-12$, $y=3x-4$ から y を消去して，

$$\begin{aligned} -x^2+5x-12&=3x-4 \\ x^2-2x+8&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot8=-7$$

$\dfrac{D}{4}<0$ だから，共有点は **0 個**.

(3) $y=2x^2-x+\dfrac{3}{2}$, $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ から y を消去して，

$$\begin{aligned} 2x^2-x+\frac{3}{2}&=-\frac{3}{2}x+1 \\ 4x^2-2x+3&=-3x+2 \\ 4x^2+x+1&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=1^2-4\cdot4\cdot1=-15$$

$D<0$ だから，共有点は **0 個**.

(4) $y=-x^2-\dfrac{3}{2}x+1$, $y=-2x+\dfrac{5}{4}$ から y を消去して，

$$\begin{aligned} -x^2-\frac{3}{2}x+1&=-2x+\frac{5}{4} \\ -4x^2-6x+4&=-8x+5 \\ 4x^2-2x+1&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\cdot1=-3$$

$\dfrac{D}{4}<0$ だから，共有点は **0 個**.

(5) $y=2x^2-2x$, $y=2x-2$ から y を消去して，

$$\begin{aligned} 2x^2-2x&=2x-2 \\ 2x^2-4x+2&=0 \\ x^2-2x+1&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$$

$\dfrac{D}{4}=0$ だから，共有点は **1 個**.

(6) $y=-\dfrac{2}{3}x^2+2x+3$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ から y を消去して，

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x^2+2x+3&=-\frac{1}{3}x+2 \\ -2x^2+6x+9&=-x+6 \\ 2x^2-7x-3&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-3)=73$$

$D>0$ だから，共有点は **2 個**.

【3】(1) $y = x^2 - 2x + k$ に $y = 0$ を代入すると，

$$x^2 - 2x + k = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot k = 1 - k$$

よって，

(i) $\frac{D}{4} = 1 - k > 0$ すなわち $k < 1$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\frac{D}{4} = 1 - k = 0$ すなわち $k = 1$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\frac{D}{4} = 1 - k < 0$ すなわち $k > 1$ のとき，共有点は 0 個

以上から，共有点の個数は，

$k < 1$ のとき, 共有点は 2 個
$k = 1$ のとき, 共有点は 1 個
$k > 1$ のとき, 共有点は 0 個

(2) $y = -x^2 + x + k$ に $y = 0$ を代入すると，

$$-x^2 + x + k = 0$$
$$x^2 - x - k = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 1 + 4k$$

よって，

(i) $D = 1 + 4k > 0$ すなわち $k > -\frac{1}{4}$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $D = 1 + 4k = 0$ すなわち $k = -\frac{1}{4}$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $D = 1 + 4k < 0$ すなわち $k < -\frac{1}{4}$ のとき，共有点は 0 個

以上から，共有点の個数は，

$k > -\frac{1}{4}$ のとき, 共有点は 2 個
$k = -\frac{1}{4}$ のとき, 共有点は 1 個
$k < -\frac{1}{4}$ のとき, 共有点は 0 個

(3) $y=2x^2-4x+k-1$ に $y=0$ を代入すると，

$$2x^2-4x+k-1=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(k-1)=-2k+6$$

よって，

(i) $\dfrac{D}{4}=-2k+6>0$ すなわち $k<3$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\dfrac{D}{4}=-2k+6=0$ すなわち $k=3$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\dfrac{D}{4}=-2k+6<0$ すなわち $k>3$ のとき，共有点は 0 個

以上から，共有点の個数は，

$k<3$ のとき，共有点は 2 個
$k=3$ のとき，共有点は 1 個
$k>3$ のとき，共有点は 0 個

(4) $y=-\dfrac{1}{2}x^2-x+3-k$ に $y=0$ を代入すると，

$$-\frac{1}{2}x^2-x+3-k=0$$
$$x^2+2x-6+2k=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-6+2k)=-2k+7$$

よって，

(i) $\dfrac{D}{4}=-2k+7>0$ すなわち $k<\dfrac{7}{2}$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\dfrac{D}{4}=-2k+7=0$ すなわち $k=\dfrac{7}{2}$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\dfrac{D}{4}=-2k+7<0$ すなわち $k>\dfrac{7}{2}$ のとき，共有点は 0 個

以上から，共有点の個数は，

$k<\dfrac{7}{2}$ のとき，共有点は 2 個
$k=\dfrac{7}{2}$ のとき，共有点は 1 個
$k>\dfrac{7}{2}$ のとき，共有点は 0 個

【4】(1) $y=x^2+k$, $y=2x-3$ から y を消去すると，

$$x^2+k=2x-3$$
$$x^2-2x+k+3=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k+3)=-k-2$$

よって，

(i) $\dfrac{D}{4}=-k-2>0$ すなわち $k<-2$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\dfrac{D}{4}=-k-2=0$ すなわち $k=-2$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\dfrac{D}{4}=-k-2<0$ すなわち $k>-2$ のとき，共有点は 0 個

したがって，

$k<-2$ のとき, 共有点は 2 個
$k=-2$ のとき, 共有点は 1 個
$k>-2$ のとき, 共有点は 0 個

(2) $y=x^2+2x-2$, $y=-2x+k$ から y を消去すると，

$$x^2+2x-2=-2x+k$$
$$x^2+4x-2-k=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-2-k)=k+6$$

よって，

(i) $\dfrac{D}{4}=k+6>0$ すなわち $k>-6$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $\dfrac{D}{4}=k+6=0$ すなわち $k=-6$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $\dfrac{D}{4}=k+6<0$ すなわち $k<-6$ のとき，共有点は 0 個

したがって，

$k>-6$ のとき, 共有点は 2 個
$k=-6$ のとき, 共有点は 1 個
$k<-6$ のとき, 共有点は 0 個

(3) $y = x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$, $y = x - k$ から y を消去すると，

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = x - k$$
$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} + k = 0$$
$$2x^2 - 5x + 1 + 2k = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 + 2k) = -16k + 17$$

よって，

(i) $D = -16k + 17 > 0$ すなわち $k < \dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $D = -16k + 17 = 0$ すなわち $k = \dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $D = -16k + 17 < 0$ すなわち $k > \dfrac{17}{16}$ のとき，共有点は 0 個

したがって，

$\boldsymbol{k < \dfrac{17}{16}}$ **のとき, 共有点は 2 個**

$\boldsymbol{k = \dfrac{17}{16}}$ **のとき, 共有点は 1 個**

$\boldsymbol{k > \dfrac{17}{16}}$ **のとき, 共有点は 0 個**

(4) $y = -6x^2 + 4x - 2$, $y = 6x + 2k$ から y を消去すると，

$$-6x^2 + 4x - 2 = 6x + 2k$$
$$6x^2 + 2x + 2k + 2 = 0$$
$$3x^2 + x + k + 1 = 0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (k + 1) = -12k - 11$$

よって，

(i) $D = -12k - 11 > 0$ すなわち $k < -\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 2 個

(ii) $D = -12k - 11 = 0$ すなわち $k = -\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 1 個

(iii) $D = -12k - 11 < 0$ すなわち $k > -\dfrac{11}{12}$ のとき，共有点は 0 個

したがって，

$\boldsymbol{k < -\dfrac{11}{12}}$ **のとき, 共有点は 2 個**

$\boldsymbol{k = -\dfrac{11}{12}}$ **のとき, 共有点は 1 個**

$\boldsymbol{k > -\dfrac{11}{12}}$ **のとき, 共有点は 0 個**

【5】(1) $y=(k-1)x^2+3x-1$ に $y=0$ を代入すると，

$$(k-1)x^2+3x-1=0 \qquad (k \fallingdotseq 1)$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=3^2-4\cdot(k-1)\cdot(-1)=4k+5$$

x 軸と接するとき，$D=0$ となるので，

$$4k+5=0$$
$$k=\boldsymbol{-\frac{5}{4}}$$

(2) $y=2x^2-5x+2k+1$ に $y=0$ を代入すると，

$$2x^2-5x+2k+1=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(2k+1)=-16k+17$$

x 軸と接するとき，$D=0$ となるので，

$$-16k+17=0$$
$$k=\boldsymbol{\frac{17}{16}}$$

(3) $y=4x^2-(k+1)x+1$ に $y=0$ を代入すると，

$$4x^2-(k+1)x+1=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$D=\{-(k+1)\}^2-4\cdot 4\cdot 1=k^2+2k-15$$

x 軸と接するとき，$D=0$ となるので，

$$k^2+2k-15=0$$
$$(k+5)(k-3)=0$$
$$k=\boldsymbol{-5,\ 3}$$

(4) $y=x^2-2(k-2)x+k$ に $y=0$ を代入すると，

$$x^2-2(k-2)x+k=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると，

$$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-1\cdot k=k^2-5k+4$$

x 軸と接するとき，$\dfrac{D}{4}=0$ となるので，

$$k^2-5k+4=0$$
$$(k-1)(k-4)=0$$
$$k=\boldsymbol{1,\ 4}$$

【6】(1) $y=-x^2+4x+2$, $y=2x+k$ から y を消去すると,

$$-x^2+4x+2=2x+k$$
$$x^2-2x+k-2=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k-2)=-k+3$$

2 次関数が直線と接するとき，$\dfrac{D}{4}=0$ となるから,

$$-k+3=0 \qquad \therefore\ k=3$$

よって，$k=3$ を $y=2x+k$ に代入すると,

$$y=2x+3$$

$y=2x+3$, $y=-x^2+4x+2$ から y を消去すると,

$$-x^2+4x+2=2x+3$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

これを $y=2x+3$ に代入すると，$y=5$

したがって，$\boldsymbol{k=3}$**，接点：**$\mathbf{(1,\ 5)}$

(2) $y=x^2-6x+5$, $y=-x+k$ から y を消去すると,

$$x^2-6x+5=-x+k$$
$$x^2-5x+5-k=0$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(5-k)=4k+5$$

2 次関数が直線と接するとき，$D=0$ となるから,

$$4k+5=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{5}{4}$$

よって，$k=-\dfrac{5}{4}$ を $y=-x+k$ に代入すると,

$$y=-x-\frac{5}{4}$$

$y=-x-\dfrac{5}{4}$, $y=x^2-6x+5$ から y を消去すると,

$$x^2-6x+5=-x-\frac{5}{4}$$
$$4x^2-24x+20=-4x-5$$
$$4x^2-20x+25=0$$
$$(2x-5)^2=0$$
$$x=\frac{5}{2}$$

これを $y=-x-\dfrac{5}{4}$ に代入すると，$y=-\dfrac{15}{4}$

したがって，$\boldsymbol{k=-\dfrac{5}{4}}$**，接点：**$\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{15}{4}\right)}$

(3) $y=x^2+2kx+2$, $y=4x-2$ から y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2+2kx+2&=4x-2 \\ x^2+(2k-4)x+4&=0 \\ x^2+2(k-2)x+4&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\cdot 4=k^2-4k$$

2 次関数が直線と接するとき，$\dfrac{D}{4}=0$ となるから,

$$\begin{aligned} k^2-4k&=0 \\ k(k-4)&=0 \\ k&=0,\ 4 \end{aligned}$$

よって，$k=0$ を $y=x^2+2kx+2$ に代入すると,

$$y=x^2+2$$

$y=x^2+2$, $y=4x-2$ から y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2+2&=4x-2 \\ x^2-4x+4&=0 \\ (x-2)^2&=0 \\ x&=2 \end{aligned}$$

これを $y=4x-2$ に代入すると，$y=6$
また，$k=4$ を $y=x^2+2kx+2$ に代入すると,

$$y=x^2+8x+2$$

$y=x^2+8x+2$, $y=4x-2$ から y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2+8x+2&=4x-2 \\ x^2+4x+4&=0 \\ (x+2)^2&=0 \\ x&=-2 \end{aligned}$$

これを $y=4x-2$ に代入すると，$y=-10$
したがって,

$k=0$ のとき, 接点：$(2,\ 6)$
$k=4$ のとき, 接点：$(-2,\ -10)$

(4) $y=x^2+3x+2$, $y=kx+1$ から y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2+3x+2&=kx+1 \\ x^2+(3-k)x+1&=0 \end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると,

$$D=(3-k)^2-4\cdot 1\cdot 1=k^2-6k+5$$

2 次関数が直線と接するとき，$D=0$ となるから，

$$\begin{aligned} k^2-6k+5&=0 \\ (k-1)(k-5)&=0 \\ k&=1,\ 5 \end{aligned}$$

よって，$k=1$ を $y=kx+1$ に代入すると，

$$y=x+1$$

$y=x^2+3x+2$, $y=x+1$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2+3x+2&=x+1 \\ x^2+2x+1&=0 \\ (x+1)^2&=0 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

これを $y=x+1$ に代入すると，$y=0$
また，$k=5$ を $y=kx+1$ に代入すると，

$$y=5x+1$$

$y=x^2+3x+2$, $y=5x+1$ から y を消去すると，

$$\begin{aligned} x^2+3x+2&=5x+1 \\ x^2-2x+1&=0 \\ (x-1)^2&=0 \\ x&=1 \end{aligned}$$

これを $y=5x+1$ に代入すると，$y=6$
したがって，

$k=1$ のとき, 接点：$(-1,\ 0)$
$k=5$ のとき, 接点：$(1,\ 6)$

添削課題

【1】(1) $-6x^2+9x-15=0$ すなわち $2x^2-3x+5=0$ の判別式を D とすると,

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 5=-31<0$

よって, **共有点は $\mathbf{0}$ 個**

(2) $x^2-(k+3)x+2(k+1)=0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned}D&=(k+3)^2-4\cdot 2(k+1)\\&=k^2+6k+9-8k-8\\&=k^2-2k+1\\&=(k-1)^2\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{cases}\boldsymbol{k=1}\ \textbf{のとき，}\ \boldsymbol{D=0}\ \textbf{となり，共有点は}\ \mathbf{1}\ \textbf{個}\\ \boldsymbol{k\fallingdotseq 1}\ \textbf{のとき，}\ \boldsymbol{D>0}\ \textbf{となり，共有点は}\ \mathbf{2}\ \textbf{個}\end{cases}$$

【2】(1)

$$3x^2-\frac{7}{2}x-1=\frac{1}{2}x+6$$

$\therefore\ 3x^2-4x-7=0$

の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-3\cdot(-7)=25>0$$

よって, **共有点は $\mathbf{2}$ 個**

(2)

$$x^2+(k-1)x-k=x-(k^2+1)$$

$\therefore\ x^2+(k-2)x+k^2-k+1=0$

の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned}D&=(k-2)^2-4(k^2-k+1)\\&=k^2-4k+4-4k^2+4k-4\\&=-3k^2\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{cases}\boldsymbol{k=0}\ \textbf{のとき，}\ \boldsymbol{D=0}\ \textbf{となり，共有点は}\ \mathbf{1}\ \textbf{個}\\ \boldsymbol{k\fallingdotseq 0}\ \textbf{のとき，}\ \boldsymbol{D<0}\ \textbf{となり，共有点は}\ \mathbf{0}\ \textbf{個}\end{cases}$$

【3】放物線 $y = x^2 - 2x + k + 3$ と x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式

$x^2 - 2x + (k + 3) = 0 \ \cdots$①

の解である．①の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (k + 3) = -k - 2$$

これより，

(1) 放物線が x 軸と接する条件は，① が重解をもつ条件と同じであるので，

$D = 0$ より,$\boldsymbol{k = -2}$

(2) 放物線が x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は，① が異なる 2 つの実数解をもつ条件と同じであるので，

$D > 0$ より,$\boldsymbol{k < -2}$

(3) 放物線が x 軸と共有点をもたない条件は，① が実数解をもたない条件と同じであるので，

$D < 0$ より,$\boldsymbol{k > -2}$

【4】(1) 求める直線を，

$y = mx + n \cdots ①$

とおく．① が点 $(1,\ -2)$ を通るから，

$m + n = -2$

$\therefore\ n = -m - 2$

① より，

$\boldsymbol{y = mx - m - 2} \quad \cdots ②$

(2) (1) より，直線 ℓ が，$y = x^2 + 1$ に接するから，

$$x^2 + 1 = mx - m - 2$$

$x^2 - mx + m + 3 = 0 \cdots ③$

より，③ が重解をもつ．よって，③ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+3) &= 0 \\ m^2 - 4m - 12 &= 0 \\ (m+2)(m-6) &= 0 \\ \therefore\ m &= -2,\ 6 \end{aligned}$$

(i) $m = -2$ のとき，② より接線の式は，$y = -2x$ で，

③ は，

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = -1$

よって，接点は，$(-1,\ 2)$

(ii) $m = 6$ のとき，② より接線の式は，$y = 6x - 8$ で，

③ は，

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 3$

よって，接点は，$(3,\ 10)$

(i)，(ii) より，

接線 $\boldsymbol{y = -2x,}$ **接点** $\boldsymbol{(-1,\ 2)}$

接線 $\boldsymbol{y = 6x - 8,}$ **接点** $\boldsymbol{(3,\ 10)}$

問題

【1】(1)

$$x^2 + x - 12 < 0$$
$$(x-3)(x+4) < 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{-4 < x < 3}$$

(2)

$$2x^2 + 3x \geqq 0$$
$$x(2x+3) \geqq 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{x \leqq -\frac{3}{2},\ 0 \leqq x}$$

(3)

$$2x^2 - 7x - 4 \geqq 0$$
$$(2x+1)(x-4) \geqq 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{x \leqq -\frac{1}{2},\ 4 \leqq x}$$

(4)

$$1 + 4x - 4x^2 \geqq 0$$
$$-4x^2 + 4x + 1 \geqq 0$$
$$4x^2 - 4x - 1 \leqq 0$$

ここで，$4x^2 - 4x - 1 = 0$ とすると，
解の公式より，

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

(5)

$$16 - x^2 > 0$$
$$x^2 - 16 < 0$$
$$(x+4)(x-4) < 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{-4 < x < 4}$$

(6)

$$x^2 - 2x - 15 < 0$$
$$(x-5)(x+3) < 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{-3 < x < 5}$$

(7)

$$2x^2 + 4x - 3 \leqq 0$$

ここで，$2x^2 + 4x - 3 = 0$ とすると，
解の公式より，

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{\frac{-2-\sqrt{10}}{2} \leqq x \leqq \frac{-2+\sqrt{10}}{2}}$$

(8)

$$3x^2 - 5x - 2 > 0$$
$$(3x+1)(x-2) > 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{x < -\frac{1}{3},\ 2 < x}$$

【2】(1)

$$9x^2-6x+1>0$$
$$(3x-1)^2>0$$

より，$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ を除くすべての数

(2)

$$-x^2+4x-5<0$$
$$x^2-4x+5>0$$
$$(x-2)^2+1>0$$

より，すべての数

(3)

$$4x^2+12x+9\leqq 0$$
$$(2x+3)^2\leqq 0$$

より，$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$

(4)

$$x^2-4\sqrt{3}x+12<0$$
$$\left(x-2\sqrt{3}\right)^2<0$$

より，解なし

(5)

$$3x^2-2x+1>0$$
$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

より，すべての数

(6)

$$2x^2-12x+19\leqq 0$$
$$2(x-3)^2+1\leqq 0$$

より，解なし

(7)

$$-4x^2+4x-3<0$$
$$4x^2-4x+3>0$$
$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2>0$$

より，すべての数

(8)

$$9x^2-24x+16>0$$
$$(3x-4)^2>0$$

より，$\boldsymbol{x=\frac{4}{3}}$ を除くすべての数

(9)

$$x^2-4x+4<0$$
$$(x-2)^2<0$$

より，解なし

(10)

$$-x^2+10x-25\leqq 0$$
$$x^2-10x+25\geqq 0$$
$$(x-5)^2\geqq 0$$

より，すべての数

(11)

$$x^2-8x+16\geqq 0$$
$$(x-4)^2\geqq 0$$

より，すべての数

(12)

$$4x^2-4x+1\leqq 0$$
$$(2x-1)^2\leqq 0$$

より，$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$

【3】(1) $3x-2 \geqq 5x-6$ より,

$$-2x \geqq -4$$
$$x \leqq 2 \quad \cdots ①$$

$2x^2+5x-3>0$ より,

$$(2x-1)(x+3)>0$$
$$x<-3,\ \frac{1}{2}<x \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$\boldsymbol{x<-3,\ \frac{1}{2}<x \leqq 2}$$

(2) $x^2-9x+14>0$ より,

$$(x-2)(x-7)>0$$
$$x<2,\ 7<x \quad \cdots ①$$

$x^2-6x+15 \leqq 0$ より,

$$x^2-6x+15 \leqq 0$$
$$(x-3)^2+6 \leqq 0$$

よって, 解なし $\cdots$②

①, ②より, **解なし**

(3) $2x^2-5x<0$ より,

$$x(2x-5)<0$$
$$0<x<\frac{5}{2} \quad \cdots ①$$

$2x^2-7x+5 \geqq 0$ より,

$$(2x-5)(x-1) \geqq 0$$
$$x \leqq 1,\ \frac{5}{2} \leqq x \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$\boldsymbol{0<x \leqq 1}$$

(4) $2x^2+x-6 \leqq 0$ より,

$$(2x-3)(x+2) \leqq 0$$
$$-2 \leqq x \leqq \frac{3}{2} \quad \cdots ①$$

$3x^2-2x-1>0$ より,

$$(3x+1)(x-1)>0$$
$$x<-\frac{1}{3},\ 1<x \quad \cdots ②$$

①, ②より,

$$\boldsymbol{-2 \leqq x<-\frac{1}{3},\ 1<x \leqq \frac{3}{2}}$$

(5) $2x^2+3x-2 \geqq 0$ より，

$$(2x-1)(x+2) \geqq 0$$
$$x \leqq -2,\ \frac{1}{2} \leqq x \ \cdots ①$$

$3x^2+5x-2 \leqq 0$ より，

$$(3x-1)(x+2) \leqq 0$$
$$-2 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \ \cdots ②$$

①，②より，$\boldsymbol{x=-2}$

(6) $5x^2+38x+21>0$ より，

$$(5x+3)(x+7)>0$$
$$x<-7,\ -\frac{3}{5}<x \ \cdots ①$$

$x^2-2x-11 \leqq 0$ より
$x^2-2x-11=0$ とすると，
解の公式より　　$x=1\pm 2\sqrt{3}$
よって，

$$1-2\sqrt{3} \leqq x \leqq 1+2\sqrt{3} \ \cdots ②$$

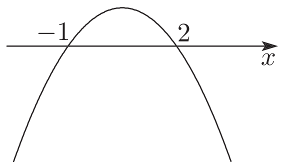
ここで，$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ より，

$$3<\sqrt{12}<4$$
$$\therefore\ -3<1-2\sqrt{3}<-2$$

であるから，①，②より，

$$\boldsymbol{-\frac{3}{5}<x \leqq 1+2\sqrt{3}}$$

【4】(1) $ax^2+x+b \geqq 0$ の解が $-1 \leqq x \leqq 2$ であるから，
$y=ax^2+x+b$ のグラフは，右図のようになる．
グラフが上に凸であることから $a<0$.
また，グラフと x 軸の共有点を考えて，



$$ax^2+x+b=a(x+1)(x-2)$$
$$ax^2+x+b=ax^2-ax-2a$$

左辺と右辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases} 1=-a \\ b=-2a \end{cases}$$

であるので，$a=-1,\ b=2$
これは $a<0$ をみたすから，$\boldsymbol{a=-1,\ b=2}$

＜別解＞
$-1 \leqq x \leqq 2$ を解にもつ不等式は，$p>0$ とすると，

$$p(x+1)(x-2) \leqq 0$$
$$px^2-px-2p \leqq 0$$

ここで，

$$ax^2+x+b \geqq 0 \ \cdots ①$$

の不等号の向きを考えて，

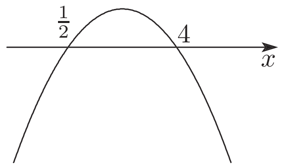
$$-px^2+px+2p \geqq 0 \ \cdots ②$$

① と② の係数を比較して，

$$\begin{cases} a=-p \\ 1=p \\ b=2p \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{a=-1,\ b=2}$

(2) $ax^2+bx-4>0$ の解が $\dfrac{1}{2}<x<4$ であるから，
$y=ax^2+bx-4$ のグラフは，右図のようになる．
グラフが上に凸であることから，$a<0$.
また，グラフと x 軸との共有点を考えて，



$$ax^2+bx-4=a\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)$$
$$ax^2+bx-4=ax^2-\frac{9}{2}ax+2a$$

左辺と右辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases} b=-\dfrac{9}{2}a \\ -4=2a \end{cases}$$

であるので，$a=-2,\ b=9$
これは $a<0$ をみたすから，$\boldsymbol{a=-2,\ b=9}$

＜別解＞
$\dfrac{1}{2}<x<4$ を解にもつ不等式は，$p>0$ とすると，

$$p\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)<0$$
$$px^2-\frac{9}{2}px+2p<0$$

ここで，$ax^2+bx-4>0$ $\cdots$①
の不等号の向きを考えて，$-px^2+\dfrac{9}{2}px-2p>0$ $\cdots$②
① と② の係数を比較して，

$$\begin{cases} a=-p \\ b=\dfrac{9}{2}p \\ -4=-2p \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{a=-2,\ b=9}$

(3)
$$
\begin{aligned}
x^2-(3-a)x-3a &\leqq 0\\
(x+a)(x-3) &\leqq 0
\end{aligned}
$$

(i) $-a<3$ のとき，つまり $a>-3$ のとき，

$$-a \leqq x \leqq 3$$

(ii) $-a=3$ のとき，つまり $a=-3$ のとき，

$$(x-3)^2 \leqq 0$$

となるので，$x=3$

(iii) $-a>3$ のとき，つまり $a<-3$ のとき，

$$3 \leqq x \leqq -a$$

以上より，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a>-3} \text{ のとき，} & \boldsymbol{-a \leqq x \leqq 3}\\
\boldsymbol{a=-3} \text{ のとき，} & \boldsymbol{x=3}\\
\boldsymbol{a<-3} \text{ のとき，} & \boldsymbol{3 \leqq x \leqq -a}
\end{cases}
\qquad \text{（答）}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
-ax^2+(a^2+4a)x-4a^2 &< 0\\
ax^2-(a^2+4a)x+4a^2 &> 0\\
a\left\{x^2-(a+4)x+4a\right\} &> 0\\
a(x-a)(x-4) &> 0
\end{aligned}
$$

(I) $a>0$ のとき，

$$(x-a)(x-4)>0$$

(i) $0<a<4$ のとき，

$$x<a,\ 4<x$$

(ii) $a=4$ のとき，

$$(x-4)^2>0$$

より，$x=4$ 以外のすべての数

(iii) $a>4$ のとき，

$$x<4,\ a<x$$

(II) $a=0$ のとき，

$$0 \cdot x \cdot (x-4)>0$$

よって，解なし

(III) $a<0$ のとき，

$$(x-a)(x-4)<0$$

$a<0$ より $a<4$ なので，

$$a<x<4$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < 4} \text{ のとき,} & \boldsymbol{x < a,\ 4 < x} \\ \boldsymbol{a = 4} \text{ のとき,} & \boldsymbol{x = 4} \text{ 以外のすべての数} \\ \boldsymbol{a > 4} \text{ のとき,} & \boldsymbol{x < 4,\ a < x} \\ \boldsymbol{a = 0} \text{ のとき, 解なし} & \\ \boldsymbol{a < 0} \text{ のとき, } \boldsymbol{a < x < 4} & \end{cases}$$ （答）

【5】(1) $6x^2 - x - 1 > 0$ より

$$(3x+1)(2x-1) > 0$$

よって

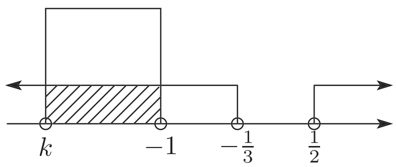
$$x < -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2} < x \ \cdots ①$$

$x^2 + (1-k)x - k < 0$ より

$$(x-k)(x+1) < 0$$

(i) $k < -1$ のとき

$$k < x < -1$$



これと①より，整数の共通解は
-3, -2 であればよいことが分かる．
したがって

$$-4 \leqq k < -3$$

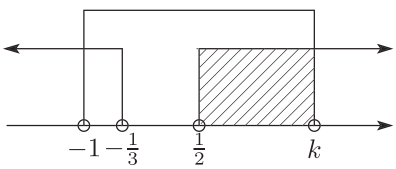
(ii) $k = -1$ のとき

$$(x+1)^2 < 0$$

となり，解なし．
したがって，不適．

(iii) $k > -1$ のとき

$$-1 < x < k$$



これと①より，整数の共通解は
1, 2 であればよいことが分かる．
したがって

$$2 < k \leqq 3$$

以上より，

$$\boldsymbol{-4 \leqq k < -3,\ \ 2 < k \leqq 3}$$ （答）

(2) $2x^2+x-3>0$ より

$$(2x+3)(x-1)>0$$

よって,

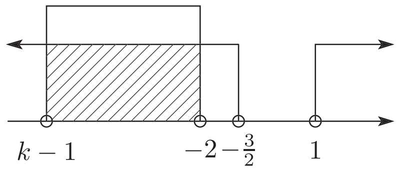
$$x<-\frac{3}{2},\ 1<x\ \cdots ①$$

$x^2-(k-3)x-2k+2<0$ より

$$(x-k+1)(x+2)<0$$

(i) $k-1<-2$ ，つまり $k<-1$ のとき

$$k-1<x<-2$$



これと ① から整数の共通解は
-3 であればよいことが分かる.
したがって

$$-4\leqq k-1<-3$$
$$-3\leqq k<-2$$

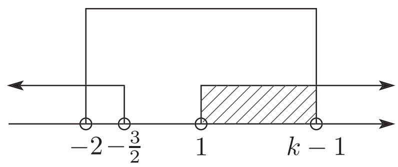
(ii) $k-1=-2$ ，つまり $k=-1$ のとき

$$(x+2)^2<0$$

となり，解なし.
したがって，不適.

(iii) $-2<k-1$ ，つまり $k>-1$ のとき

$$-2<x<k-1$$



これと ① から整数の共通解は
2 であればよいことが分かる.
したがって

$$2<k-1\leqq 3$$
$$3<k\leqq 4$$

したがって,

$$\boldsymbol{-3\leqq k<-2,\ 3<k\leqq 4}\qquad（答）$$

添削課題

【1】(1)

$$x^2-5x+6<0$$
$$(x-2)(x-3)<0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{2<x<3}$$

(2)

$$x^2+x-72\geqq 0$$
$$(x+9)(x-8)\geqq 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{x\leqq -9,\ 8\leqq x}$$

(3)

$$-x^2+3x+28\geqq 0$$
$$x^2-3x-28\leqq 0$$
$$(x+4)(x-7)\leqq 0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{-4\leqq x\leqq 7}$$

(4) $x^2-6x+2=0$ の解は $x=3\pm\sqrt{7}$ だから，$x^2-6x+2>0$ の解は

$$\boldsymbol{x<3-\sqrt{7},\ 3+\sqrt{7}<x}$$

(5)

$$4x^2+20x+25>0$$
$$(2x+5)^2>0$$

よって

$\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$ **を除くすべての実数**

(6)

$$x^2+8x+17<0$$
$$(x+4)^2+1<0$$

よって

解なし

(7)

$$\begin{cases} x^2-5x>0 & \cdots ① \\ x^2-4\leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

①を解くと

$$x(x-5)>0$$
$$\therefore\ x<0,\ 5<x$$

②を解くと

$$(x+2)(x-2)\leqq 0$$
$$\therefore\ -2\leqq x\leqq 2$$

①，②をともにみたす x は，

$$\boldsymbol{-2\leqq x<0}$$

(8)

$$\begin{cases} x+3\leqq 2x^2 & \cdots ① \\ 2x^2<24-2x & \cdots ② \end{cases}$$

①を解くと

$$2x^2-x-3\geqq 0$$
$$(x+1)(2x-3)\geqq 0$$
$$\therefore\ x\leqq -1,\ \frac{3}{2}\leqq x$$

②を解くと，

$$x^2+x-12<0$$
$$(x+4)(x-3)<0$$
$$\therefore\ -4<x<3$$

①，②をともにみたす x は

$$\boldsymbol{-4<x\leqq -1,\ \frac{3}{2}\leqq x<3}$$

【2】 $k(x+2)(x-k) \leqq 0 \ \cdots(*)$ を解く.

(I) $k>0$ のとき，両辺を k で割って
$(x+2)(x-k) \leqq 0$
$\therefore\ -2 \leqq x \leqq k$

(II) $k=0$ のとき，不等式 $(*)$ は x の値にかかわらず成り立つ．すなわち，解はすべての数.

(III) $k<0$ のとき，両辺を k で割って
$(x+2)(x-k) \geqq 0$

(i) $-2<k<0$ のとき，解は $x \leqq -2,\ k \leqq x$

(ii) $k=-2$ のとき，解はすべての数

(iii) $k<-2$ のとき，解は $x \leqq k,\ -2 \leqq x$

以上をまとめて
$0<k$ のとき, $-2 \leqq x \leqq k$
$k=-2,\ 0$ のとき, すべての数
$-2<k<0$ のとき, $x \leqq -2,\ k \leqq x$
$k<-2$ のとき, $x \leqq k,\ -2 \leqq x$

【3】 $x^2-2x-3 \leqq 0$ を解くと,
$(x+1)(x-3) \leqq 0$
$\therefore\ -1 \leqq x \leqq 3 \ \cdots$①
$x^2-2kx+k^2-4 \geqq 0$ を解くと,
$\{x-(k-2)\}\{x-(k+2)\} \geqq 0$
$\therefore\ x \leqq k-2,\ k+2 \leqq x \ \cdots$②
①，②をともに満たす x が $2 \leqq x \leqq 3$ となる条件は，$k+2=2$ より,
$k=0$

問題

【1】(1)

$$\begin{cases} x^2+x+k=0 & \cdots ① \\ x^2+2x+k^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると，① が実数解をもつ条件は，

$$D_1 = 1^2 - 4\cdot 1\cdot k \geqq 0$$
$$\therefore\ k \leqq \frac{1}{4}\ \cdots ③$$

また，② の判別式を D_2 とすると，② が実数解をもつ条件は，

$$\frac{D_2}{4} = 1^2 - 1\cdot k^2 \geqq 0$$
$$k^2 - 1 \leqq 0$$
$$(k+1)(k-1) \leqq 0$$
$$\therefore\ -1 \leqq k \leqq 1\ \cdots ④$$

① と② がどちらも実数解をもつような k の範囲は，③ かつ ④ であるので，

$$\boldsymbol{-1 \leqq k \leqq \frac{1}{4}}$$

(2)

$$\begin{cases} x^2+2ax-3a+10=0 & \cdots ① \\ 2x^2-ax+a^2-7a=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると， ① が実数解をもたない条件は,

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1\cdot(-3a+10) < 0$$
$$a^2+3a-10<0$$
$$(a+5)(a-2)<0$$
$$\therefore\ -5<a<2 \qquad \cdots ③$$

また， ② の判別式を D_2 とすると， ② が実数解をもたない条件は,

$$D_2 = (-a)^2 - 4\cdot 2\cdot(a^2-7a) < 0$$
$$a^2-8a^2+56a<0$$
$$-7a^2+56a<0$$
$$a^2-8a>0$$
$$a(a-8)>0$$
$$\therefore\ a<0,\ 8<a \qquad \cdots ④$$

① と ② がどちらも実数解をもたない a の範囲は ③ かつ ④ であるから,

$$\boldsymbol{-5 < a < 0}$$

(3)
$$\begin{cases} x^2-2ax+a+6=0 & \cdots ① \\ x^2+(a+2)x+\dfrac{1}{2}a^2+a-1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると， ① が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} = (-a)^2-(a+6) &> 0 \\ a^2-a-6 &> 0 \\ (a-3)(a+2) &> 0 \\ \therefore\ a<-2,\ 3<a & \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

また， ②より，$2x^2+2(a+2)x+a^2+2a-2=0\ \cdots ②'$
とし，②$'$ の判別式を D_2 とすると，② が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} = (a+2)^2-2\left(a^2+2a-2\right) &> 0 \\ a^2+4a+4-2a^2-4a+4 &> 0 \\ -a^2+8 &> 0 \\ a^2-8 &< 0 \\ (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2}) &< 0 \\ \therefore\ -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2} & \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

① と ② がそれぞれ異なる 2 つの実数解をもつような
a の範囲は ③ かつ ④ であるから，

$$\boldsymbol{-2\sqrt{2}<a<-2}$$

(4)
$$\begin{cases} x^2+ax+3-a=0 & \cdots ① \\ x^2+(3-a)x+a=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると， ① が実数解をもつ条件は，

$$\begin{aligned} D_1 = a^2-4\cdot 1\cdot(3-a) &\geqq 0 \\ a^2+4a-12 &\geqq 0 \\ (a+6)(a-2) &\geqq 0 \\ \therefore\ a\leqq -6,\quad 2\leqq a & \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

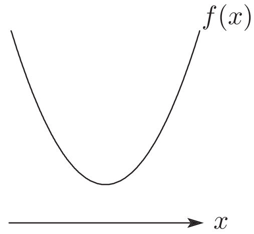
また， ② の判別式を D_2 とすると， ② が実数解をもつ条件は，

$$\begin{aligned} D_2 = (3-a)^2-4\cdot 1\cdot a &\geqq 0 \\ 9-6a+a^2-4a &\geqq 0 \\ a^2-10a+9 &\geqq 0 \\ (a-1)(a-9) &\geqq 0 \\ \therefore\ a\leqq 1,\quad 9\leqq a & \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

① と ② の少なくとも一方が解をもつような
a の範囲は ③ または ④ であるから，

$$\boldsymbol{a\leqq 1,\ 2\leqq a}$$

【2】(1) $x^2-4x+k>0$ が常に成り立つということは，$f(x)=x^2-4x+k$ のグラフが常に x 軸の上方にあるということである．このとき，$f(x)=x^2-4x+k$ のグラフは下に凸であるから，x 軸と共有点をもたない．



$x^2-4x+k=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$$

つまり $\dfrac{D}{4}<0$ となるような k の値の範囲を求めればよいので，

$$4-k<0$$
$$-k<-4$$
$$\therefore\ \boldsymbol{k>4}$$

<別解>

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-4x+k\\&=(x-2)^2-4+k\end{aligned}$$

より，最小値は，$-4+k$

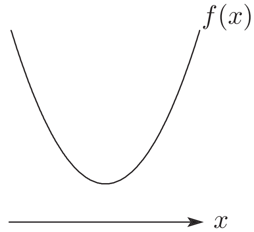
これが x 軸の上方にあればよいから，

$$-4+k>0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{k>4}$$

(2)

$$(k-1)x^2+4(k-1)x+4>0 \quad \cdots(*)$$

$k=1$ のとき，$4>0$ となり，$(*)$ は，常に成り立つ．



$k\neq 1$ のとき，$(*)$ が常に成り立つためには，

$f(x)=(k-1)x^2+4(k-1)x+4$ のグラフが常に x 軸の上方にあるということである．

すなわち，$f(x)$ が下に凸のグラフになり，かつ x 軸と共有点をもたなければよい．

$f(x)$ が下に凸のグラフになるとき，

$$k-1>0 \qquad \therefore\ k>1 \quad \cdots①$$

また，$(k-1)x^2+4(k-1)x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{2(k-1)\}^2-(k-1)\cdot 4\\&=4k^2-8k+4-4k+4\\&=4k^2-12k+8\end{aligned}$$

$\dfrac{D}{4}<0$ となるような k の値の範囲を求めればよいので，

$$4k^2-12k+8<0$$
$$k^2-3k+2<0$$
$$(k-1)(k-2)<0$$
$$\therefore\ 1<k<2 \quad \cdots②$$

①，② より，$1<k<2$

以上より，$\boldsymbol{1\leqq k<2}$

(3) $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2kx + 3k \\ &= (x-k)^2 - k^2 + 3k \end{aligned}$$

より，軸が $x = k$ だから， $1 \leqq x \leqq 3$ における $f(x) = x^2 - 2kx + 3k$ のグラフを用いて最小値を考えると

(i) $k < 1$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 2k \cdot 1 + 3k \\ &= 1 + k \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} 1 + k &> 0 \\ k &> -1 \end{aligned}$$

したがって，$-1 < k < 1$

(ii) $1 \leqq k < 3$ のとき，最小値は，

$$f(k) = -k^2 + 3k$$

これより，

$$\begin{aligned} -k^2 + 3k &> 0 \\ k^2 - 3k &< 0 \\ k(k-3) &< 0 \\ 0 < k &< 3 \end{aligned}$$

したがって，$1 \leqq k < 3$

(iii) $k \geqq 3$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 2k \cdot 3 + 3k \\ &= 9 - 6k + 3k \\ &= 9 - 3k \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} 9 - 3k &> 0 \\ -3k &> -9 \\ k &< 3 \end{aligned}$$

しかし，$k \geqq 3$，$k < 3$ を同時に満たす解はない．

以上より，$\boldsymbol{-1 < k < 3}$

(4) $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2kx + 2k + 3 \\ &= (x-k)^2 - k^2 + 2k + 3 \end{aligned}$$

より，軸が $x = k$ だから，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x) = x^2 - 2kx + 2k + 3$ のグラフを用いて最小値を考えると

(i) $k < 0$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 2k \cdot 0 + 2k + 3 \\ &= 2k + 3 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} 2k + 3 &> 0 \\ 2k &> -3 \\ k &> -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって，$-\dfrac{3}{2} < k < 0$

(ii) $0 \leqq k < 4$ のとき，最小値は，

$$\begin{aligned} f(k) &= k^2 - 2k \cdot k + 2k + 3 \\ &= -k^2 + 2k + 3 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} -k^2 + 2k + 3 &> 0 \\ k^2 - 2k - 3 &< 0 \\ (k-3)(k+1) &< 0 \\ -1 < k &< 3 \end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq k < 3$

(iii) $k \geqq 4$ のとき，最小値は

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2 - 2k \cdot 4 + 2k + 3 \\ &= 16 - 8k + 2k + 3 \\ &= -6k + 19 \end{aligned}$$

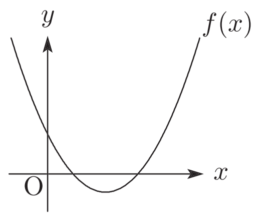
これより，

$$\begin{aligned} -6k + 19 &> 0 \\ -6k &> -19 \\ k &< \frac{19}{6} \end{aligned}$$

したがって，$k \geqq 4$，$k < \dfrac{19}{6}$ を同時に満たす解はない．

以上より，$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2} < k < 3}$

【3】(1) $x^2 + kx + k + 2 = 0 \quad \cdots (*)$



$f(x) = x^2 + kx + k + 2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + kx + k + 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k + 2 \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解がともに正の実数であるとき，求める条件は，

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標} < 0 & \cdots ① \\ \text{軸} > 0 & \cdots ② \\ f(0) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

である．① より，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}k^2 + k + 2 &< 0 \\ k^2 - 4k - 8 &> 0 \\ k < 2 - 2\sqrt{3},\ 2 + 2\sqrt{3} &< k \end{aligned}$$

② より，

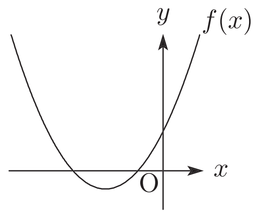
$$-\frac{1}{2}k > 0 \qquad \therefore\ k < 0$$

③ より，

$$k + 2 > 0 \qquad \therefore\ k > -2$$

以上より，$\boldsymbol{-2 < k < 2 - 2\sqrt{3}}$

(2) $$x^2-(k-10)x+k+14=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2-(k-10)x+k+14$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-(k-10)x+k+14\\ &=\left\{x-\frac{k-10}{2}\right\}^2-\frac{(k-10)^2}{4}+k+14\\ &=\left\{x-\frac{k-10}{2}\right\}^2-\frac{k^2}{4}+6k-11 \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解がともに負の実数であるとき，求める条件は,

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標} < 0 & \cdots ① \\ \text{軸} < 0 & \cdots ② \\ f(0) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

である．① より,

$$\begin{aligned} -\frac{k^2}{4}+6k-11&<0\\ k^2-24k+44&>0\\ (k-2)(k-22)&>0\\ k<2,\ 22&<k \end{aligned}$$

② より,

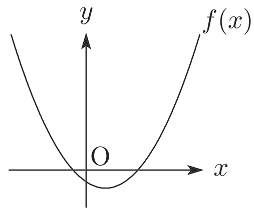
$$\frac{k-10}{2}<0 \qquad \therefore\ k<10$$

③ より,

$$k+14>0 \qquad \therefore\ k>-14$$

以上より，$\boldsymbol{-14<k<2}$

(3) $$x^2-kx+k^2-4=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2-kx+k^2-4$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-kx+k^2-4\\ &=\left(x-\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{4}k^2+k^2-4\\ &=\left(x-\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{3}{4}k^2-4 \end{aligned}$$

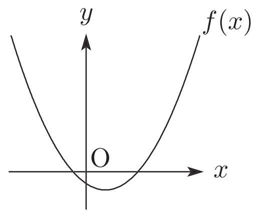
$(*)$ の 2 つの解が異符号であるとき，求める条件は,

$$\begin{cases} f(0)<0 \text{ ならば，頂点の } y \text{ 座標} < 0 \text{ はみたされる} & \cdots ① \\ \text{軸はどこでもよい} & \cdots ② \\ f(0) < 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

すなわち $f(0)<0$ のみである．よって,

$$\begin{aligned} k^2-4&<0\\ (k+2)(k-2)&<0\\ \therefore\ \boldsymbol{-2<k}&\boldsymbol{<2} \end{aligned}$$

(4) $$x^2-(k+1)x+k^2-2k-2=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2-(k+1)x+k^2-2k-2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-(k+1)x+k^2-2k-2\\ &=\left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{(k+1)^2}{4}+k^2-2k-2\\ &=\left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k-\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解が異符号であるとき，求める条件は，

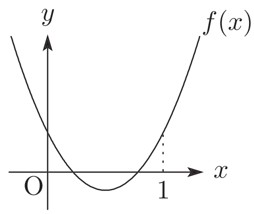
$$\begin{cases} f(0)<0 \text{ ならば，頂点の } y \text{ 座標} <0 \text{ はみたされる} & \cdots ① \\ \text{軸はどこでもよい} & \cdots ② \\ f(0)<0 & \cdots ③ \end{cases}$$

すなわち $f(0)<0$ のみである．よって，

$$k^2-2k-2<0$$

$$\boldsymbol{1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}}$$

(5) $$4x^2-2kx+1=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=4x^2-2kx+1$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=4x^2-2kx+1\\ &=4\left(x^2-\frac{1}{2}kx\right)+1\\ &=4\left(x-\frac{1}{4}k\right)^2-\frac{1}{4}k^2+1 \end{aligned}$$

$(*)$ の異なる 2 つの解がともに $0<x<1$ の範囲にあるとき，求める条件は，

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標} <0 & \cdots ① \\ 0<\dfrac{1}{4}k<1 & \cdots ② \\ f(0)>0,\ f(1)>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

である．① より，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}k^2+1&<0\\ k^2-4&>0\\ (k+2)(k-2)&>0\\ k<-2,\ 2&<k \end{aligned}$$

② より，$0<\dfrac{1}{4}k<1$ $\qquad \therefore\ 0<k<4$

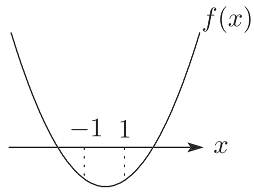
③ より，$f(0)=1>0$

また，

$$\begin{aligned} f(1)=4-2k+1&>0\\ -2k+5&>0\\ -2k&>-5 \qquad \therefore\ k<\frac{5}{2} \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{2<k<\dfrac{5}{2}}$

(6) $$x^2+(k^2-1)x+k-2=0 \quad \cdots(*)$$



$f(x)=x^2+(k^2-1)x+k-2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+(k^2-1)x+k-2\\ &=\left(x+\frac{k^2-1}{2}\right)^2-\frac{(k^2-1)^2}{4}+k-2 \end{aligned}$$

$(*)$ が 1 より大きい解と -1 より小さな解を 1 つずつもつとき，求める条件は，

$$f(1)<0 \text{ かつ } f(-1)<0$$

である．

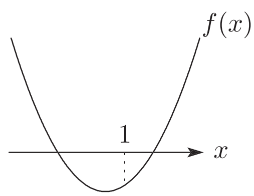
$$\begin{aligned} f(1)=1^2+(k^2-1)\cdot 1+k-2&<0\\ k^2+k-2&<0\\ (k+2)(k-1)&<0\\ -2<k&<1 \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} f(-1)=(-1)^2+(k^2-1)\cdot(-1)+k-2&<0\\ -k^2+k&<0\\ k^2-k&>0\\ k(k-1)&>0\\ k<0,\ 1&<k \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{-2<k<0}$

(7) $$x^2+2(k-1)x+k^2-3k-1=0 \ \cdots(*)$$



$f(x)=x^2+2(k-1)x+k^2-3k-1$ とおくと，

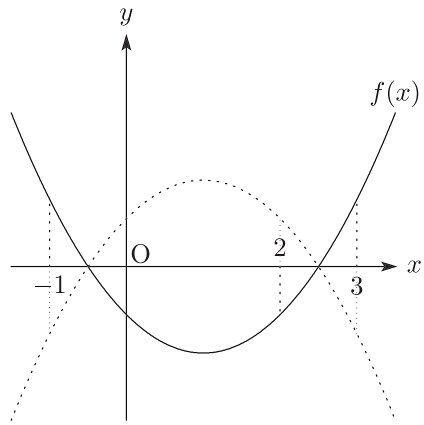
$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+2(k-1)x+k^2-3k-1\\ &=\{x+(k-1)\}^2-(k-1)^2+k^2-3k-1\\ &=\{x+(k-1)\}^2-k-2 \end{aligned}$$

$(*)$ の 1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さいとき，求める条件は，

$$\begin{aligned} f(1)&<0\\ k^2-k-2&<0\\ (k-2)(k+1)&<0\\ -1<k&<2 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{-1<k<2}$

【4】 $$kx^2-(k+1)x-4=0 \ \cdots(*)$$



$f(x)=kx^2-(k+1)x-4$ とおくと，$(*)$ の 1 つの解が -1 と 0 の間に，他の解が 2 と 3 の間にあるとき，求める条件は，

$$f(-1)\cdot f(0)<0 \text{ かつ } f(2)\cdot f(3)<0$$

よって，

$$\begin{aligned}
f(-1)&=k\cdot(-1)^2-(k+1)\cdot(-1)-4\\
&=k+k+1-4\\
&=2k-3\\
f(0)&=k\cdot 0^2-(k+1)\cdot 0-4\\
&=-4\\
f(2)&=k\cdot 2^2-(k+1)\cdot 2-4\\
&=4k-2k-2-4\\
&=2k-6\\
f(3)&=k\cdot 3^2-(k+1)\cdot 3-4\\
&=9k-3k-3-4\\
&=6k-7
\end{aligned}$$

$f(-1)\cdot f(0)<0$ より，

$$\begin{aligned}
(2k-3)\cdot(-4)&<0\\
-8k&<-12\\
k&>\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$f(2)\cdot f(3)<0$ より，

$$\begin{aligned}
(2k-6)(6k-7)&<0\\
\frac{7}{6}<k&<3
\end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{\frac{3}{2}<k<3}$

添削課題

【1】 $f(x)=x^2-2(m+2)x+m^2-1$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2(m+2)x+m^2-1 \\ &= \{x-(m+2)\}^2-4m-5 \end{aligned}$$

放物線 $y=f(x)$ の軸は，$x=m+2$

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2-1)=4m+5$$

また，

$$\begin{aligned} f(1) &= 1-2(m+2)+m^2-1 \\ &= m^2-2m-4 \end{aligned}$$

(1) $f(x)=0$ の 2 解がともに 1 より大となるための条件は

$$\begin{cases} D \geqq 0 & \cdots ① \\ \text{軸} > 1 & \cdots ② \\ f(1) > 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より，$-\dfrac{5}{4} \leqq m$

②より，$-1 < m$

③より，$m < 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} < m$

①～③をともにみたす m は，$\boldsymbol{1+\sqrt{5} < m}$

(2) $f(x)=0$ の 2 解がともに 1 より小さくなるための条件は

$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ \text{軸} < 1 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

すなわち

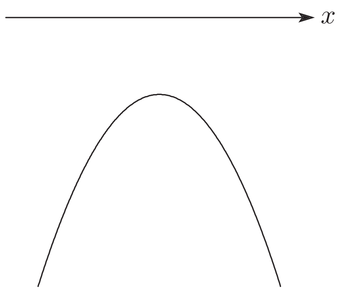
$$\begin{cases} -\dfrac{5}{4} \leqq m \\ m < -1 \\ m < 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} < m \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{5}{4} \leqq m < 1-\sqrt{5}}$

(3) $f(x)=0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつための条件は，$f(1)<0$

$\therefore\ \boldsymbol{1-\sqrt{5} < m < 1+\sqrt{5}}$

【2】(1) $f(x)=ax^2+2a(1-a)x+4a$ とおく.



(i) $a=0$ のとき

x の値にかかわらず $f(x)=0$ となり，不適.

(ii) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになればよいから

$$\begin{cases} a<0 & \cdots(ア) \\ f(x)=0 \text{ の判別式 } D<0 & \cdots(イ) \end{cases}$$

(イ) より，

$$\frac{D}{4}=a^2(1-a)^2-4a^2<0$$

両辺を $a^2(>0)$ で割って，

$$(1-a)^2-4<0$$

$$(a+1)(a-3)<0$$

$$\therefore\ -1<a<3$$

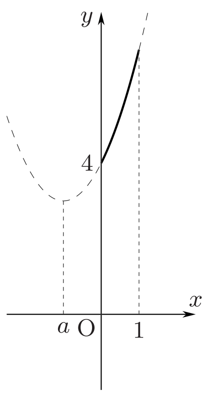
(ア)(イ) をともに満たす a は，$-1<a<0$

(i)(ii) より，$\boldsymbol{-1<a<0}$

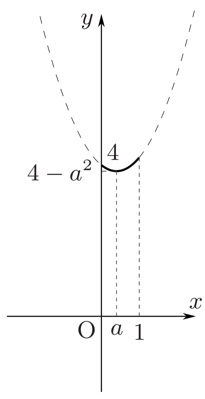
(2) $f(x)=x^2-2ax+4$ とおく.

$f(x)=(x-a)^2+4-a^2$ だから，$y=f(x)$ は，軸が $x=a$ の放物線で，定点 $(0,\ 4)$ を通る.

(i) $a<0$ のとき，下の図のように $0<x<1$ で，常に $f(x)>0$ となる.



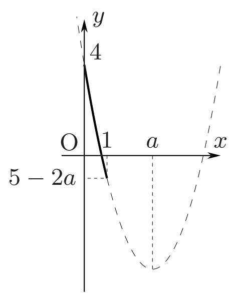
(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$4-a^2 \geqq 3>0$ だから，常に $f(x)>0$ となる.



(iii) $1<a$ のとき，$0<x<1$ で，常に $f(x)>0$ となるためには，$f(1) \geqq 0$ となればよいから，

$$1-2a+4 \geqq 0$$

$$\therefore\ 1<a \leqq \frac{5}{2}$$



(i)～(iii) より，$\boldsymbol{a \leqq \frac{5}{2}}$

【3】 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$ とおく.
題意をみたす条件は

$$\begin{cases} f(0)>0 \cdots ① \\ f(1)<0 \cdots ② \\ f(2)>0 \cdots ③ \end{cases}$$

①より,

$$k^2-k-2>0$$
$$(k+1)(k-2)>0$$
$$\therefore \quad k<-1,\ 2<k$$

②より,

$$7-k-13+k^2-k-2<0$$
$$k^2-2k-8<0$$
$$(k+2)(k-4)<0$$
$$\therefore \quad -2<k<4$$

③より,

$$28-2k-26+k^2-k-2>0$$
$$k^2-3k>0$$
$$k(k-3)>0$$
$$\therefore \quad k<0,\ 3<k$$

①〜③をともに満たす k は, $\boldsymbol{-2<k<-1,\ 3<k<4}$

3MJSS/3MJS/3MJ
中３選抜東大・医学部数学
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	