3MJS/3MJ

本科１期確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

【1】(1) ①

$$(a-2)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot 2 + 3\cdot a\cdot 2^2 - 2^3$$
$$= \boldsymbol{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}$$

②

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x^2+x+1)^2 &= \left\{(x-1)(x^2+x+1)\right\}^2\\ &= (x^3-1)^2\\ &= (x^3)^2 - 2\cdot x^3\cdot 1 + 1^2\\ &= x^{3\times 2} - 2x^3 + 1\\ &= \boldsymbol{x^6 - 2x^3 + 1}\end{aligned}$$

(2) ①

$$\begin{aligned}8a^3+64 &= 8(a^3+8)\\ &= 8(a+2)(a^2 - a\cdot 2 + 2^2)\\ &= \boldsymbol{8(a+2)(a^2-2a+4)}\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}&a^3 - b^3 + c^3 + 3abc\\ =&a^3 + (-b)^3 + c^3 - 3\cdot a\cdot(-b)\cdot c\\ =&(a-b+c)\{a^2+(-b)^2+c^2-a\cdot(-b)-(-b)\cdot c - c\cdot a\}\\ =&\boldsymbol{(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)}\end{aligned}$$

(3) $4<5<9$ より，$2<\sqrt{5}<3$ なので，$\sqrt{5}-4<0$，$2-\sqrt{5}<0$．よって，

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{5}-4\right| + 2\left|2-\sqrt{5}\right| &= -\left(\sqrt{5}-4\right) + 2\cdot\left\{-\left(2-\sqrt{5}\right)\right\}\\ &= 4-\sqrt{5}+2\left(\sqrt{5}-2\right)\\ &= 4-\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4\\ &= \boldsymbol{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\\ &\quad + 2\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{6}\\ &=6+3+2-6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}\\ &=\boldsymbol{11-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\sqrt{11-4\sqrt{6}} &= \sqrt{11-2\sqrt{2^2\cdot 6}}\\ &= \sqrt{11-2\sqrt{24}}\\ &= \sqrt{(8+3)-2\sqrt{8\times 3}}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \left|2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|\end{aligned}$$

ここで，$2\sqrt{2}-\sqrt{3}>0$ より，

（与式）$=\boldsymbol{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

【2】(1) 頂点が $(1,\ -2)$ だから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-1)^2-2 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．これが $(-1,\ 10)$ を通るので，

$$\begin{aligned}10 &= a(-1-1)^2-2\\ 10 &= a\cdot(-2)^2-2\\ 10 &= 4a-2\\ 12 &= 4a\\ a &= 3\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}y &= 3(x-1)^2-2\\ &= 3(x^2-2x+1)-2\\ &= 3x^2-6x+3-2\\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 3x^2-6x+1}\end{aligned}$$

(2) x 軸と $(-3,\ 0)$ で接するから頂点は $(-3,\ 0)$ である．よって，求める 2 次関数は

$$y=a(x+3)^2 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおける．これが $(-1,\ -4)$ を通るので

$$\begin{aligned}-4 &= a(-1+3)^2\\ -4 &= a\cdot 2^2\\ -4 &= 4a\\ a &= -1\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}y &= -(x+3)^2\\ &= -(x^2+6x+9)\\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -x^2-6x-9}\end{aligned}$$

(3) 求める 2 次関数を，

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \fallingdotseq 0)$$

とおく．これが 3 点 $(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$ を通るから，

$$\begin{cases} a - b + c = -3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ a + b + c = 5 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 4a + 2b + c = 3 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② − ① より，

$$2b = 8 \qquad \therefore \quad b = 4$$

これを①，③にそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} a + c = 1 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 4a + c = -5 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤ − ④ より，

$$3a = -6 \qquad \therefore \quad a = -2$$

これを④に代入して

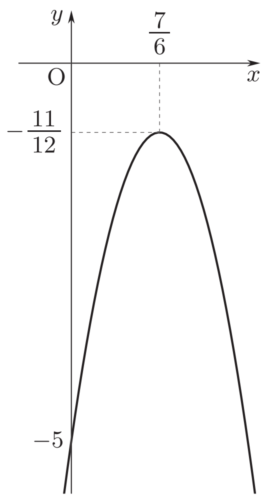
$$c = 3$$

よって，$\boldsymbol{y = -2x^2 + 4x + 3}$

(4)

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 7x - 5 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) - 5 \\ &= -3\left\{\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2\right\} - 5 \\ &= -3\left\{\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right\} - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{49}{12} - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{11}{12} \end{aligned}$$

よって，$x = \dfrac{7}{6}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{-\dfrac{11}{12}}$



(5) $x=2$ のとき，最大値 7 をとることから，$a<0$ となり，頂点は $(2,\ 7)$ である．
求める 2 次関数は，

$$y=a(x-2)^2+7 \qquad (a<0)$$

とおける．これが，点 $(4,\ -1)$ を通るので，

$$\begin{aligned} -1 &= a(4-2)^2+7 \\ -1 &= 4a+7 \\ 4a &= -8 \qquad \therefore\ a=-2 \quad (<0) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= -2(x-2)^2+7 \\ &= -2(x^2-4x+4)+7 \\ \therefore \boldsymbol{y} &\boldsymbol{=-2x^2+8x-1} \end{aligned}$$

【3】(1)

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \\ &= 4^2-2\cdot 5 \\ &= 16-10 \\ &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= (x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz \\ &= 4\cdot(6-5)+3\cdot 1 \\ &= 4\cdot 1+3 \\ &= 4+3 \\ &= \mathbf{7} \end{aligned}$$

【4】(1) $\sqrt{\quad}$ の中を $\sqrt{A^2}$ の形にすると，

$$\begin{aligned}A &= 2\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-8x+16}\\ &= 2\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-4)^2}\\ &= \boldsymbol{2|x+2|-|x-4|}\end{aligned}$$

(2)

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & (x+2 \geqq 0,\ \text{つまり}\ x \geqq -2\ \text{のとき}) \\ -x-2 & (x+2 < 0,\ \text{つまり}\ x < -2\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & (x-4 \geqq 0,\ \text{つまり}\ x \geqq 4\ \text{のとき}) \\ -x+4 & (x-4 < 0,\ \text{つまり}\ x < 4\ \text{のとき}) \end{cases}$$

だから，$x < -2$，$-2 \leqq x < 4$，$4 \leqq x$ で，場合分けする．

$x < -2$ のとき，

$$\begin{aligned}A = 2|x+2|-|x-4| &= 2\{-(x+2)\}-\{-(x-4)\}\\ &= -2x-4+x-4\\ &= -x-8\end{aligned}$$

$-2 \leqq x < 4$ のとき，

$$\begin{aligned}A = 2|x+2|-|x-4| &= 2(x+2)-\{-(x-4)\}\\ &= 2x+4+x-4\\ &= 3x\end{aligned}$$

$4 \leqq x$ のとき，

$$\begin{aligned}A = 2|x+2|-|x-4| &= 2(x+2)-(x-4)\\ &= 2x+4-x+4\\ &= x+8\end{aligned}$$

したがって，

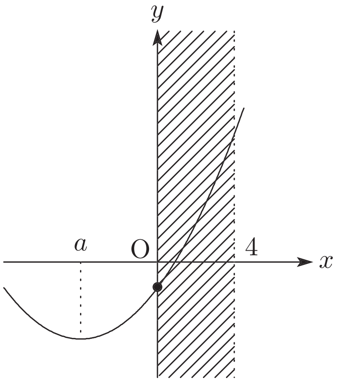
$$A = \begin{cases} \boldsymbol{-x-8} & \textbf{(}\boldsymbol{x < -2}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{3x} & \textbf{(}\boldsymbol{-2 \leqq x < 4}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{x+8} & \textbf{(}\boldsymbol{4 \leqq x}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$$

【5】

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax + 2a + 3 \\ &= (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$

となり，下に凸なグラフで頂点は $(a,\ -a^2+2a+3)$ である．

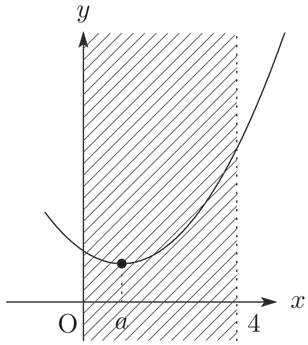
(i) $a<0$ のとき，



上のグラフより，最小値は $x=0$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 0^2 - 2a\cdot 0 + 2a + 3 \\ &= 2a + 3 \end{aligned}$$

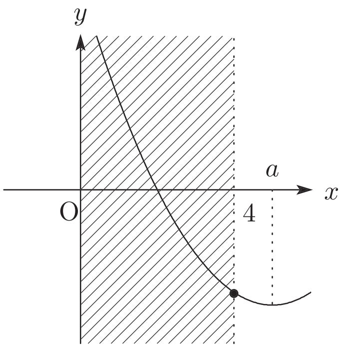
(ii) $0 \leqq a < 4$ のとき，



上のグラフより，最小値は $x=a$ のとき

$$\begin{aligned} y &= (a-a) - a^2 + 2a + 3 \\ &= -a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$

(iii) $4 \leqq a$ のとき



上のグラフより，最小値は $x=4$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 4^2 - 2a\cdot 4 + 2a + 3 \\ &= 16 - 8a + 2a + 3 \\ &= 19 - 6a \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{2a+3} & \textbf{(}\boldsymbol{a<0}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{-a^2+2a+3} & \textbf{(}\boldsymbol{0 \leqq a < 4}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{19-6a} & \textbf{(}\boldsymbol{4 \leqq a}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$$

【6】展開して整理すると，

$$\begin{aligned}
(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c&=x^3\\
(x-1)(x^2-5x+6)+a(x^2-3x+2)+bx-b+c&=x^3\\
x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6+ax^2-3ax+2a+bx-b+c&=x^3\\
(a-6)x^2+(-3a+b+11)x+2a-b+c-6&=0
\end{aligned}$$

となる．これが恒等式となるためには

$$\begin{cases} a-6=0 & \cdots ① \\ -3a+b+11=0 & \cdots ② \\ 2a-b+c-6=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

が成り立てばよい．①より，

$$\begin{aligned} a-6&=0\\ a&=6 \ \cdots ④ \end{aligned}$$

これを②に代入すると，

$$\begin{aligned} -3\cdot 6+b+11&=0\\ -18+b+11&=0\\ b-7&=0\\ b&=7 \ \cdots ⑤ \end{aligned}$$

さらに，④，⑤を③に代入すると，

$$\begin{aligned} 2\cdot 6-7+c-6&=0\\ 12-7+c-6&=0\\ c-1&=0\\ c&=1 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=6,\ b=7,\ c=1}$$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，

$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (1-1)(1-2)(1-3)+a(1-1)(1-2)+b(1-1)+c&=1^3\\ 0\cdot(-1)\cdot(-2)+a\cdot 0\cdot(-1)+b\cdot 0+c&=1\\ c&=1 \end{aligned}$$

次に，$x=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2-1)(2-2)(2-3)+a(2-1)(2-2)+b(2-1)+c&=2^3\\ 1\cdot 0\cdot(-1)+a\cdot 1\cdot 0+b\cdot 1+c&=8\\ b+c&=8 \end{aligned}$$

さらに，$x=3$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (3-1)(3-2)(3-3)+a(3-1)(3-2)+b(3-1)+c&=3^3\\ 2\cdot 1\cdot 0+a\cdot 2\cdot 1+b\cdot 2+c&=27\\ 2a+2b+c&=27 \end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases} c = 1 & \cdots ① \\ b + c = 8 & \cdots ② \\ 2a + 2b + c = 27 & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②に代入する．

$$\begin{aligned} b + 1 &= 8 \\ b &= 7 \ \cdots ④ \end{aligned}$$

①，④を③に代入する．

$$\begin{aligned} 2a + 2 \cdot 7 + 1 &= 27 \\ 2a + 14 + 1 &= 27 \\ 2a + 15 &= 27 \\ 2a &= 12 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} &(x-1)(x-2)(x-3) + 6(x-1)(x-2) + 7(x-1) + 1 \\ =&(x-1)(x^2-5x+6) + 6(x^2-3x+2) + 7x - 7 + 1 \\ =&x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 + 6x^2 - 18x + 12 + 7x - 7 + 1 \\ =&x^3 \\ =&(\text{右辺}) \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式となっている．よって，

$$\boldsymbol{a = 6,\ b = 7,\ c = 1}$$