2MJSS/2MJS/2MJ

本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

中２数学

中２東大数学

１１章　相似（３）

問題

【1】(1) △ ABC において，AM = MB，AN = NC だから，中点連結定理より，
$x = 2\mathrm{MN} = 2 \times 4 = \mathbf{8}$

(2) △ ABC において，AP = PB，PR // BC だから，中点連結定理の逆より，
$y = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} = \dfrac{1}{2} \times 6 = \mathbf{3}$
また，AR = RC であることより，
△ ACD において，CR = RA，AD // RQ だから，中点連結定理の逆より，
$z = 2\mathrm{RQ} = 2 \times (5 - 3) = \mathbf{4}$

【2】△ ABC において，
BP = PA，BQ = QC だから，中点連結定理より，
PQ // AC ……①
$\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}$ ……②
よって，△ PQR において，RC = CQ
①より，SC // PQ だから，中点連結定理の逆より，
RS = SP ……③
$\mathrm{SC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}$ ……④
(1) ③より，PS = SR = **12 (cm)**
(2) SC = x (cm) とすると，②より，$\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{2}(21 + x)$ (cm)
④より，PQ = $2x$ (cm)
したがって，$\dfrac{1}{2}(21 + x) = 2x$ より，$x = \mathbf{7}$ **(cm)**

＜別解＞
②より，PQ : AC = 1 : 2
④より，PQ : SC = 2 : 1
したがって，

$$\begin{array}{llll} \mathrm{PQ} & :\mathrm{AC} & & = 1 \quad : 2 \\ \mathrm{PQ} & & :\mathrm{SC} & = 2 \qquad\quad : 1 \\ \hline \mathrm{PQ} & :\mathrm{AC} & :\mathrm{SC} & = 2 \quad : 4 \quad : 1 \end{array}$$

よって，AC : SC = 4 : 1 より，AS : SC = 3 : 1
ゆえに，$\mathrm{SC} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AS} = \dfrac{1}{3} \times 21 = \mathbf{7}$ **(cm)**

【3】△ ACD において，

$AF = FD$

$AE = EC$

だから，中点連結定理より，

$FE = \dfrac{1}{2}DC$ ……①

△ ABC において，同様に，中点連結定理より，

$EG = \dfrac{1}{2}AB$ ……②

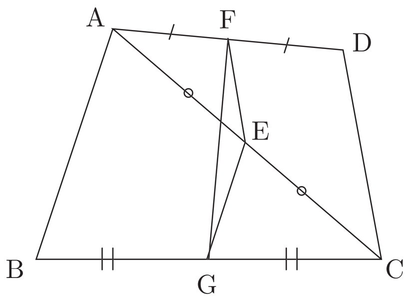
仮定より，

$AB = CD$ ……③

①，②，③より，

$FE = GE$

よって，△ EFG は EF=EG の二等辺三角形である．　（証明終）



【4】

ア //	イ **2**	ウ **1**	エ **∠LMP**
オ **∠MLP**	カ **∽**	キ **2**	ク **1**
ケ **2**	コ **1**	サ **2**	シ **1**
ス **∽**	セ **2**	ソ **1**	タ **2**
チ **1**	ツ **2**	テ **1**	

【5】(1) G は，△ ABC の重心だから，AD は中線である．

つまり，D は辺 BC の中点だから，$BD = 12 \times \dfrac{1}{2} = \mathbf{6\ (cm)}$

(2) $AG : GD = 2 : 1$ より，$GD = \dfrac{1}{3}AD = \dfrac{1}{3} \times 9 = \mathbf{3\ (cm)}$

(3) EF // BC より，△ AEF∽ △ ABC

また，$EF : BC = AE : AB = AG : AD = 2 : 3$

よって，$EF = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2}{3} \times 12 = \mathbf{8\ (cm)}$

【6】(1) FA // BC，FB // AC より，2 組の対辺が平行だから，四角形 FBCA は平行四辺形．ゆえに，$FA = BC$ ……①

AE // BC，　AB // EC

より，同様にして，

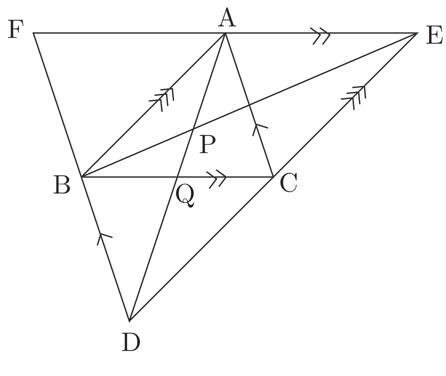
また，$AE = BC$ ……②

①，②より，

$FA = AE$ ……③

よって，A は線分 EF の中点である．

（証明終）



(2) (1) と同様にして，四角形 FBCA は平行四辺形だから，

$FB = AC$

四角形 ABDC は平行四辺形だから，

$BD = AC$

ゆえに，$FB = BD$ ……④

③，④より，AD，EB は，△ FDE の中線であり，点 P はその交点だから，点 P は△ FDE の重心である．

ゆえに，$DP : PA = 2 : 1$ より，

$$DP = AD \times \frac{2}{3}$$
$$= 9 \times \frac{2}{3} = 6$$

④と FA // BQ から，中点連結定理の逆より，

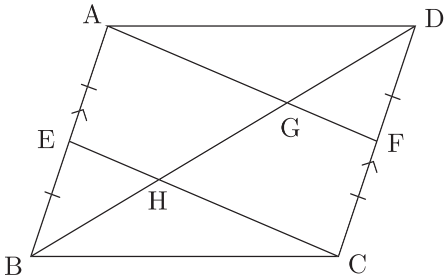
$AQ = QD$

ゆえに，$QD = AD \times \frac{1}{2} = 4.5$

よって，

$$PQ = DP - QD$$
$$= 6 - 4.5 = \mathbf{1.5\ (cm)}$$

【7】四角形 ABCD は平行四辺形だから，



$AE = FC$

AE // FC

1 組の対辺が平行で長さが等しいから，四角形 AECF は平行四辺形．

ゆえに，AF // EC ……①

△ ABG において，

$AE = EB$ と ① から

中点連結定理の逆より，

$BH = HG$ ……②

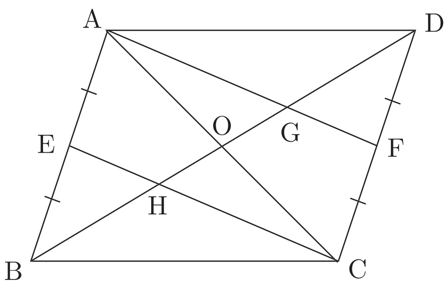
△ DHC において，同様にして，

$DG = GH$ ……③

②，③より，$BH = HG = DG$

よって，H，G は対角線 BD を 3 等分する．　（証明終）

＜別解＞



対角線 AC をひき，BD との交点を O とする．対角線は，おのおのの中点で交わるから，

$BO = DO$ ……①

$AO = CO$ ……②

△ ABC において，②より，BO は中線．

また，仮定より CE は中線．

ゆえに，点 H は $\triangle$ ABC の重心．よって，BH : HO = 2 : 1 より，

$\mathrm{HO}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BO}$ ……③

$\mathrm{BH}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BO}$ ……④

$\triangle$ DAC において，同様にして，点 G は $\triangle$ DAC の重心．よって，DG : GO = 2 : 1 と，①より，

$\mathrm{GO}=\dfrac{1}{3}\mathrm{DO}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BO}$ ……⑤

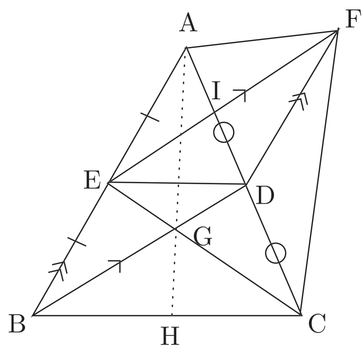
$\mathrm{DG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{DO}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BO}$ ……⑥

③，④，⑤，⑥より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BH}:\mathrm{HG}:\mathrm{GD}&=\frac{2}{3}\mathrm{BO}:\left(\frac{1}{3}\mathrm{BO}+\frac{1}{3}\mathrm{BO}\right):\frac{2}{3}\mathrm{BO}\\&=1:1:1\end{aligned}$$

よって，G，H は，対角線 BD を 3 等分する．　（証明終）

【8】(1) 仮定より，



EB // FD，　EF // BD

2 組の対辺が平行だから，四角形 EBDF は平行四辺形である．よって，

EF = BD ……①

EB = FD

仮定より，

AE = EB

ゆえに，AE = FD ……②

ここで，A と F，E と D を結ぶ．AE // FD と②より，1 組の対辺が平行で，長さが等しいから，四角形 AEDF は平行四辺形．ゆえに，

AF // ED ……③

AF = ED ……④

いま，EC と BD の交点を G とすると，BD と CE は $\triangle$ ABC の中線だから，点 G は$\triangle$ ABC の重心である．A と G を直線で結び，BC との交点を H とする．AH は $\triangle$ ABC の中線だから，

$\mathrm{BH}=\mathrm{HC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$

$\triangle$ ABC で，AE = EB，AD = DC だから，中点連結定理より，

$\mathrm{ED}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$

ED // BC ……⑤

ゆえに，ED = HC ……⑥

③，④，⑤，⑥より，1 組の対辺が平行で長さが等しいから，四角形 AHCF は平行四辺形である．よって，AH = FC ……⑦

⑦より，FC は $\triangle$ ABC の中線 AH の長さに等しい．　（証明終）

(2) AC と EF の交点を I とする．

(1) より，四角形 AEDF は平行四辺形だから，

$\mathrm{AI} = \mathrm{ID} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AD}$ ……⑧

$\mathrm{EI} = \mathrm{IF}$ ……⑨

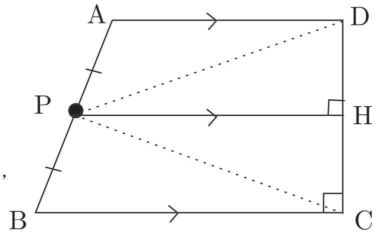
また，$\mathrm{AD} = \mathrm{DC}$

ゆえに，⑧より $\mathrm{ID} = \dfrac{1}{2}\mathrm{DC}$ だから，

$$\begin{aligned}\mathrm{DC} : \mathrm{ID} &= \mathrm{DC} : \frac{1}{2}\mathrm{DC}\\ &= 2 : 1\end{aligned}$$

ここで，⑨より CI は △ CEF の中線である．よって，点 D は中線 CI を 2 : 1 の比に分けるので，△ CEF の重心である．　（証明終）

【9】点 P を通り，BC に平行な線をひき，DC との交点を H とする．



$\mathrm{AD} \,/\!/\, \mathrm{PH} \,/\!/\, \mathrm{BC}$，$\angle \mathrm{BCD} = 90°$ より，

$\angle \mathrm{PHD} = 90°$

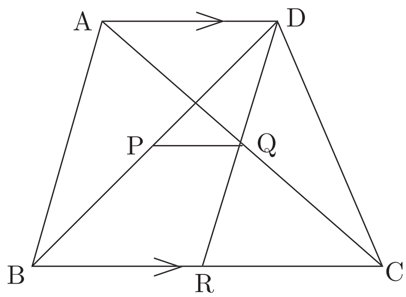
$\mathrm{AP} = \mathrm{PB}$，$\mathrm{AD} \,/\!/\, \mathrm{PH} \,/\!/\, \mathrm{BC}$ だから，台形 ABCD で，

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \frac{1}{2}(\mathrm{AD} + \mathrm{BC}) = \frac{1}{2} \times (6 + 8)\\ &= 7\end{aligned}$$

よって，求める面積は，

$\triangle \mathrm{DPC} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{PH} = \dfrac{1}{2} \times 5 \times 7 = \boldsymbol{\dfrac{35}{2}}$

【10】(1) DQ を結び，その延長と BC の交点を R とする．△ AQD と △ CQR において，



仮定より，$\mathrm{AQ} = \mathrm{CQ}$

対頂角より，$\angle \mathrm{AQD} = \angle \mathrm{CQR}$

$\mathrm{AD} \,/\!/\, \mathrm{BC}$ より，$\angle \mathrm{QAD} = \angle \mathrm{QCR}$

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ AQD ≡ △ CQR

したがって，

$\mathrm{AD} = \mathrm{CR}$ ……①

$\mathrm{DQ} = \mathrm{QR}$ ……②

△ DBR において，②と $\mathrm{DP} = \mathrm{PB}$ から，中点連結定理より，

$\mathrm{PQ} \,/\!/\, \mathrm{BC}$

また，$\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BR}$ だから，①より，

$\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BR} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{BC} - \mathrm{CR}) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{BC} - \mathrm{AD})$　（証明終）

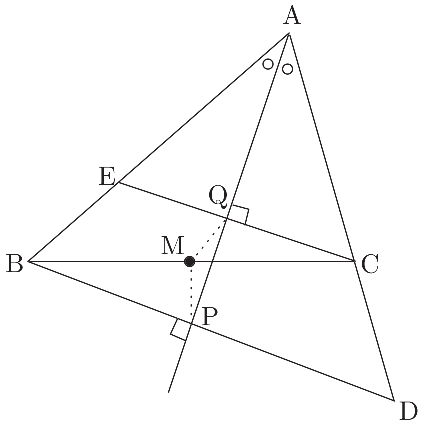
＜別解＞

$\mathrm{AD} \,/\!/\, \mathrm{BC}$，$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{DP} : \mathrm{PB}$ より，$\mathrm{PQ} \,/\!/\, \mathrm{BC}$ を示してもよい．

(2) (1) より，

$$\mathrm{PQ} = \frac{1}{2} \times (11 - 7) = \mathbf{2}$$

【11】BP の延長と AC の延長との交点を D，CQ の延長と AB との交点を E とする．



∠BAP=∠DAP，∠BPA=∠DPA= 90° より，△ ABD は二等辺三角形

$\therefore$ AB = AD ···①，BP = PD ···②

同様にして，

AE = AC ···③，EQ = QC ···④

①，③ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BE} &= \mathrm{AB} - \mathrm{AE}\\ &= \mathrm{AD} - \mathrm{AC}\\ &= \mathrm{CD} \quad \cdots⑤\end{aligned}$$

② と BM = MC より，中点連結定理から $\mathrm{MP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CD}$

④ と BM = MC より，同様に $\mathrm{MQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE}$

これらと ⑤ より，MP = MQ

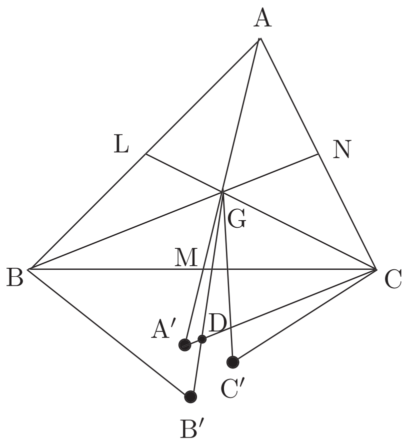
よって，三角形 MPQ は二等辺三角形である．　（証明終）

【12】AB，AC の中点を L，N とすると，

AL=LB，AG=GA′ より，中点連結定理から LG//BA′

同様にして，GN//A′C

よって四角形 GBA′C は平行四辺形となる．



平行四辺形の対辺は等しいので

$BG = A'C$

一方，$\triangle$ BGB′ が正三角形であることから

$BG = B'G$

$\therefore A'C = B'G$ …①

また A′C と B′G との交点を D とすると，

BG//DC より $\angle GDC = \angle DGB = 60^\circ$

一方，$\triangle$ GC′C は正三角形なので，$\angle GC'C = 60^\circ$

$\therefore \angle GDC = \angle GC'C$

$\therefore \angle A'CC' = \angle B'GC'$ …②

①，② および CC′ =GC′ より，

$\triangle A'CC' \equiv \triangle B'GC'$ （2 辺夾角）

$C'A' = C'B'$ …③

また，$\angle A'C'C = \angle B'C'G$

$\therefore \angle B'C'C - \angle A'C'B' = \angle B'C'C - \angle GC'C$

$\therefore \angle A'C'B' = \angle GC'C = 60^\circ$ …④

③，④ より，$\triangle$ A′B′C′ は頂角 60° の二等辺三角形なので，正三角形である．

（証明終）

添削課題

【1】$\triangle$ ABF において，中点連結定理より，DE $/\!/$ BF $\cdots$①

$\mathrm{DE} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BF}$ より，$\mathrm{BF} = 5 \times 2 = 10$

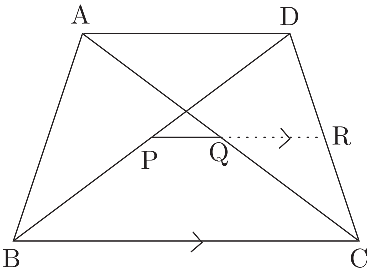
$\triangle$ CED において，F は CE の中点で，①より，DE $/\!/$ BF

だから，中点連結定理の逆より，

$\mathrm{GF} = \dfrac{1}{2}\mathrm{DE} = 2.5$

よって，$\mathrm{BG} = \mathrm{BF} - \mathrm{GF} = \mathbf{7.5}$

【2】PQ の延長と CD の交点を R とする．



$\triangle$ DBC において，DP = PB，PR $/\!/$ BC だから，

中点連結定理の逆より，

$\mathrm{DR} = \mathrm{RC}, \quad \mathrm{PR} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$

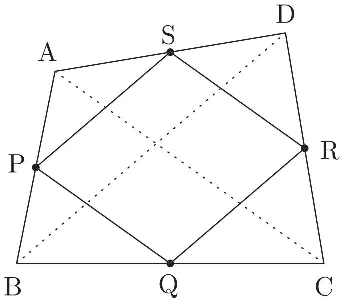
同様に，$\triangle$ CDA において，DR = RC，QR $/\!/$ AD

だから，$\mathrm{QR} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AD}$

よって，

$\mathrm{PQ} = \mathrm{PR} - \mathrm{QR} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} - \dfrac{1}{2}\mathrm{AD} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{BC} - \mathrm{AD})$ （証明終）

【3】(1) $\triangle$ ABD で，S，P はそれぞれ AD，AB の中点だから，中点連結定理より，



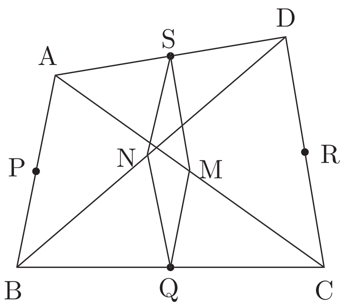
$\mathrm{PS} /\!/ \mathrm{BD}, \quad \mathrm{PS} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD} \quad \cdots$①

同様に，$\triangle$ CBD で，Q，R はそれぞれ BC，CD の中点だから，

$\mathrm{QR} /\!/ \mathrm{BD}, \quad \mathrm{QR} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BD} \quad \cdots$②

①，②より，四角形 PQRS は 1 組の対辺が平行で，その長さが等しいから，平行四辺形である．　（証明終）

(2) $\triangle$ DAB で，S，N はそれぞれ AD，BD の中点だから，中点連結定理より，



$\mathrm{SN} /\!/ \mathrm{AB}, \quad \mathrm{SN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} \quad \cdots$③

同様に，$\triangle$ CAB で，M，Q はそれぞれ AC，BC の中点だから，

$\mathrm{MQ} /\!/ \mathrm{AB}, \quad \mathrm{MQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} \quad \cdots$④

③，④より，SNQM は平行四辺形だから，SQ と MN は互いの中点で交わる．また，

(1) より，平行四辺形 PQRS において，PR と SQ も互いの中点で交わるから，PR，SQ，MN は一点で交わる．　（証明終）

小テスト

【1】AD // EF // BC, AE : EB = 2 : 3 だから,

DF : FC = AE : EB より, 9 : x = 2 : 3 .

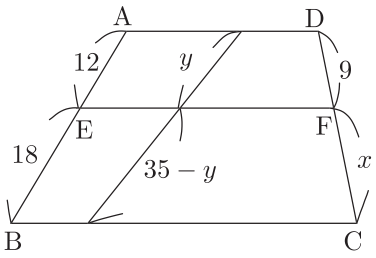
よって

$$x = \mathbf{\frac{27}{2}}$$

また, $y : (35 - y) = \mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 2 : 3$. よって

$3y = 2(35 - y)$ より, $5y = 70$

よって, $y = \mathbf{14}$



問題

【1】(1) AB : AC = BD : DC より，

$10 : 6 = x : y$

$x : y = 5 : 3$

$x + y = 12$ より，

$x = 12 \times \dfrac{5}{5+3} = \mathbf{\dfrac{15}{2}}$

$y = 12 \times \dfrac{3}{5+3} = \mathbf{\dfrac{9}{2}}$

(2) CA : CB = AD : DB より，

$8 : x = 4 : 6$

$\therefore x = \mathbf{12}$

DE // AC より，

BC : EC = BA : DA より，

$12 : y = (6+4) : 4$

$y = \mathbf{\dfrac{24}{5}}$

【2】∠ABE = ∠CBE より，

AE : EC = BA : BC = 9 : 6 = 3 : 2

よって，AE : AC = 3 : (3 + 2) = 3 : 5

したがって，△ ADE∽ △ ABC で，その相似比は，AE : AC = 3 : 5

だから，周の長さの比も 3 : 5 である．

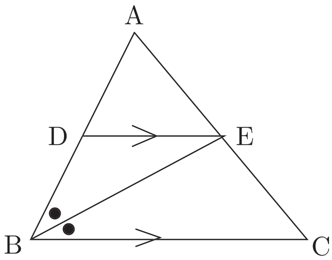
ゆえに，

(△ ADE の周の長さ) : (△ ABC の周の長さ) = 3 : 5

(△ ADE の周の長さ) : (9 + 6 + 10) = 3 : 5

(△ ADE の周の長さ) : 25 = 3 : 5

(△ ADE の周の長さ) = **15**



【3】ME は ∠AMB の 2 等分線だから，

AE : EB = AM : BM ……①

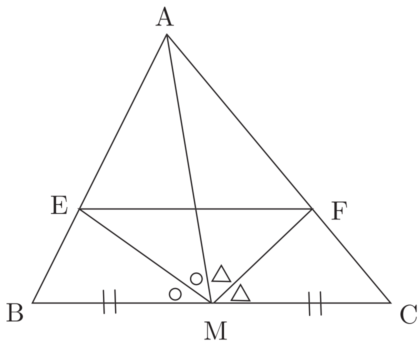
MF は ∠AMC の 2 等分線だから，

AF : FC = AM : CM ……②

仮定より，BM = CM だから，①，②より，

AE : EB = AF : FC

よって，EF // BC　（証明終）



【4】(1) それぞれ AD, DB を底辺とみると，2 つの三角形は高さが等しいので，

$\triangle \mathrm{ADC} : \triangle \mathrm{DBC} = \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 9 : 6 = \mathbf{3 : 2}$

(2) $\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{DBC} = 5 : (8-5) = \mathbf{5 : 3}$

(3) DE // BC より，$\triangle \mathrm{ADE} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ が成り立ち，その相似比は，

$\mathrm{AE} : \mathrm{AC} = 5 : (5+2) = 5 : 7$

よって，$\triangle \mathrm{ADE} : \triangle \mathrm{ABC} = 5^2 : 7^2 = 25 : 49$ だから，

$\triangle \mathrm{ADE}$: 四角形 $\mathrm{DBCE} = 25 : (49-25) = \mathbf{25 : 24}$

(4) $\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD}$ より，$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 8 : 6 = 4 : 3$

したがって，それぞれ BD, BC を底辺とみると，2 つの三角形は高さが等しいので，

$\triangle \mathrm{ABD} : \triangle \mathrm{ABC} = \mathrm{BD} : \mathrm{BC} = 4 : (4+3) = \mathbf{4 : 7}$

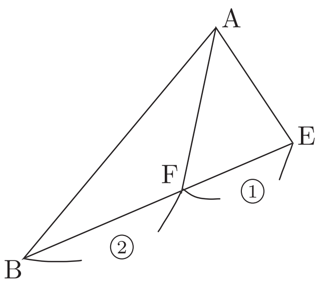
(5) $\triangle \mathrm{BDE} : \triangle \mathrm{CDE} = 6 : 4 = 3 : 2$

$\triangle \mathrm{BDE} = 3S$，$\triangle \mathrm{CDE} = 2S$ とおくと，

$\triangle \mathrm{AEC} = \triangle \mathrm{CDE} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}S$

$\therefore \triangle \mathrm{BDE} : \triangle \mathrm{AEC} = 3S : \dfrac{8}{3}S = \mathbf{9 : 8}$

【5】BE は $\triangle \mathrm{ABC}$ の中線だから，



$$\frac{\triangle \mathrm{ABE}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}$$

$\triangle \mathrm{ABE} = \dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}S$

F は $\triangle \mathrm{ABC}$ の中線の交点だから, F は $\triangle \mathrm{ABC}$ の重心であることより，

$\mathrm{BF} : \mathrm{FE} = 2 : 1$

したがって，$\dfrac{\triangle \mathrm{AFE}}{\triangle \mathrm{ABE}} = \dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{BE}} = \dfrac{1}{3}$

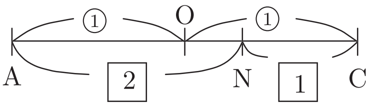
$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{AFE} &= \frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABE}\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S\\ &= \frac{1}{6}S\end{aligned}$$

よって，$\triangle \mathrm{AFE} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}S}$

【6】(1) AD // BC より，$\triangle$ AND∽ $\triangle$ CNM だから，

$\mathrm{MN} : \mathrm{ND} = \mathrm{CM} : \mathrm{AD} = \mathbf{1 : 2}$

(2) 平行四辺形の対角線は互いに他を 2 等分するので，



$\mathrm{AO} : \mathrm{OC} = 1 : 1$

(1) より，$\mathrm{AN} : \mathrm{NC} = \mathrm{AD} : \mathrm{CM} = 2 : 1$

したがって，$\mathrm{AO} : \mathrm{ON} : \mathrm{NC} = \mathbf{3 : 1 : 2}$

(3) (1) より，$\triangle$ AND∽ $\triangle$ CNM で，その相似比は 2 : 1 だから，

$\triangle \mathrm{AND} : \triangle \mathrm{CNM} = 2^2 : 1^2 = \mathbf{4 : 1}$

(4) 平行四辺形 ABCD の面積を S とすると，

$\triangle \mathrm{ACD} = \dfrac{1}{2}S$

また，(2) より，

$\triangle \mathrm{ODN} : \triangle \mathrm{ACD} = \mathrm{ON} : \mathrm{AC} = 1 : (3 + 1 + 2) = 1 : 6$

$$\triangle \mathrm{ODN} = \frac{1}{6}\triangle \mathrm{ACD} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}S = \frac{1}{12}S$$

したがって，$\triangle$ ODN: 平行四辺形 ABCD $= \dfrac{1}{12}S : S = \dfrac{1}{12} : 1 = \mathbf{1 : 12}$

【7】(1) 2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle \mathrm{BEF} \backsim \triangle \mathrm{CDF}$

ゆえに，$\mathrm{BF} : \mathrm{CF} = \mathrm{BE} : \mathrm{CD} = 2 : 3$ ……①

また，2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle \mathrm{ABF} \backsim \triangle \mathrm{GCF}$

ゆえに，$\mathrm{BA} : \mathrm{CG} = \mathrm{BF} : \mathrm{CF}$ ……②

①，②より，

$3 : \mathrm{CG} = 2 : 3$

$\mathrm{CG} = \dfrac{9}{2}$

よって，$\mathrm{CG} = \mathbf{\dfrac{9}{2}\ (cm)}$

(2) $\triangle$ BEF$= S$ とする．

高さの等しい三角形の面積比は底辺の比に等しいから，

$\dfrac{\triangle \mathrm{ABF}}{\triangle \mathrm{BEF}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} = \dfrac{3}{2}$

ゆえに，$\triangle \mathrm{ABF} = \dfrac{3}{2}\triangle \mathrm{BEF} = \dfrac{3}{2}S$

$\triangle$ ABF∽ $\triangle$ GCF より，相似な三角形の面積比は相似比の 2 乗だから，

$\dfrac{\triangle \mathrm{GCF}}{\triangle \mathrm{ABF}} = \dfrac{\mathrm{CF}^2}{\mathrm{BF}^2} = \dfrac{3^2}{2^2}$

ゆえに，

$\triangle \mathrm{GCF} = \dfrac{9}{4}\triangle \mathrm{ABF}$

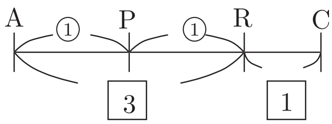
$= \dfrac{9}{4} \times \dfrac{3}{2}S = \dfrac{27}{8}S$

よって，$\triangle \mathrm{CFG} = \dfrac{27}{8}\triangle \mathrm{BEF}$ より，$\mathbf{\dfrac{27}{8}}$ **(倍)**

【8】(1) AR : RC = △SAR: △SRC= **3 : 1**

(2) AP : PR = △QAP: △QPR= 1 : 1 だから，(1) より，

AP : PR : RC = **3 : 3 : 2**

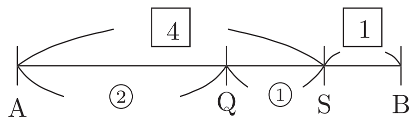


(3) AQ : QS = △RAQ : △RQS = 2 : 1

AS : SB = △CAS : △CSB = 4 : 1

したがって，

AQ : QS : SB = **8 : 4 : 3**



【9】D から AB，AC にそれぞれ垂線を引き，AB，AC との交点をそれぞれ I，H とする．

△ AID と△ AHD において，

$\angle\mathrm{AID} = \angle\mathrm{AHD} = 90^\circ$

AD は共通

仮定より $\angle\mathrm{IAD} = \angle\mathrm{HAD}$

以上より，直角三角形の斜辺と 1 鋭角がそれぞれ等しいので，

△ AID ≡ △ AHD

∴ DI = DH ……①

ここで，△ ABD，△ ACD の面積比を考える．AB，AC をそれぞれ底辺と見たときの高さは DI，DH となるが，①より DI = DH であるから，

△ ABD : △ ACD = AB : AC ……②

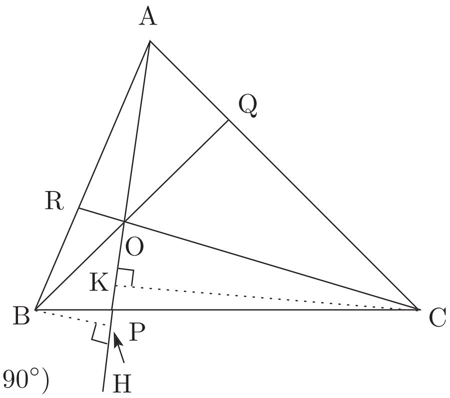
一方，BD，DC を底辺と見ると，高さは共通なので

△ ABD : △ ACD = BD : DC ……③

②，③より，

AB : AC = BD : DC　　(証明終)

【10】(1) AO を底辺とみると, 高さの比が BP : PC であることから明らかなのだが,「証明せよ」とあるので，ここでは，高さの比が BP : PC となる理由までしっかりと示しておこう．



≪証明≫

B, C から AO またはその延長上に下ろした垂線の足をそれぞれ H，K とする．

△ BPH と △ CPK において，

$\angle\mathrm{BPH} = \angle\mathrm{CPK}$，　$\angle\mathrm{BHP} = \angle\mathrm{CKP}\ (= 90^\circ)$

より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

△ BPH ∽ △ CPK

したがって，BP : CP = BH : CK ……①

ここで，AO を底辺とみると，△ AOB と △ COA の面積比は，高さの比に等しいわけで，

△ AOB : △ COA = BH : CK ……②

①，②より，BP : CP = △ AOB: △ COA

つまり，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \dfrac{\triangle\,\mathrm{AOB}}{\triangle\,\mathrm{COA}}$ ……③　　(証明終)

(2) (1) と同様にすると,

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \quad \cdots\cdots④$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\triangle COA}{\triangle BOC} \quad \cdots\cdots⑤$$

③, ④, ⑤の辺々をかけると,

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle AOB}{\triangle COA} \times \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \times \frac{\triangle COA}{\triangle BOC} = 1$$

(証明終)

(3) (2) で導いたことがらを「チェバの定理」という. この定理を用いると,

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{3}{10}$$

つまり, $BP : PC = \mathbf{3 : 10}$

【11】(1) $\triangle AMQ$ と $\triangle ABC$ は $\angle A$ を共有するので, その面積比は,

$$\frac{\triangle AMQ}{\triangle ABC} = \frac{AM}{AB} \times \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

よって, $\triangle AMQ = \frac{1}{6}\triangle ABC = \frac{1}{6} \times 18 = \mathbf{3\ (cm^2)}$

(2) 直接, $\triangle MPQ$ と $\triangle ABC$ の面積を比べることはできない.

そこで, $\triangle MPQ = \triangle ABC - (\triangle AMQ + \triangle BPM + \triangle CQP)$ と考える.

(1) と同様にして,

$$\frac{\triangle BPM}{\triangle ABC} = \frac{BM}{BA} \times \frac{BP}{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

よって, $\triangle BPM = \frac{1}{3}\triangle ABC = \frac{1}{3} \times 18 = 6$

また, $\dfrac{\triangle CQP}{\triangle ABC} = \dfrac{CP}{CB} \times \dfrac{CQ}{CA} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

よって, $\triangle CQP = \frac{2}{9}\triangle ABC = \frac{2}{9} \times 18 = 4$

以上から,

$$\begin{aligned}\triangle MPQ &= \triangle ABC - (\triangle AMQ + \triangle BPM + \triangle CQP) \\ &= 18 - (3 + 6 + 4) \\ &= \mathbf{5\ (cm^2)}\end{aligned}$$

【12】(1) $\triangle$ ACE と $\triangle$ EBF において，

$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{EBF}$ ……①

また，

$\angle \mathrm{ACE} + \angle \mathrm{CAE} = \angle \mathrm{AEB}$

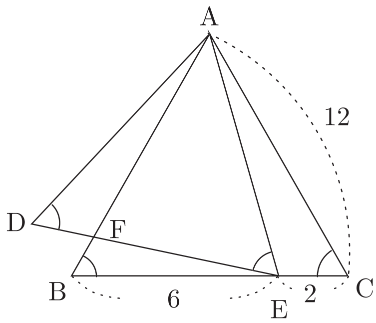
$= \angle \mathrm{AED} + \angle \mathrm{BEF}$

$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{AED}$ より，

$\angle \mathrm{CAE} = \angle \mathrm{BEF}$ ……②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle \mathrm{ACE} \backsim \triangle \mathrm{EBF}$



よって，

$\mathrm{AC} : \mathrm{EB} = \mathrm{CE} : \mathrm{BF}$

$12 : 6 = 2 : \mathrm{BF}$

$\mathrm{BF} = 1$

ゆえに，$\mathrm{AF} = \mathrm{AB} - \mathrm{BF} = 12 - 1 = \mathbf{11}$

(2) $\mathrm{AE} = \mathrm{AD} = x$ とする．

$\triangle$ ACE と $\triangle$ ADF において，

$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{ADF}$ ……①

$\angle \mathrm{CAE} = \angle \mathrm{BAC} - \angle \mathrm{FAE}$

$= \angle \mathrm{DAE} - \angle \mathrm{FAE}$

$= \angle \mathrm{DAF}$ ……②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，$\triangle \mathrm{ACE} \backsim \triangle \mathrm{ADF}$

よって，

$\mathrm{AC} : \mathrm{AD} = \mathrm{AE} : \mathrm{AF}$

$12 : x = x : 11$

$x^2 = 132$

ゆえに，

$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ADE} = \mathrm{AC}^2 : \mathrm{AD}^2$

$= 12^2 : x^2$

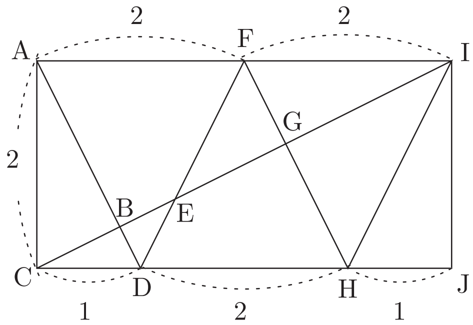
$= 144 : 132$

$= \mathbf{12 : 11}$

【13】(1) $\triangle$ ABI∽$\triangle$ DBC より，

$\mathrm{AB}:\mathrm{DB}=\mathrm{AI}:\mathrm{DC}$

$=\mathbf{4:1}$



(2) $\triangle$ IFE∽$\triangle$ CDE より，

$\mathrm{IE}:\mathrm{CE}=\mathrm{IF}:\mathrm{CD}=2:1$ ……①

(1) より，$\mathrm{IB}:\mathrm{BC}=4:1$ ……②

①，②より，$\mathrm{CB}:\mathrm{BE}:\mathrm{EI}=3:2:10$

よって，

$\triangle \mathrm{ABC}:\triangle \mathrm{BDE}=(4\times 3):(1\times 2)$

$=\mathbf{6:1}$

(3) $\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{ACI}\times\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CI}}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

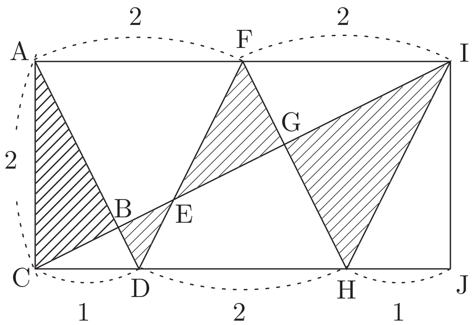
$\triangle \mathrm{BDE}=\triangle \mathrm{ABC}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{15}$

$\triangle \mathrm{EFG}=\triangle \mathrm{FDH}\times\dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FD}}\times\dfrac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FH}}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{15}$

$\triangle \mathrm{GHI}=\triangle \mathrm{ICH}\times\dfrac{\mathrm{IG}}{\mathrm{IC}}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$

よって，

$S=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{BDE}+\triangle \mathrm{EFG}+\triangle \mathrm{GHI}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{8}{15}+\dfrac{6}{5}=\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$



【14】(1) △ PBQ と △ CBA において，

$\angle PBQ = \angle CBA$　（共通）

仮定より，$\angle PQB = \angle CAB = 90°$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

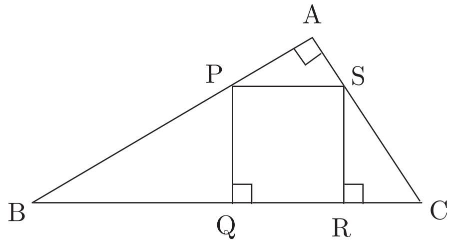
△ PBQ ∽ △ CBA

対応する辺の比は等しいから，

$BP : PQ = BC : CA$

$= 10 : 6$

$= \mathbf{5 : 3}$



(2) △ BQP と △ PAS において，仮定より，

$\angle BQP = \angle PAS = 90°$

BC // PS より，

$\angle PBQ = \angle SPA$

2 組の角がそれぞれ等しいから，

△ BQP ∽ △ PAS

四角形 PQRS は正方形より，$PQ = PS$ だから，

$BP : PS = BP : PQ$

(1) の結果より，

$BP : PS = 5 : 3$

よって，相似な図形の面積の比は，相似比の 2 乗だから，

$\triangle BQP : \triangle PAS = BP^2 : PS^2$

$= \mathbf{25 : 9}$

(3) (2) より，△ BQP∽ △ PAS

$PQ = PS = x$ とすると，$BP : PQ = 5 : 3$ より $BP = \frac{5}{3}x$

また，PS // BC より，△ APS∽ △ ABC だから，$PS : AP = BC : AB = 10 : 8 = 5 : 4$ より，$AP = \frac{4}{5}x$

よって，$\frac{5}{3}x + \frac{4}{5}x = 8$

$x = \mathbf{\frac{120}{37}}$ **(cm)**

(4) (2) と同様にして，△ BQP∽ △ SRC だから，

$BQ : SR = BQ : PQ$

$= 4 : 3$

よって，

$\triangle BQP : \triangle SRC = 4^2 : 3^2$

$= \mathbf{16 : 9}$

【15】C を通り，DA に平行な直線と AB との交点を F とする．また，BA の延長上の点を E とする．

このとき $AD \parallel FC$ より，平行線の錯角は等しいので，

$\angle FCA = \angle DAC$

同位角は等しいので，

$\angle CFA = \angle DAE$

これらと，仮定 $\angle DAC = \angle DAE$ より，

$\angle FCA = \angle CFA$

よって，$\triangle$ AFC は二等辺三角形であり，$AC = AF$ ……①

一方，$CF \parallel AD$ より，平行線と比の性質より，

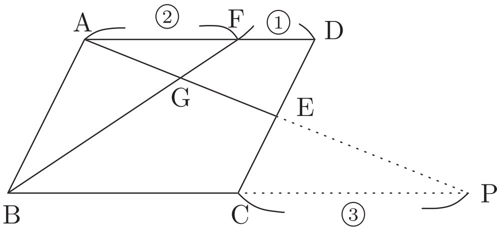
$AB : AF = BD : DC$

①より，

$AB : AC = BD : DC$　（証明終）

添削課題

【1】(1) 右図で，$\triangle$ ADE$\equiv\triangle$ PCE より，



$\mathrm{PC}=\mathrm{AD},\quad \mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\quad\cdots$①

AD // BP より，

$\mathrm{AG}:\mathrm{GP}=\mathrm{AF}:\mathrm{BP}=1:3$

よって，$\mathrm{AG}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AP}\quad\cdots$②

①，②より，$\mathrm{AE}:\mathrm{AG}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4}=2:1$ だから，

$$\frac{\triangle \mathrm{AGF}}{\triangle \mathrm{AED}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AD}}\times\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AE}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) 平行四辺形 ABCD の面積 S とすると，$\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}S$

$\triangle\mathrm{AED}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DC}}\times\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{4}S$ だから，

$\triangle\mathrm{AGF}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{AED}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}S=\dfrac{1}{12}S$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$ 倍

【2】(1) $\triangle$ ABI$\backsim\triangle$ FDI より，

$\mathrm{AI}:\mathrm{FI}=\mathrm{AB}:\mathrm{FD}=\mathbf{3:2}$

(2) (1) より，$\mathrm{DI}:\mathrm{IB}=2:3$

また，DH $=$ HB であるから，

$\mathrm{DI}:\mathrm{IH}:\mathrm{HB}=4:1:5$

すなわち，$\mathrm{DI}:\mathrm{IH}=\mathbf{4:1}$

(3) $\triangle$ ACD の面積を S とする．

$\mathrm{DF}:\mathrm{FC}=2:1$ より，$\triangle\mathrm{ACF}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{3}S$

$\triangle$ ACF において，$\mathrm{AH}:\mathrm{AC}=1:2$，$\mathrm{AI}:\mathrm{AF}=3:5$ より，

$\triangle\mathrm{AHI}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\times\triangle\mathrm{ACF}=\dfrac{1}{10}S\quad\cdots$①

また，AH $=$ HC より，$\triangle\mathrm{DCH}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}S$

$\triangle$ DCH において，$\mathrm{DF}:\mathrm{DC}=2:3$，$\mathrm{DI}:\mathrm{DH}=4:5$ より，

$\triangle\mathrm{DFI}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\triangle\mathrm{DCH}=\dfrac{4}{15}S\quad\cdots$②

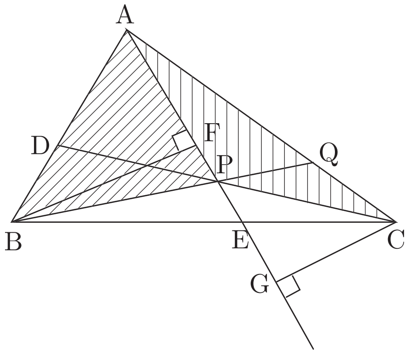
①，②より，$\triangle\mathrm{AHI}:\triangle\mathrm{DFI}=\dfrac{1}{10}S:\dfrac{4}{15}S=\mathbf{3:8}$

＜別解＞

$\triangle$ AHI と $\triangle$ FDI において，$\angle\mathrm{AIH}=\angle\mathrm{FID}$ より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AHI}:\triangle\mathrm{FDI}&=(\mathrm{AI}\times\mathrm{HI}):(\mathrm{FI}\times\mathrm{DI})\\&=(3\times1):(2\times4)\\&=\mathbf{3:8}\end{aligned}$$

【3】(1) △ABP と △ACP は底辺 AP が共通であるから，面積の比は高さの比に等しい．AE またはその延長上に B, C から下ろした垂線をそれぞれ BF, CG とすると，



$\angle \mathrm{BFE} = \angle \mathrm{CGE} = 90^\circ$

より，錯角が等しいから，BF // GC

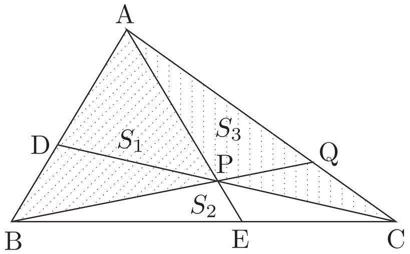
よって，△BEF∽△CEG だから，

BF : CG = BE : EC

これより，

△ABP: △ACP= BF : CG = BE : CE = 3 : 2　（証明終）

(2) 右の図のように，△ABP，△BCP，△CAP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると，(1) より



$S_1 : S_3 = 3 : 2$

同様に，$S_2 : S_3 = \mathrm{BD} : \mathrm{DA} = 2 : 3$

よって，$S_1 : S_2 : S_3 = 9 : 4 : 6$

だから，

$\mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = S_2 : S_1 = \mathbf{4 : 9}$

(3) 底辺を BP, PQ とすると高さ共通より，

△ABP: △APQ= BP : PQ

同様に，△CBP: △CPQ= BP : PQ だから，

(△ABP+ △CBP) : (△APQ+ △CPQ) = BP : PQ

よって，$\mathrm{BP} : \mathrm{PQ} = (S_1 + S_2) : S_3 = (9 + 4) : 6 = \mathbf{13 : 6}$

小テスト

【1】　四角形 ABCD は平行四辺形より，$BO = DO$

$\triangle$ ABD において，E は 2 本の中線 AO, BF の交点より，重心であるといえる．

よって，$AE : EO = 2 : 1$

$AO = CO$ より，$AE : EO : OC = 2 : 1 : (2 + 1) = \mathbf{2 : 1 : 3}$

１３章　相似（５）

問題

【1】(1) 相似比 $1:2$ より，①$\mathbf{1:8}$，②$\mathbf{1:4}$

■確認

A の体積 V_A，B の体積 V_B とすると，$V_A = abc$，$V_B = (2a)\times(2b)\times(2c) = 8abc$

$\therefore V_A : V_B = abc : 8abc = 1:8$

A の表面積 S_A，B の表面積 S_B とすると，
$S_A = 2(ab+bc+ca)$，$S_B = 2\{(2a)\times(2b)+(2b)\times(2c)+(2c)\times(2a)\} = 8(ab+bc+ca)$

$\therefore S_A : S_B = 2(ab+bc+ca) : 8(ab+bc+ca) = 1:4$

(2) 相似比 $2:3$ より，①$2^3 : 3^3 = \mathbf{8:27}$，②$2^2 : 3^2 = \mathbf{4:9}$

(3) 相似比 $\dfrac{5}{6} : \dfrac{10}{9} = \dfrac{5}{6}\times\dfrac{18}{5} : \dfrac{10}{9}\times\dfrac{18}{5} = 3:4$ より，
①$3^3 : 4^3 = \mathbf{27:64}$，②$3^2 : 4^2 = \mathbf{9:16}$

【2】(1) 正方形 ABCD ∽ 正方形 EFGH

相似比は，$\mathrm{AB : EF = PA : PE} = 4:1$

したがって，面積比は，(正方形 ABCD) : (正方形 EFGH) $= 16:1$

よって，

8×8 : (正方形 EFGH) $= 16:1$

(正方形 EFGH) $=$ **4 (cm²)**

(2) (四角すい P − ABCD) ∽ (四角すい P − EFGH)

相似比は $4:1$ であるから，

体積比は (四角すい P − ABCD) : (四角すい P − EFGH) $= 4^3 : 1^3 = 64:1$

よって，**64 (倍)**

【3】(1) △ABC∽△DEF で，

相似比は，

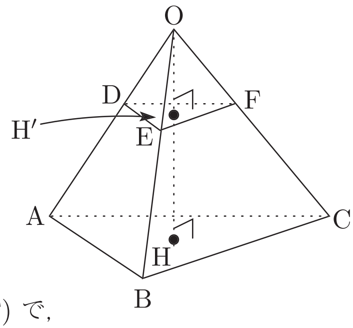
$\mathrm{BC : EF = OC : OF} = 10:4 = 5:2$

したがって，面積比は，

△ABC ∽ △DEF $= 5^2 : 2^2 = 25:4$

75 : △DEF $= 25:4$

よって，△DEF= **12 (cm²)**



(2) (三角すい O − ABC) ∽ (三角すい O − DEF) で，

相似比は，$\mathrm{OC : OF} = 5:2$

よって，

$\mathrm{OH : OH'} = 5:2$

$8 : \mathrm{OH'} = 5:2$

$\mathrm{OH'} = \boldsymbol{\dfrac{16}{5}}$ **(cm)**

(3) (2) より，三角すい $\mathrm{O-ABC}$ と三角すい $\mathrm{O-DEF}$ の体積比は，

$$5^3 : 2^3 = 125 : 8$$

ここで，$(\text{三角すい O} - \mathrm{ABC}) = \dfrac{1}{3} \times 75 \times 8 = 200$

よって，$(\text{三角すい O} - \mathrm{DEF}) = \dfrac{8}{125} \times 200 = \dfrac{64}{5}$

したがって，$(\text{三角すい台 DEF} - \mathrm{ABC}) = 200 - \dfrac{64}{5} = \boldsymbol{\dfrac{936}{5}}$ **(cm³)**

＜別解＞

$(\text{三角すい O} - \mathrm{ABC}) : (\text{三角すい O} - \mathrm{DEF}) = 125 : 8$ より，

$$\begin{aligned}(\text{三角すい台 DEF} - \mathrm{ABC}) &= (\text{三角すい O} - \mathrm{ABC}) \times \left(1 - \frac{8}{125}\right) \\ &= 200 \times \frac{117}{125} \\ &= \boldsymbol{\frac{936}{5}}\ \mathbf{(cm^3)}\end{aligned}$$

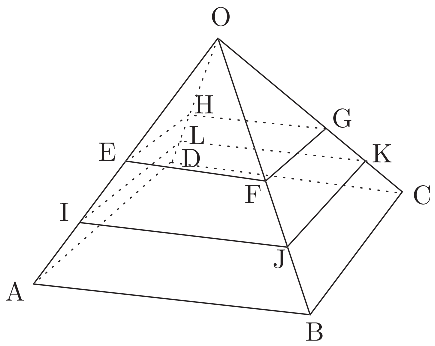
【4】(1) $\mathrm{O-ABCD}$ の体積を V とすると，$\mathrm{O-EFGH}$ と $\mathrm{O-ABCD}$ の相似比が $1:2$ なので，

$$V_1 : V = 1^3 : 2^3 = 1 : 8$$

$$\therefore V_1 = \frac{1}{8}V$$

$$\therefore V_2 = V - \frac{1}{8}V = \frac{7}{8}V$$

$$\therefore V_1 : V_2 = \frac{1}{8}V : \frac{7}{8}V = \mathbf{1:7}$$



(2) $\mathrm{O-IJKL}$ と $\mathrm{O-ABCD}$ の相似比は，

$$\mathrm{OI : OA} = \frac{3}{4}\mathrm{OA : OA} = 3 : 4$$

$\mathrm{O-IJKL}$ の体積は $(V_1 + V_3)$ と表せるので，

$$(V_1 + V_3) : V = 3^3 : 4^3 = 27 : 64$$

$$\therefore V_1 + V_3 = \frac{27}{64}V$$

$V_1 = \dfrac{1}{8}V$ より，

$$V_3 = \frac{27}{64}V - \frac{1}{8}V = \frac{27-8}{64}V = \frac{19}{64}V$$

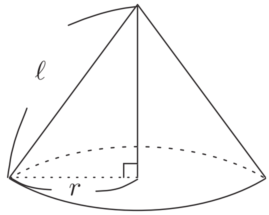
一方，

$$V_4 = V - (V_1 + V_3) = V - \frac{27}{64}V = \frac{64-27}{64}V = \frac{37}{64}V$$

$$\therefore V_3 : V_4 = \frac{19}{64}V : \frac{37}{64}V = \mathbf{19:37}$$

【5】(1) (側面の展開図の中心角) $= \dfrac{6}{10} \times 360^\circ = 216^\circ$

よって，(側面積) $= 10^2\pi \times \dfrac{216}{360} = \boldsymbol{60\pi}$ **(cm²)**



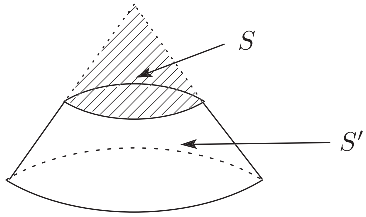
＜別解＞

母線の長さが ℓ，底面の半径が r である円すいの側面積は,

$S = \pi \ell r$

で求められる．よって，(側面積) $= \pi \times 10 \times 6 = \boldsymbol{60\pi}$ **(cm²)**

(2) 斜線部の円すいの側面積を S，円すい台の側面積を S' とする．



(1) より，$S + S' = 60\pi$

条件より,

$S' = 45\pi$

$\therefore \quad S = 15\pi$

よって，$(S + S') : S = 4 : 1 = 2^2 : 1^2 \quad \cdots\cdots$ ①

ここで，斜線部の円すいと，もとの円すいは相似であるから，①より，相似比は，$2 : 1$ であるとわかる．よって，体積比は，$2^3 : 1^3 = 8 : 1$ である．

したがって,

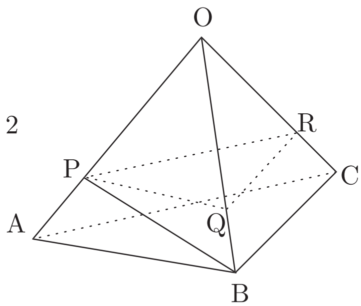
$$(\text{円すい台の体積}) = 6^2\pi \times 8 \times \frac{1}{3} - 6^2\pi \times 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}$$
$$= \boldsymbol{84\pi\ (\mathrm{cm}^3)}$$

＜別解＞

体積比は，$8 : 1$ より,

$$(\text{円すい台の体積}) = (\text{もとの円すいの体積}) \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)$$
$$= 6^2\pi \times 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{8}$$
$$= \boldsymbol{84\pi\ (\mathrm{cm}^3)}$$

【6】(1) C を頂点，面 OAB を底面とみると，三角すい C−OAB と C−OPB は高さが等しいので,



$V : V_1 = \triangle\,\mathrm{OAB} : \triangle\,\mathrm{OPB} = \mathrm{OA} : \mathrm{OP} = 3 : 2$

$\therefore \boldsymbol{V_1 = \dfrac{2}{3}V}$

(2) 同じく C を頂点，面 OAB を底面みると,

$V_1 : V_2 = \triangle\,\mathrm{OPB} : \triangle\,\mathrm{OPQ}$
$= \mathrm{OB} : \mathrm{OQ} = 3 : 2$

$\therefore V_2 = \dfrac{2}{3}V_1 = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}V\right) = \boldsymbol{\dfrac{4}{9}V}$

(3) P を頂点，面 OBC を底面とみると,

$V_2 : V_3 = \triangle\,\mathrm{OQC} : \triangle\,\mathrm{OQR} = \mathrm{OC} : \mathrm{OR} = 3 : 2$

$\therefore V_3 = \dfrac{2}{3}V_2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{9}V = \boldsymbol{\dfrac{8}{27}V}$

【7】面 ADB において，BG は ∠ABD の二等分線なので

$\mathrm{AG}:\mathrm{GD}=\mathrm{AB}:\mathrm{DB}=4:2=2:1$ ⋯①

GE//DB より，

$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{AG}:\mathrm{GD}=2:1$ ⋯②

面 ABC において，

$\mathrm{AF}:\mathrm{FC}=\mathrm{AB}:\mathrm{CB}=4:3$ ⋯③

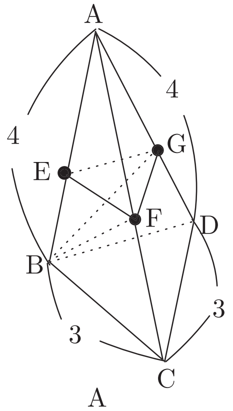
三角すい A−BCD の体積を V，三角すい A−EFG の体積を V_1，三角すい台 EFG−BCD の体積を V_2 とすると，

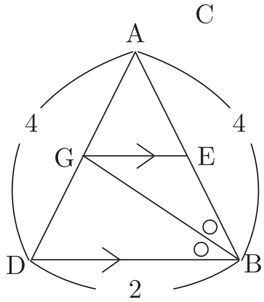
①，②，③ より，

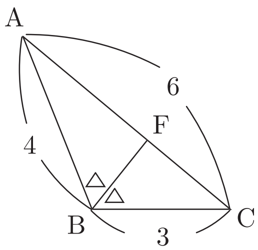
$$V_1=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}V=\frac{16}{63}V$$

$$\therefore V_2=V-V_1=\frac{63-16}{63}V=\frac{47}{63}V$$

$$\therefore V_1:V_2=\frac{16}{63}V:\frac{47}{63}V=\mathbf{16:47}$$







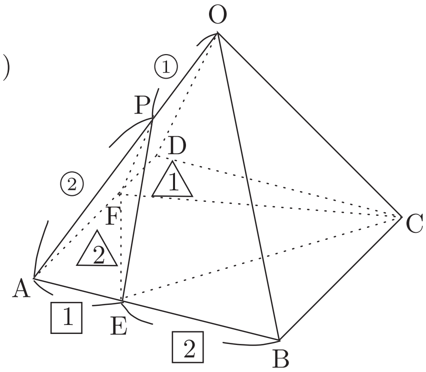
【8】(1)

(三角すい P − AEF)

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times(\text{三角すい O}-\text{ABD})$$

$$=\frac{4}{27}\times\frac{V}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{27}V}$$

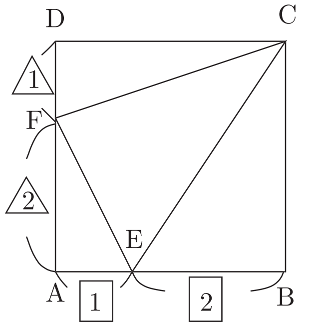


(2) 正方形 ABCD の面積を S とすると,

$\triangle$ AEF $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{9}S$

$\triangle$ DFC $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{6}S$

$\triangle$ CBE $= \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{3}S$



よって,

$\triangle$ CEF $= S - \left(\dfrac{1}{9}S + \dfrac{1}{6}S + \dfrac{1}{3}S\right)$

$= \dfrac{7}{18}S$

また, 四角すい O $-$ ABCD と三角すい P $-$ CEF の高さの比は,

OA : PA $= 3 : 2$

ゆえに,

(三角すい P $-$ CEF) $= \dfrac{7}{18} \times \dfrac{2}{3} \times V = \boldsymbol{\dfrac{7}{27}V}$

<別解>

それぞれの三角形を S を用いて表した後, 以下のように解く方法もある.

$\triangle$ AEF: $\triangle$ CEF$= \dfrac{1}{9}S : \dfrac{7}{18}S = 2 : 7$

三角すい P$-$AEF と三角すい P$-$CEF は高さが等しいから,

(三角すい P $-$ CEF) $= \dfrac{2}{27}V \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{27}V$

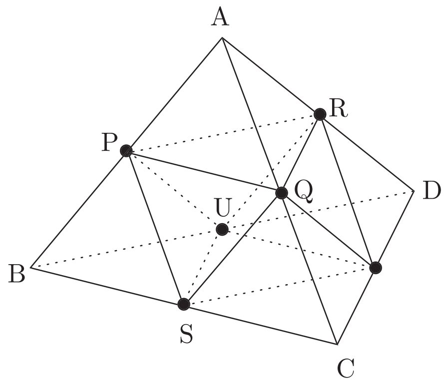
【9】

(1) 相似比 $\dfrac{1}{2}$ なので, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times V = \boldsymbol{\dfrac{V}{8}}$

(2) $V - \dfrac{V}{8} \times 4 = \boldsymbol{\dfrac{V}{2}}$

(3) 正四面体 A$-$BCD の表面積を S とすると, $\triangle$ ABC$= \dfrac{S}{4}$

$\therefore \triangle$ PQS$= \dfrac{S}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{S}{16}$



求める立体は, この $\dfrac{S}{16}$ の面積の三角形 8 つで囲まれているので,

$\dfrac{S}{16} \times 8 = \dfrac{S}{2}$ $\qquad \therefore \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$**倍**

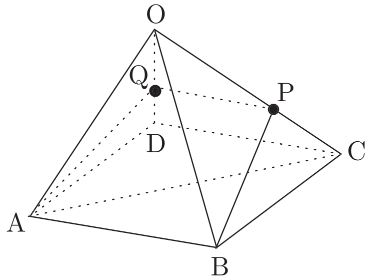
(4) **正八面体**

【10】四角すい O−ABCD の体積を V とする．

A，B，P を通る平面が辺 OD と交わる点を Q とすると，PQ//CD より，

$\mathrm{OQ} : \mathrm{QD} = \mathrm{OP} : \mathrm{PC} = 3 : 2$

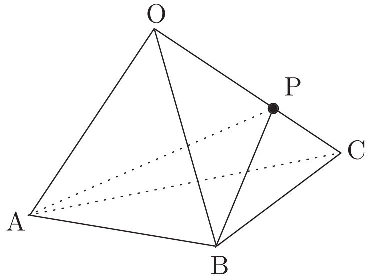
ここで四角すい O−ABCD を O, A, C を通る平面で切断すると，2 つの三角すい O−ABC と O−ADC の体積は等しい ($\because$ △ ABC= △ ADC) ので，共に体積は $\dfrac{1}{2}V$ となる．



(i) 三角すい O−ABC において

OP : OC = 3 : 5 より，三角すい O−ABP の体積を V_1 とすると，

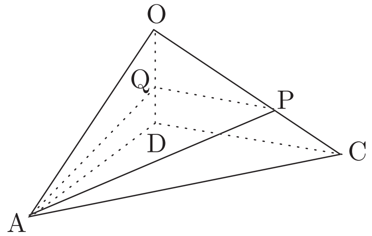
$$V_1 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}V = \frac{3}{10}V \quad \cdots ①$$



(ii) 三角すい O−ADC において

OP : OC = OQ : OD = 3 : 5 より，三角すい O−APQ の体積を V_2 とすると，

$$V_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{1}{2}V = \frac{9}{50}V \quad \cdots ②$$



①，② より，2 つの立体のうち O を含む側の体積 V_3 は

$$V_3 = V_1 + V_2 = \left(\frac{3}{10} + \frac{9}{50}\right)V$$

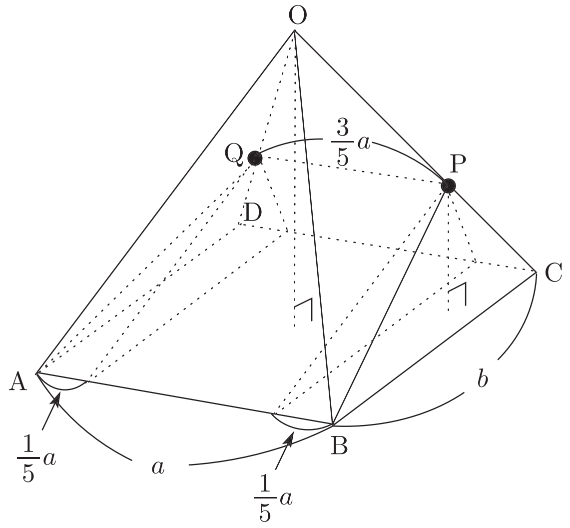
$$= \frac{24}{50}V = \frac{12}{25}V$$

よって残りの部分の体積 V_4 は

$$V_4 = V - V_3 = \frac{13}{25}V$$

$$\therefore V_3 : V_4 = \frac{12}{25}V : \frac{13}{25}V = \mathbf{12 : 13}$$

＜別解＞



図のように下の立体を，2 つの四角すいと，三角柱に分けて考える．

$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$ とする．

また，四角すい O−ABCD の高さを h とすると，下の立体内の四角すいの高さは $\dfrac{2}{5}h$ とかける．

$$\begin{aligned}\text{下の立体} &= b\times\frac{2}{5}h\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}a+\frac{1}{5}a\times b\times\frac{2}{5}h\times\frac{1}{3}\times 2\\ &= \frac{3}{25}abh+\frac{4}{75}abh\\ &= \frac{13}{75}abh\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{上の立体} &= a\times b\times h\times\frac{1}{3}-\frac{13}{75}abh\\ &= \frac{1}{3}abh-\frac{13}{75}abh\\ &= \frac{12}{75}abh\end{aligned}$$

以上より，

$\dfrac{12}{75}abh:\dfrac{13}{75}abh=\mathbf{12:13}$

添削課題

【1】円すい P と全体の円すいは相似で，その相似比は，$(8-2):8=3:4$

よって，体積比は，$3^3:4^3=27:64$

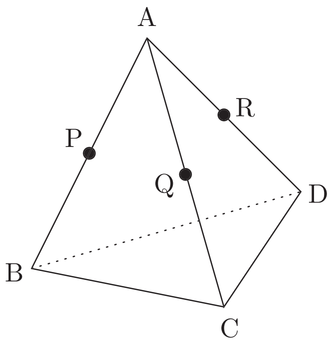
したがって，P と Q の体積比は，$27:(64-27)=27:37$

ゆえに，P よりも Q の方が体積が大きく，Q の体積は全体の体積の $\dfrac{37}{64}$ であるから，

$$\left(\frac{1}{3}\times 3^2\pi\times 8\right)\times\frac{37}{64}=\boldsymbol{\frac{111}{8}\pi}$$

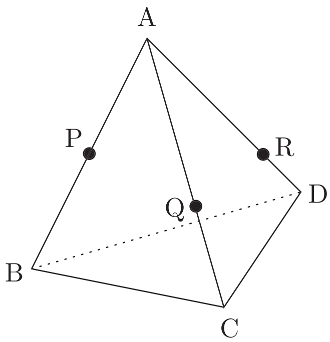
【2】(1) A−PQR と A−BCD の体積比が $1^3:2^3=1:8$ なので，求める体積は

$$96\times\left(1-\frac{1}{8}\right)=96\times\frac{7}{8}=\mathbf{84(cm^3)}$$



(2) A−PQR は A−BCD の $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$ であるので，求める体積は

$$96\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=96\times\frac{3}{4}=\mathbf{72(cm^3)}$$



【3】(1) 切断した小さい方の立体は，図の三角すい R$-$EFG の一部である三角すい台である．

AP : PB = 1 : 1 より，EP : PR = 1 : 1　つまり RB = BF = a

よって，R$-$EFG の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times a\right) \times 2a = \frac{1}{3}a^3$$

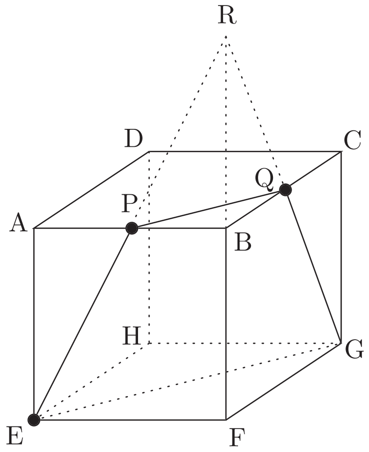
R$-$PBQ と R$-$EFG の相似比が 1 : 2 であることより，

三角すい台 PQB$-$EGF の体積は

$$\frac{1}{3}a^3 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{7}{24}a^3$$

よって 2 つの部分の体積比は

$$\left(1 - \frac{7}{24}\right)a^3 : \frac{7}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3 : \frac{7}{24}a^3 = \mathbf{17 : 7}$$



(2) AP : PB = 1 : 2 より，EP : PR = FB : BR = 1 : 2

$\therefore$ RF = 3BF = $3a$

また，R$-$PBQ と R$-$EFG の相似比は，RB : RF = $2a$: $3a$ = 2 : 3

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQB} - \mathrm{EGF} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times a\right) \times 3a \times \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right\} \\ &= \frac{a^3}{2} \times \frac{19}{27} = \frac{19}{54}a^3\end{aligned}$$

以上より，求める体積比は

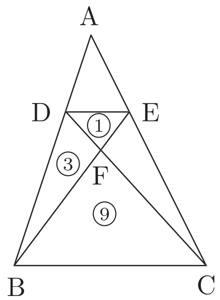
$$\left(1 - \frac{19}{54}\right)a^3 : \frac{19}{54}a^3 = \frac{35}{54}a^3 : \frac{19}{54}a^3 = \mathbf{35 : 19}$$

小テスト

【1】(1) AD : AB = AE : AC = 1 : 3 より
DE // BC,　DE : BC = 1 : 3
よって，BF : FE = BC : DE = **3 : 1**

(2) △ DEF∽ △ CBF (相似比 1:3) より
△ DEF: △ CBF= **1 : 9**

(3) △ DEF= S とする.
(2) より，△ CBF= 9S
$\dfrac{\triangle \mathrm{DBF}}{\triangle \mathrm{DEF}} = \dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}} = \dfrac{3}{1}$ より，△ DBF= 3S
よって，△ CBD= △ DBF+ △ CBF= 12S
$\dfrac{\triangle \mathrm{CAD}}{\triangle \mathrm{CBD}} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = \dfrac{1}{2}$ より，△ CAD= $\dfrac{1}{2}$ △ CBD= 6S
以上より
△ ABC= △ CAD+ △ CBD= $(6 + 12)S$ = **36**



2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	