2MJS/2MJ

本科１期確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

中２数学

中２東大数学

【1】(1) $(x+3y)^2 = \boldsymbol{x^2+6xy+9y^2}$

(2) $(-2a+5b)(2a+5b) = \boldsymbol{-4a^2+25b^2}$

(3) $(x-4y)(x+3y) = \boldsymbol{x^2-xy-12y^2}$

(4) $(3ab-5c)(2ab+c) = \boldsymbol{6a^2b^2-7abc-5c^2}$

(5) $(x-2)(x^2+4x-5) = \boldsymbol{x^3+2x^2-13x+10}$

【2】(1) $4ax^2-6axy = \boldsymbol{2ax(2x-3y)}$

(2) $4a^2-12a+9 = \boldsymbol{(2a-3)^2}$

(3) $25x^2y^2-64z^2 = \boldsymbol{(5xy+8z)(5xy-8z)}$

(4) $x^2+4xy-12y^2 = \boldsymbol{(x+6y)(x-2y)}$

(5) $2a^2-5ab-3b^2 = \boldsymbol{(2a+b)(a-3b)}$

【3】(1) y 切片が 5 であるから，求める直線の式は

$$y = ax+5$$

とおける．この直線が $(-4,\ -3)$ を通るので，これを代入して

$$-3 = -4a+5$$

$$\therefore\quad a = 2$$

よって

$$\boldsymbol{y = 2x+5}$$

(2) 求める直線の式を

$$y = ax+b$$

とおくと，2 点 $(3,\ -5)$，$(-2,\ 0)$ を通るので，それぞれ代入して

$$\begin{cases} -5 = 3a+b \\ 0 = -2a+b \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{y = -x-2}$$

＜別解＞ 変化の割合を利用して解いてもよい．

2 点 $(3,\ -5)$，$(-2,\ 0)$ を通るので

$$\frac{-5-0}{3-(-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

よって，求める直線の式は $y=-x+b$ とおけ，点 $(-2,\ 0)$ を通るので

$$0 = -(-2)+b$$

$$b = -2$$

よって

$$\boldsymbol{y = -x-2}$$

(3) 求める直線の式は

$$y = \frac{1}{2}x+b$$

とおける．この直線が $(6,\ 6)$ を通るので，これを代入して

$$6 = \frac{1}{2}\times 6+b$$

$$\therefore\quad b = 3$$

よって

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 3}$$

(4) 求める直線の傾きは $-\dfrac{1}{5}$ であるから

$$y = -\frac{1}{5}x + b$$

とおける．この直線が $(-5,\ 3)$ を通るので，これを代入して

$$3 = -\frac{1}{5} \times (-5) + b$$

$$\therefore \quad b = 2$$

よって

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{5}x + 2}$$

【4】3 直線を

$$\begin{cases} y = 2x - 4 & \cdots\cdots ① \\ x + 3y - 2 = 0 & \cdots\cdots ② \\ y = ax + 2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

とする．三角形をえがかない条件は，次の 2 通りがある．

(i) 2 直線が平行となるとき，

①と③が平行になるのは，$a = 2$ のとき．

②と③が平行になるのは，

②は，$y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ より，傾きは $-\dfrac{1}{3}$

したがって，$a = -\dfrac{1}{3}$ のとき．

(ii) 3 直線が 1 点で交わるとき，

①と②の交点の座標は，

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

を解いて，

$$x = 2,\ y = 0$$

③がこの点 $(2,\ 0)$ を通るのは，

$$0 = a \times 2 + 2$$

$$\therefore \quad a = -1 \text{ のとき}$$

以上より，求める a の値は

$$\boldsymbol{a = -1,\ -\frac{1}{3},\ 2}$$

【5】(1) A の体積は，a^3 cm^3

B の体積は，$a(a+1)(a-1) = (a^3 - a)$ cm^3

よって，**A の方が B よりも $\boldsymbol{a^3 - (a^3 - a) = a\mathrm{cm}^3}$ だけ大きい**

(2) C の体積は，

$$\begin{aligned}(a+2)(a-1)^2 &= (a+2)(a^2-2a+1)\\ &= (a^3-3a+2)\mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

A の体積から C の体積を引くと，

$$a^3-(a^3-3a+2)=3a-2 \ \cdots\cdots ①$$

ここで $a>1$ より，$3a-2>3-2=1>0$

よって ① の式の値は常に正.

つまり，**Aの方がCよりも $\boldsymbol{(3a-2)\mathrm{cm}^3}$ だけ大きい**

【6】(1) $\begin{cases} y=2x+2 \ \cdots\cdots ① \\ y=-4x+17 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

① と ② より

$$\begin{aligned}2x+2&=-4x+17\\ 6x&=15\\ x&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

① より，$y=7$

よって，A $\boldsymbol{\left(\frac{5}{2},\ 7\right)}$

(2) ℓ と x 軸との交点は，$y=0$ を代入して

$$0=2x+2$$

$$\therefore x=-1$$

よって，B$(-1,\ 0)$

以上より，t の変域は，$\boldsymbol{-1<t<\frac{5}{2}}$

(3) P の y 座標は $y=2x+2$ の x に t を代入して

$$y=2t+2$$

よって，S の y 座標も $2t+2$

これを $y=-4x+17$ に代入して

$$\begin{aligned}2t+2&=-4x+17\\ 4x&=-2t+15\\ x&=\frac{-2t+15}{4}=-\frac{1}{2}t+\frac{15}{4}\end{aligned}$$

よって，S $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}t+\frac{15}{4},\ 2t+2\right)}$

(4) PQ$=2t+2$

QR$=\left(-\frac{1}{2}t+\frac{15}{4}\right)-t=-\frac{3}{2}t+\frac{15}{4}$

PQ=QR が条件なので

$$\begin{aligned} 2t+2&=-\frac{3}{2}t+\frac{15}{4} \\ 8t+8&=-6t+15 \\ 14t&=7 \\ t&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

これは (2) で求めた t の条件を満たしている.

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$$

(5) PQ×QR なので

$$\begin{aligned} (2t+2)\times\left(-\frac{3}{2}t+\frac{15}{4}\right)&=(t+1)\left(-3t+\frac{15}{2}\right) \\ &=\boldsymbol{-3t^2+\frac{9}{2}t+\frac{15}{2}} \end{aligned}$$

【7】 (1) $\begin{cases} 4x+7y-29=0 & \cdots ① \\ 2x-y+17=0 & \cdots ② \end{cases}$

① − ② × 2 より

$$\begin{aligned} 9y-63&=0 \\ y&=7 \end{aligned}$$

これを ② に代入して

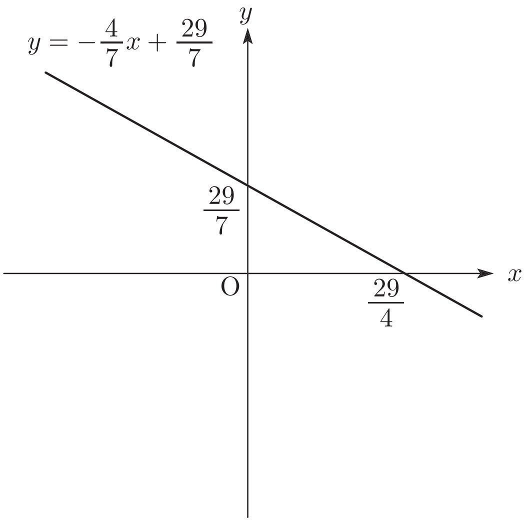
$$\begin{aligned} 2x-7+17&=0 \\ x&=-5 \end{aligned}$$

以上より, $\boldsymbol{a=-5,\ b=7}$

(2) 式変形して

$$\begin{aligned} 4x+7y-29&=0 \\ y&=-\frac{4}{7}x+\frac{29}{7} \end{aligned}$$

グラフは右図のとおり



(3) $\begin{cases} 4x+7y=29 & \cdots ③ \\ 3kx-3y=4 & \cdots ④ \end{cases}$

③ より

$$y=-\frac{4}{7}x+\frac{29}{7}$$

③ は傾き $-\frac{4}{7}$，y 切片 $\frac{29}{7}$ の直線を表す．

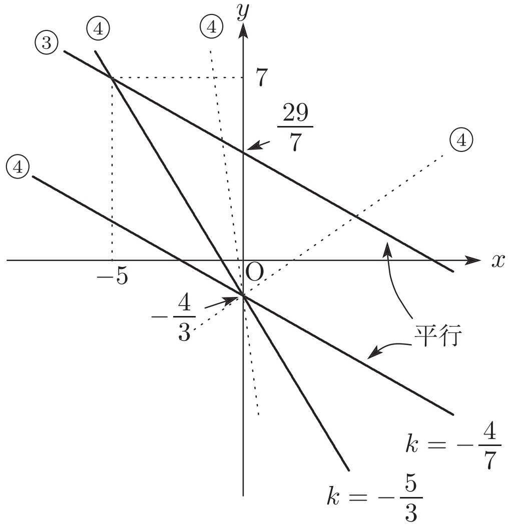
また，④ より

$$-3y=-3kx+4$$

$$y=kx-\frac{4}{3}$$

したがって ④ は傾き k，y 切片 $-\frac{4}{3}$ の直線を表す．

（グラフに表すと次のようになる）



よって，求める条件は ③ と ④ の交点が，$x \geqq -5$ の範囲にあることである．

④ のグラフの傾き k が，③ のグラフの傾き $-\frac{4}{7}$ よりも大きいとき，すなわちグラフより $k>-\frac{4}{7}$ のときは必ず交点をもつ．一方，$k<-\frac{4}{7}$ のときは $(-5,\ 7)$ を通るときの傾き以下で条件をみたす．

④ に $(x,\ y)=(-5,\ 7)$ を代入して

$$-15k-21=4$$

$$k=-\frac{5}{3}$$

以上より，$\boldsymbol{k \leqq -\frac{5}{3},\ -\frac{4}{7}<k}$

＜別解＞

③ $\times 3 +$ ④ $\times 7$ より

$$(21k+12)x = 115 \quad \cdots ⑤$$

$$x = \frac{115}{21k+12}$$

よって，$\dfrac{115}{21k+12} \geqq -5$ を解けばよい.

(i) $21k+12>0$ のとき，すなわち $k > -\dfrac{4}{7}$ のとき

左辺 >0 なので，必ず成立.

(ii) $21k+12<0$ のとき，すなわち $k < -\dfrac{4}{7}$ のとき

$$115 \leqq -5(21k+12)$$

両辺を 5 で割って

$$23 \leqq -21k-12$$

$$21k \leqq -35$$

$$k \leqq -\frac{5}{3} \quad \left(これは\, k < -\frac{4}{7} をみたす\right)$$

(iii) $21k+12=0$ のとき，すなわち $k = -\dfrac{4}{7}$ のとき

⑤ において，$0=115$ となり，方程式の解がないので不適

以上 (i)，(ii)，(iii) より

$$\boldsymbol{k \leqq -\frac{5}{3},\ -\frac{4}{7} < k}$$

＜参考＞

$\dfrac{115}{21k+12} \geqq -5$ を，$21k+12$ の符号を考慮せずに解くと，$115 \geqq -5(21k+12)$ より

$$k \geqq -\frac{5}{3}$$

という誤った結果が出てしまう.