M1JS/M1J

夏期講習

解答

Z会東大進学教室

高１選抜東大数学

高１東大数学

問題

【1】〔I〕

(1) l 上の点を $(t,\ -2t+8)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2 &= t^2+(-2t+8-1)^2+(t-2)^2+(-2t+8-3)^2\\ &= 10t^2-52t+78\\ &= 10\left(t-\frac{13}{5}\right)^2+\frac{52}{5}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ が最小となるのは $t=\dfrac{13}{5}$，すなわち，

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{\frac{13}{5}},\ \mathbf{\frac{14}{5}}\right)\quad \textbf{(答)}$$

のとき．

(2) A の l に関する対称点を $\mathrm{A}'(a,\ b)$ とすると，l は線分 AA' の垂直二等分線なので，

$$\begin{aligned}&\frac{b-1}{a}\cdot(-2)=-1\\ &\iff a-2b=-2\ \cdots ①\\ &\frac{b+1}{2}=-2\cdot\frac{a}{2}+8\\ &\iff 2a+b=15\ \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より，$(a,\ b)=\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{19}{5}\right)$

また，AP+BP=A′P+BP より AP+BP が最小となる点 P は A′B と l の交点である．

$$\begin{aligned}\mathrm{A}'\mathrm{B}: y &= \frac{\frac{19}{5}-3}{\frac{28}{5}-2}(x-2)+3\\ &= \frac{2}{9}(x-2)+3\\ &= \frac{2}{9}x+\frac{23}{9}\end{aligned}$$

これと，$l: y=-2x+8$ との交点を求めればよく

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}x+\frac{23}{9} &= -2x+8\\ 2x+23 &= -18x+72\\ \therefore\quad x=\frac{49}{20},&\ y=\frac{31}{10}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\mathbf{\frac{49}{20}},\ \mathbf{\frac{31}{10}}\right)$　**(答)**

〔II〕

(1) OH の傾きは $\dfrac{1}{3}$

AB は OH と直交するので, 傾きは

$$\boldsymbol{-3} \qquad (答)$$

AH の傾きは

$$\frac{2-1}{5-3}=\frac{1}{2}$$

同様に AH が OB と直交するので, OB の傾きは

$$\boldsymbol{-2} \qquad (答)$$

(2) 直線 OB：$y=-2x$

直線 AB：$y=-3(x-5)+2=-3x+17$

B はこの 2 直線の交点なので

$$x=17,\ y=-34$$

したがって

$$\mathrm{B}(\boldsymbol{17},\ \boldsymbol{-34}) \qquad (答)$$

(3) 重心は

$$\left(\frac{0+5+17}{3},\ \frac{0+2-34}{3}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{22}{3}},\ \boldsymbol{-\frac{32}{3}}\right) \qquad (答)$$

【2】 $3x+4y=14 \quad \cdots$①, $4x+3y=14 \quad \cdots$②, $ax+2y=a+2 \quad \cdots$③

とおく.

(1) ①, ②の交点を求める.
$4\times$② $-3\times$① より

$$7x=14 \qquad \therefore \quad x=2$$

これより

$$y=2$$

したがって, ①, ②の交点は, $(2,\ 2)$ である.
ここで, 3 直線が 1 点で交わるには, ③がこの交点を通らなければならないので

$$2a+4=a+2 \qquad \therefore \quad a=-2$$

$$\therefore \quad a=\mathbf{-2}, \quad \text{交点}\ (\mathbf{2},\ \mathbf{2}) \qquad \text{(答)}$$

(2) 題意をみたすには, 3 直線が同一点を通るときと, 少なくとも 2 直線が平行, または一致するときが考えられる.
少なくとも 2 直線が平行, または 一致するとき, ①, ②が平行にはなりえないので

(i) ①と③が平行なとき,

$$3\cdot 2-4\cdot a=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{3}{2}$$

(ii) ②と③が平行なとき,

$$4\cdot 2-3\cdot a=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{8}{3}$$

(1) の 3 直線が同一点を通るときとあわせて

$$a=\mathbf{-2,\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $$x^2 = mx - m^2 + \frac{9}{4} \iff x^2 - mx + m^2 - \frac{9}{4} = 0 \quad \cdots\cdots①$$

が，相異なる 2 つの実数解をもつ条件より，① の判別式について考えて

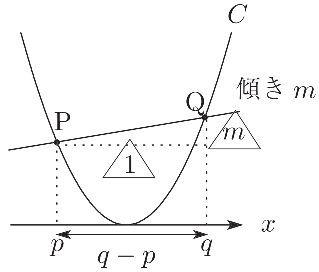
$$\begin{aligned} m^2 - 4\left(m^2 - \frac{9}{4}\right) &> 0 \\ -3m^2 + 9 &> 0 \\ m^2 &< 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) ①を解くと

$$x = \frac{m \pm \sqrt{-3m^2+9}}{2}$$

であり，右図の P，Q の x 座標 p，q は



$$p = \frac{m - \sqrt{-3m^2+9}}{2}, \quad q = \frac{m + \sqrt{-3m^2+9}}{2}$$

である．すると

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= \sqrt{1+m^2} \cdot (q-p) \\ &= \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{-3m^2+9} \\ &= \sqrt{-3m^4+6m^2+9} \\ &= \sqrt{-3\left(m^2-1\right)^2+12} \end{aligned}$$

である．

(1) の結果より，$-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ であり，この範囲で $-3\left(m^2-1\right)^2+12$ を考えて，PQ は $m = \pm 1$ のとき最大とわかる．

よって，求める PQ の最大値は

$$\sqrt{12} = \boldsymbol{2\sqrt{3}} \quad (m = \pm 1 \text{ のとき}) \qquad \text{(答)}$$

【4】〔I〕

円 $C: x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 　　$\therefore \quad (x-1)^2+(y-2)^2=9$

より，中心の座標は C(1, 2)，半径は $r=\sqrt{9}=3$

(1) 円 C が直線 $l: x+2y-k=0$ と相異なる 2 点で交わるのは，円の中心 C(1, 2) と直線 l の距離が円の半径 3 より小さいときで

$$\frac{\left|1+2\cdot 2-k\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}<3$$

$$\therefore \quad \frac{|5-k|}{\sqrt{5}}<3$$

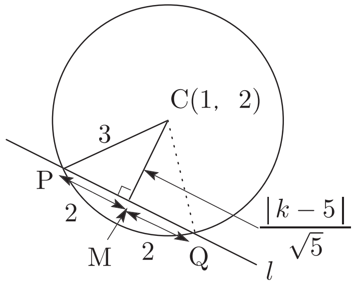
$$\therefore \quad \left|k-5\right|<3\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad -3\sqrt{5}<k-5<3\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{5-3\sqrt{5}<k<5+3\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) PQ $=4$ となるのは，右図において PM $=2$ のときである．

直角三角形 CPM に着目すると，三平方の定理により



$$\left(\frac{\left|k-5\right|}{\sqrt{5}}\right)^2+4=9$$

$$\therefore \quad \frac{(k-5)^2}{5}=5$$

$$\therefore \quad (k-5)^2=25$$

$$\therefore \quad k^2-10k=0$$

$$\therefore \quad k(k-10)=0$$

よって

$$k=\boldsymbol{0,\ 10} \qquad \text{(答)}$$

(1) の別解

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4=0 \\ x+2y=k \end{cases}$$

これより

$$5y^2-4ky+(k^2-2k-4)=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=-k^2+10k+20>0$$

$$k^2-10k-20<0$$

$$\{k-(5-3\sqrt{5})\}\{k-(5+3\sqrt{5})\}<0$$

$$\therefore \quad 5-3\sqrt{5}<k<5+3\sqrt{5}$$

〔II〕

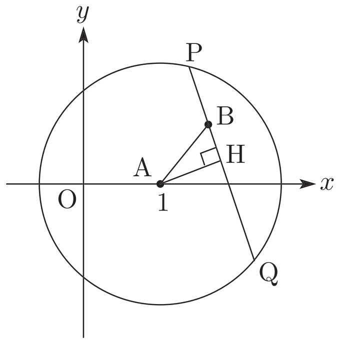
$x^2+y^2-2x-1=(x-1)^2+y^2-2=0$ より, 円の中心は, $(1,\ 0)$

これを, A とする. また, $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ とすると, B は円の内部にある.

よって, PQ が最大になるのは, PQ が直径となるときである.

つまり最大値は

$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ (答)



また, B を通る円の弦を PQ とする. A から PQ への垂線の足を H とする.

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PH}=2\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2}=2\sqrt{2-\mathrm{AH}^2}$$

したがって, PQ が最小になるのは AH が最大のときである. また, 図より

$$\mathrm{AB} \geqq \mathrm{AH}$$

なので, AH が最大になるのは $\mathrm{H}=\mathrm{B}$ のときである.

よって, PQ の最小値は

$$2\sqrt{2-\mathrm{AB}^2}=2\sqrt{2-\left\{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}=2\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{6}} \quad (答)$$

【5】〔I〕

(1) ≪証明≫

円の中心 (0, 0) と直線 l との距離を d とすると,

$$d = \frac{|2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} < 2 = r$$

よって, C と l は異なる 2 点で交わる. 〔証明終〕

(2) C と l の 2 交点を通る円の方程式は, k を実数として,

$$x^2 + y^2 - 4 + k(3x - 2y + 2) = 0$$

と書ける.

ここに (0, 0) を代入して,

$$-4 + 2k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 2$$

したがって, 求める円の方程式は,

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0} \qquad \text{(答)}$$

〔II〕

(1) ≪証明≫

C_1 は，中心 $(0,\,0)$，半径 $r_1=\sqrt{5}$

C_2 は，$(x-3)^2+(y+1)^2=9$ と変形できることにより，

中心 $(3,\,-1)$，半径 $r_2=3$

2 つの円の中心間の距離 d は，

$$d=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

より，

$$3-\sqrt{5}=r_2-r_1<d<r_2+r_1=3+\sqrt{5}$$

であるので，2 つの円は異なる 2 点で交わる．〔証明終〕

(2) 2 交点を通る円または直線の方程式は，実数 k を用いて

$$x^2+y^2-5+k(x^2-6x+y^2+2y+1)=0$$

と書ける．

これが直線となるのは，$k=-1$ のときであるので，

$$x^2+y^2-5-(x^2-6x+y^2+2y+1)=0$$

$$\therefore\quad 6x-2y-6=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{3x-y-3=0}\qquad \text{(答)}$$

(3) C_2 は $(3,\,-2)$ を通らないので，求める円の方程式は，

$$x^2+y^2-5+k(x^2-6x+y^2+2y+1)=0$$

と表すことができる．これが $(3,\,-2)$ を通ることにより，

$$8-8k=0\quad\Longleftrightarrow\quad k=1$$

よって，求める円の方程式は，$k=1$ を代入して

$$\therefore\ \boldsymbol{x^2+y^2-3x+y-2=0}\qquad \text{(答)}$$

【6】(1) P$(0,\,-2t+11)$，Q$(t-13,\,0)$ とおく．

円 S と円 T の中心間の距離 PQ は

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{(t-13)^2+(-2t+11)^2} = \sqrt{5t^2-70t+290}\\ &= \sqrt{5(t-7)^2+45} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

よって，求める t の値は

$t = \mathbf{7}$　　(答)

(2) 2 円 S，T が共有点をもたないのは，中心間の距離 PQ が半径の差よりも小さいか，和よりも大きいときで

$$\mathrm{PQ} < |r-2| \qquad \text{または} \qquad \mathrm{PQ} > r+2 \quad \cdots\cdots ②$$

どのような実数 t に対してもつねに②が成り立つ条件を考えればよいが，①より，PQ は $\sqrt{45}$ 以上のすべての値をとり得るので，前者は必ずしも成り立たない．したがって後者のみで考えればよく，その条件は

$$r+2 < \sqrt{45} \qquad \therefore\ \boldsymbol{(0<)\ r < 3\sqrt{5}-2} \qquad \text{(答)}$$

(3) 円 S が円 T の内部にあるのは

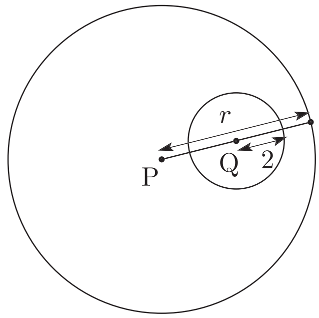
$$\mathrm{PQ} < r-2$$

のときである．

①より，$t=10$ のとき，$\mathrm{PQ}=\sqrt{90}$ だから

$$\sqrt{90} < r-2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r > 3\sqrt{10}+2} \qquad \text{(答)}$$



問題

【1】〔I〕

C 上の点 $\mathrm{Q}(s,\, t)$，ただし

$s^2+t^2=9 \quad \cdots\cdots①$

とし，求める軌跡の点を $\mathrm{P}(X,\, Y)$ とおくと

$\mathrm{PQ}=\mathrm{AP} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2$

ここで，三平方の定理より

$$\mathrm{PQ}^2=(X^2+Y^2)-(s^2+t^2)$$

であるので，

$$\begin{aligned}
&(X^2+Y^2)-(s^2+t^2)=(X-6)^2+(Y-3)^2\\
\Longleftrightarrow\quad &-9=-12X-6Y+36+9 \quad (\because\ ①)\\
\Longleftrightarrow\quad &2X+Y-9=0
\end{aligned}$$

よって，求める軌跡は

直線　$\boldsymbol{y=-2x+9}$　　(答)

＜別解＞

C 上の点 $\mathrm{Q}(s,\, t)$，ただし

$s^2+t^2=9 \quad \cdots\cdots①$

とし，求める軌跡の点を $\mathrm{P}(X,\, Y)$ とおくと

$\mathrm{PQ}=\mathrm{AP} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2$

より

$(X-s)^2+(Y-t)^2=(X-6)^2+(Y-3)^2 \quad \cdots\cdots②$

また，直線 PQ の方程式は

$sx+ty=9$

より，この直線上の点 $\mathrm{P}(X,\, Y)$ において

$sX+tY=9 \quad \cdots\cdots③$

をみたす．② より

$$\begin{aligned}
&X^2+Y^2-2(sX+tY)+(s^2+t^2)=X^2-12X+Y^2-6Y+45\\
\Longleftrightarrow\quad &-2\cdot 9+9=-12X-6Y+45 \quad (\because\ ①,③)\\
\Longleftrightarrow\quad &2X+Y-9=0
\end{aligned}$$

よって，求める軌跡は

直線　$\boldsymbol{y=-2x+9}$　　(答)

〔II〕

P$(X,\ Y)$ とする. それぞれの接点を T_1, T_2 とすると,

$$\mathrm{PT_1}^2 = \{(X-1)^2+(Y+1)^2\}-1$$
$$\mathrm{PT_2}^2 = \{(X-4)^2+(Y-2)^2\}-2^2$$

であるから, $\mathrm{PT_1}^2=\mathrm{PT_2}^2$ は次のことと同値である.

$$(X-1)^2+(Y+1)^2-1=(X-4)^2+(Y-2)^2-4$$
$$-2X+1+2Y+1-1=-8X+16-4Y+4-4$$
$$6X+6Y-15=0$$

つまり,

$$2X+2Y-5=0$$

をみたす.

$$\therefore\quad \textbf{直線}\quad \boldsymbol{2x+2y-5=0}\qquad (\text{答})$$

≪注≫

この直線は, 2 つの円の **根軸** という.

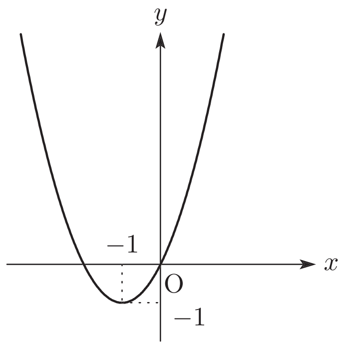
【2】(1)
$$\begin{cases} x = t+1 & \cdots\cdots ① \\ y = t^2+4t+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より $t = x-1$ を ② に代入して

$$y = (x-1)^2+4(x-1)+3 = x^2+2x$$

よって，求める軌跡は

放物線　$\boldsymbol{y = x^2+2x}$　　(答)



(2)
$$\begin{cases} x = t^2+1 & \cdots\cdots ① \\ y = t^4+4t^2+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より，$t^2 = x-1$ を ② に代入して

$$\begin{aligned} y &= (x-1)^2+4(x-1)+3 \\ &= x^2+2x \end{aligned}$$

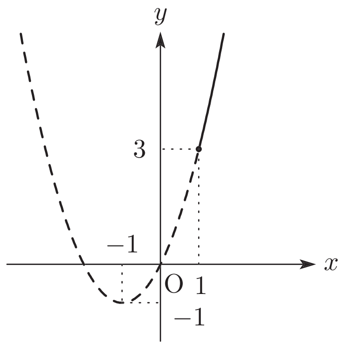
ここで，① より

$$t^2 \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = t^2+1 \geqq 1$$

である．

よって，求める軌跡は

放物線　$\boldsymbol{y = x^2+2x}$ の $\boldsymbol{x \geqq 1}$ の部分　　(答)



【3】(1)
$$\begin{cases} C_1\colon y = x^2 - x & \cdots\cdots ① \\ C_2\colon y = -x^2 + (2m+1)x - 6m + 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$
を連立して，y を消去すると

$$x^2 - x = -x^2 + (2m+1)x - 6m + 4$$

$$\therefore \quad x^2 - (m+1)x + 3m - 2 = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

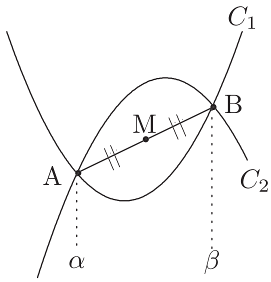
$(*)$ の判別式について考えて

$$(m+1)^2 - 4(3m-2) > 0 \qquad \therefore \quad m^2 - 10m + 9 > 0$$

$$\therefore \quad (m-9)(m-1) > 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{m < 1,\ m > 9} \qquad \text{(答)}$$

(2) α，β は $(*)$ の 2 つの解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \boldsymbol{m+1}, \qquad \alpha\beta = \boldsymbol{3m-2} \qquad \text{(答)}$$



(3) $\mathrm{M}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \cdots\cdots ③ \\ y = \dfrac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta}{2} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③ に (2) の結果を用いて

$$x = \frac{m+1}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

また

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \alpha) + (\beta^2 - \beta) &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - (\alpha+\beta) \\ &= (m+1)^2 - 2(3m-2) - (m+1) \qquad (\because \quad (2)) \\ &= m^2 - 5m + 4\end{aligned}$$

となるので，④ より

$$y = \frac{m^2 - 5m + 4}{2} \quad \cdots\cdots ⑥$$

(1) の結果も考えると

$$\begin{cases} x = \dfrac{m+1}{2} & \cdots\cdots ⑤ \\ y = \dfrac{m^2 - 5m + 4}{2} & \cdots\cdots ⑥ \\ m < 1,\ m > 9 & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

で定まる点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ の軌跡を求めればよいことになる．

⑤ より

$$m = 2x - 1 \quad \cdots\cdots ⑤'$$

となり，これを ⑥ に代入して

$$y = \frac{(2x-1)^2 - 5(2x-1) + 4}{2} = 2x^2 - 7x + 5 \quad \cdots\cdots ⑧$$

また，⑤′ を ⑦ に代入して

$$2x - 1 < 1,\ 2x - 1 > 9 \qquad \therefore \quad x < 1,\ x > 5 \quad \cdots\cdots ⑨$$

よって，求める軌跡は ⑧ かつ ⑨ より

放物線　$\boldsymbol{y = 2x^2 - 7x + 5}$ の $\boldsymbol{x < 1,\ x > 5}$ の部分　　(答)

【4】(1)

$(0,\ 1),\ (-1,\ 0)$ を通る直線	:	$y = x + 1$
$(0,\ 1),\ (1,\ 0)$ を通る直線	:	$y = -x + 1$
x 軸	:	$y = 0$

で囲まれた領域なので,

$$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{y \leqq x + 1} \\ \boldsymbol{y \leqq -x + 1} \\ \boldsymbol{y \geqq 0} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2)

中心 $(2,\ 0)$, 半径 3 の円	:	$(x-2)^2 + y^2 = 9$
$(2,\ 0),\ (0,\ -1)$ を通る直線	:	$y = \dfrac{1}{2}x - 1$
y 軸	:	$x = 0$

で囲まれた領域なので,

$$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{(x-2)^2 + y^2 \leqq 9} \\ \boldsymbol{y \leqq \dfrac{1}{2}x - 1} \\ \boldsymbol{x \geqq 0} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(3)

頂点 $(0,\ 2)$ で点$(1,\ 1)$を通る放物線	:	$y = -x^2 + 2 \quad \cdots ①$
原点と点$(1,\ 1)$を通る直線	:	$y = x \quad \cdots ②$

①の上方で②の下方, または, ①の下方で②の上方の領域なので,

$$\therefore \quad \boldsymbol{(y + x^2 - 2)(y - x) \leqq 0} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$

なる x，y は，t の 2 次方程式

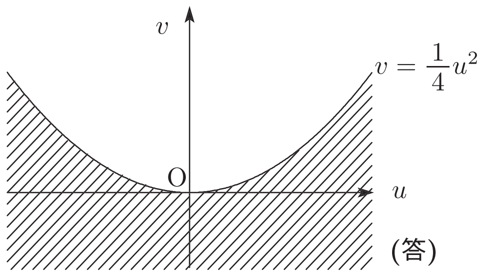
$$t^2-ut+v=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の 2 解であるから，x，y が実数となる条件を考えて，$(*)$ の判別式より

$$u^2-4v \geqq 0$$

$$\therefore\quad v \leqq \frac{1}{4}u^2 \quad \cdots\cdots①$$

図示すると，右図の斜線部（境界も含む）.



(答)

(2) $\quad 3x^2+2xy+3y^2 \leqq 4$

$\therefore\quad 3\{(x+y)^2-2xy\}+2xy \leqq 4$

$\therefore\quad 3(x+y)^2-4xy \leqq 4$

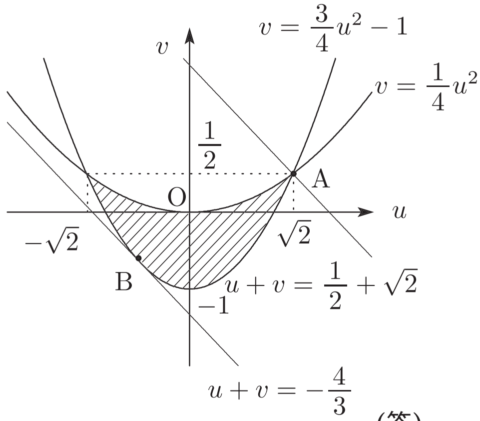
と変形すると

$$3u^2-4v \leqq 4$$

$$\therefore\quad v \geqq \frac{3}{4}u^2-1 \quad \cdots\cdots②$$

① かつ ② を図示すると右図の斜線部

（境界も含む）.



(答)

(3) $z=f(x,\,y)=xy+x+y$ は，$x+y=u$，$xy=v$ とおくとき

$$z=u+v$$

よって，(2) の領域と直線

$u+v=k \quad \cdots\cdots③ \quad \Longleftrightarrow \quad v=-u+k$ は傾き -1 で v 切片が k の直線

が共有点をもつような k の最大値を求めればよい.

したがって，③ が $\mathrm{A}\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ を通るときに最大となり，求める最大値は

$$\boldsymbol{M=\frac{1}{2}+\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

(4) (2) の領域と直線

$$u+v=k \quad \cdots\cdots ③$$

が共有点をもつような k の最小値を求めればよい．

したがって，③ が B で

$$v=\frac{3}{4}u^2-1 \quad \cdots\cdots ④$$

と接するときに最小となるから，③，④ から v を消去して

$$-u+k=\frac{3}{4}u^2-1 \qquad \therefore \quad \frac{3}{4}u^2+u-(k+1)=0 \quad \cdots\cdots (**)$$

この $(**)$ の判別式について考えて

$$1+4\cdot\frac{3}{4}\cdot(k+1)=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{4}{3}$$

このとき，$(**)$ の重解は，$u=-\dfrac{2}{3}$ であるので，接点 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ となり，これは確かに (2) の領域に属する点である．

よって求める最小値は

$$m=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{m=-\frac{4}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $\qquad y = ax + a^2 - 5 \quad \cdots\cdots ①$

をみたす実数 a が存在する x, y の条件を求めるとよい.

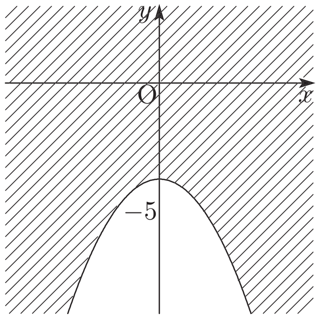
$$① \iff a^2+xa-(y+5)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

で，これをみたす実数 a が存在する条件は，$(*)$ の判別式が 0 または正になることであり

$$x^2+4(y+5) \geqq 0$$

$$\therefore \quad y \geqq -\frac{1}{4}x^2-5$$

これを図示すると，右図の斜線部（境界も含む）.



$y = -\dfrac{1}{4}x^2 - 5$ (答)

(2) $\qquad \begin{cases} y = ax + a^2 - 5 & \cdots\cdots ① \\ y = x^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

が共有点をもつのは

$$ax + a^2 - 5 = x^2 \qquad \therefore \quad x^2 - ax + (5-a^2) = 0$$

の判別式を考えて

$$a^2 - 4(5-a^2) \geqq 0 \qquad \therefore \quad a^2-4 \geqq 0 \qquad \therefore \quad (a+2)(a-2) \geqq 0$$

よって

$a \leqq -2$, $a \geqq 2$ (答)

次に，a が $a \leqq -2$, $a \geqq 2$ をみたして変化するときの

$$y = ax + a^2 - 5 \quad \cdots\cdots ①$$

の通過領域を求める．そのためには

$$a^2 + xa - (y+5) = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

が，$a \leqq -2$, $a \geqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件を求めればよい.

$$f(a) = a^2 + xa - (y+5)$$

のグラフを用いて考える．軸 $a = -\dfrac{x}{2}$ の位置で場合分けすると

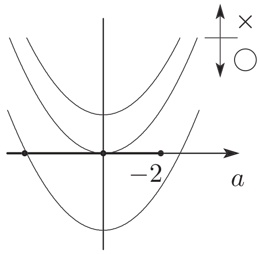
(i) $-\dfrac{x}{2} \leqq -2$ または $2 \leqq -\dfrac{x}{2}$

(つまり，$x \geqq 4$ または $x \leqq -4$) のとき判別式が 0 または正より

$$x^2 + 4(y+5) \geqq 0$$

$$\therefore \quad y \geqq -\frac{1}{4}x^2 - 5$$

（図は，$-\dfrac{x}{2} \leqq -2$ のときであるが，$2 \leqq -\dfrac{x}{2}$ のときも同様.）



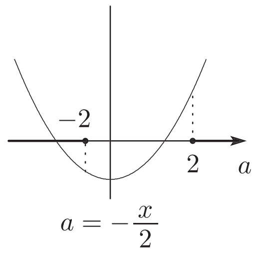
$a = -\dfrac{x}{2}$

(ii) $-2 \leqq -\dfrac{x}{2} \leqq 2$

(つまり，$-4 \leqq x \leqq 4$) のとき

$f(-2) \leqq 0$ 　または　 $f(2) \leqq 0$

$$\therefore \begin{cases} 4-2x-(y+5) \leqq 0 \\ \text{または} \\ 4+2x-(y+5) \leqq 0 \end{cases}$$

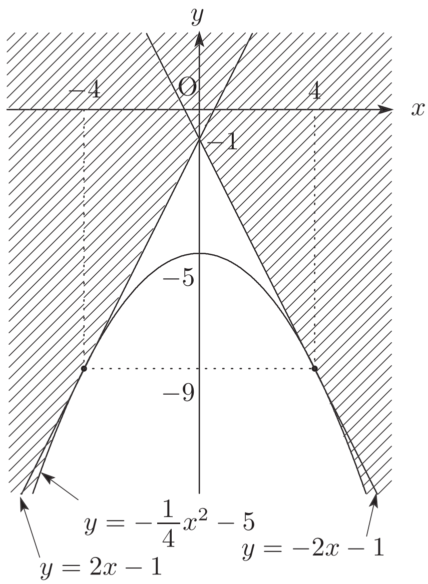


$$\therefore \begin{cases} y \geqq -2x-1 \\ \text{または} \\ y \geqq 2x-1 \end{cases}$$

以上，(i)，(ii) をまとめて，求める通過領域は

$$\begin{cases} x \geqq 4 \quad \text{かつ} \quad y \geqq -\dfrac{1}{4}x^2-5 \\ \text{または} \\ -4 \leqq x \leqq 4 \quad \text{かつ} \quad \left[y \geqq -2x-1 \quad \text{または} \quad y \geqq 2x-1 \right] \\ \text{または} \\ x \leqq -4 \quad \text{かつ} \quad y \geqq -\dfrac{1}{4}x^2-5 \end{cases}$$

であり，これを図示すると下図の斜線部（境界も含む）.



(答)

問題

【1】〔I〕(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}&=\frac{2}{1-\sin^2\theta}\\&=\frac{2}{\cos^2\theta}\\&=2(\tan^2\theta+1)\\&=2(3^2+1)\\&=\mathbf{20}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

(2) $\cos\theta=1-2\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned}&\cos^2\theta=(1-2\sin\theta)^2\\\Longleftrightarrow&1-\sin^2\theta=(1-2\sin\theta)^2\\\Longleftrightarrow&(1-2\sin\theta)^2+\sin^2\theta=1\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}&5\sin^2\theta-4\sin\theta=0\\&\sin\theta(5\sin\theta-4)=0\\&\qquad\therefore\ \sin\theta=0,\ \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad(\sin\theta,\ \cos\theta)=\mathbf{(0,\ 1),}\quad\boldsymbol{\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)}\qquad(\text{答})$$

〔II〕(1)

$$\begin{aligned}2\sin^2\theta+3\cos\theta>0\quad&\Longleftrightarrow\quad2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta>0\\&\Longleftrightarrow\quad-2\cos^2\theta+3\cos\theta+2>0\\&\Longleftrightarrow\quad2\cos^2\theta-3\cos\theta-2<0\\&\Longleftrightarrow\quad(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)<0\end{aligned}$$

したがって

$$-\frac{1}{2}<\cos\theta<2$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より

$$-\frac{1}{2}<\cos\theta\leqq1$$

よって

$$\boldsymbol{0\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi}\qquad(\text{答})$$

(2)
$$\cos^2\frac{\theta}{2} \leqq 1+\sin\frac{\theta}{2} \iff 1-\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}-1 \leqq 0$$
$$\iff \sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right) \geqq 0$$

したがって，

$$\sin\frac{\theta}{2} \geqq 0,\ \sin\frac{\theta}{2} \leqq -1$$

$-2\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ より

$$-\pi \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \pi$$

であるから

$$-1 \leqq \sin\frac{\theta}{2} \leqq 1$$

これより

$$0 \leqq \sin\frac{\theta}{2} \leqq 1,\quad \sin\frac{\theta}{2} = -1$$

よって

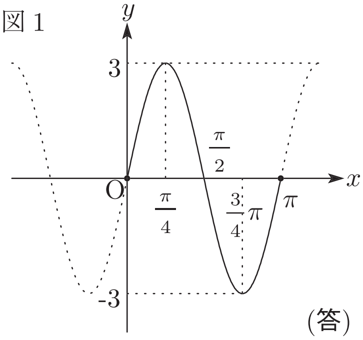
$$0 \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \pi,\ \frac{\theta}{2} = -\pi,\ \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ \theta = -2\pi,\ \theta = -\pi} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $y = 3\sin 2x$ より, これは, $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍, y 軸方向に 3 倍にそれぞれ拡大したものであるから, 周期は,

$$2\pi \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\pi} \qquad (答)$$

であり, グラフは図 1 のようになる.

図 1



(答)

(2) 基本的な考え方は (1) と同様で, $y = -\tan\dfrac{x}{2}$ より, これは, $y = -\tan x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大したものとして考えればよい.
さらに, $y = \tan x$ をベースに考えるならば,

$$y = -\tan x \quad \Longleftrightarrow \quad -y = \tan x$$

のグラフは, $y = -\tan x$ のグラフを x 軸に関して対称に移したものと考えられる.
よって, 求める周期は,

$$\pi \times 2 = \boldsymbol{2\pi} \qquad (答)$$

であり, 図 2 を得る.

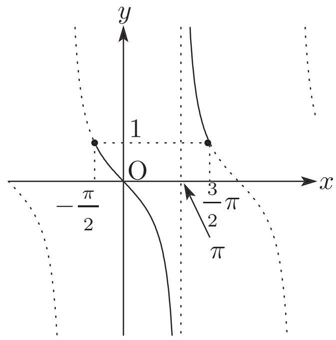


図 2

(答)

(3) 先に変形を行うと,

$$y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \iff y - 2 = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \frac{y-2}{2} = \cos\frac{x - \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}} \quad \cdots ①$$

と変形すると, 次のように式を読み取ることが出来る.
$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向, y 軸方向にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ 倍, 2 倍した

$$\frac{y}{2} = \cos\frac{x}{\frac{1}{2}} \quad \cdots ②$$

を, さらに x 軸の正方向に $\dfrac{\pi}{6}$, y 軸の正方向に 2 だけそれぞれ平行移動したグラフである. ②より, 周期は,

$$2\pi \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\pi} \qquad (答)$$

であり, 図 3 を得る.

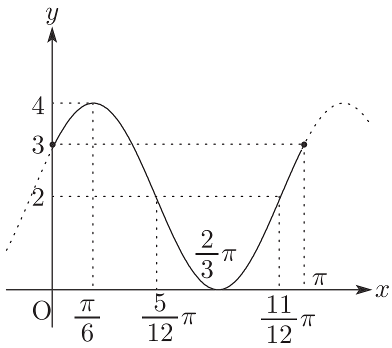


図 3　　　　(答)

＜参考＞

一般に, $y=f(x)$ 上の任意の点 $(x,\ y)$ に対し, $(ax,\ by)=(X,\ Y)$ なる点 $(X,\ Y)$ をとると, これが移動後の曲線上の点を表す. よって, $x=\dfrac{X}{a}$, $y=\dfrac{Y}{b}$ をみたすことから,

$$\frac{Y}{b}=f\left(\frac{X}{a}\right)$$

を得る.

よって, $\dfrac{y}{b}=f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ のグラフは, $y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に b 倍, x 軸方向に a 倍したものである.

【3】(1) $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ より,

$$1+t^2=1+\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \iff \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって,

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}\times\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=2\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} y&=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta+1}\\ &=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}-1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}\\ &=\frac{1}{2}(2t-t^2-1)\\ &=\boldsymbol{-\frac{1}{2}(t-1)^2} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi \iff 0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

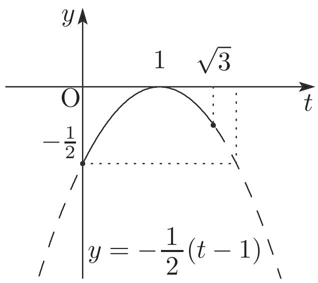
より,

$$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

したがって, $y=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2$ の $0\leqq t\leqq\sqrt{3}$ における最大最小を求めることと同値となる.

最大値は 0 であり, そのとき

$$\begin{aligned} t=1 &\iff \tan\frac{\theta}{2}=1\\ &\iff \theta=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



最小値は $-\dfrac{1}{2}$ であり, そのとき

$$\begin{aligned} t=0 &\iff \tan\frac{\theta}{2}=0\\ &\iff \theta=0 \end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{cases} \text{最大値}\quad \boldsymbol{0} \quad \left(\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2}}\right)\\ \text{最小値}\quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}} \quad \boldsymbol{(\theta=0)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【4】 $f(\theta) = 3\sin\theta + 4\cos\theta = 5\sin(\theta+\alpha)$

$$\left(\text{ただし, } \sin\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(1) θ は任意の角だから,

$\therefore$ 最大値 **5**, 最小値 $-\mathbf{5}$ (答)

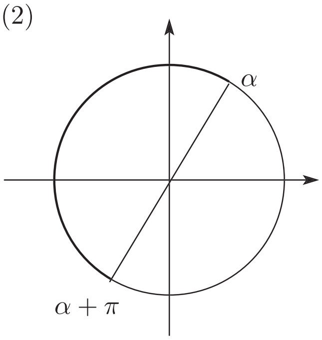
(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi \iff \alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \pi + \alpha$ より,

$$\therefore \begin{cases} \text{最大値 } \mathbf{5} \\ \text{最小値 } 5\sin(\pi+\alpha) = -5\sin\alpha = -\mathbf{4} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

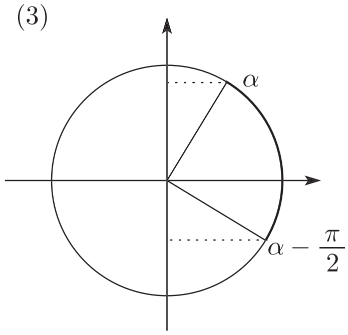
(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0 \iff \alpha - \dfrac{\pi}{2} \leqq \theta + \alpha \leqq \alpha$ より,

$$\therefore \begin{cases} \text{最大値 } 5\sin\alpha = \mathbf{4} \\ \text{最小値 } 5\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = -5\cos\alpha = -\mathbf{3} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2)



(3)



【5】

$$2\sin x\cos x = \sin 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

であることから,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$$

これで, 変数が $2x$ $(0 \leqq 2x \leqq \pi)$ でまとめられた．さらに, 三角関数の合成を行うと,

$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \quad \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\right)$$

よって,

$$-\frac{\pi}{6} \leqq 2x - \frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$$

であるから，下図より

$$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1 \quad \cdots ①$$

よって,

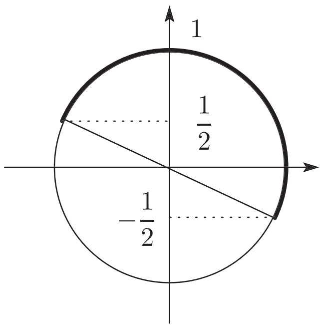
$$-1 \leqq f(x) \leqq \frac{1}{2}$$

① の等号成立条件が,

$$(\text{左辺})\quad 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$
$$(\text{右辺})\quad 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$$

であるから,

最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$,　最小値 $f(0) = \mathbf{-1}$　　(答)



【6】(1)

$$\begin{aligned} P &= \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}\left\{x - \left(\frac{2}{3}\pi - x\right)\right\} = x - \frac{\pi}{3}$$

ここで, $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ より

$$y = \frac{2}{3}\pi - x \geqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq x \leqq \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore\ -\frac{\pi}{3} \leqq x - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{3}$$

よって

$$\frac{1}{2} \leqq \cos\frac{x-y}{2} \leqq 1$$

$\dfrac{x-y}{2} = 0$ つまり, $x = y = \dfrac{\pi}{3}$ のとき

最大値　$\mathbf{1}$　　(答)

$\dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3}$ つまり, $(x,\ y) = \left(0,\ \dfrac{2}{3}\pi\right),\ \left(\dfrac{2}{3}\pi,\ 0\right)$ のとき

最小値　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　　(答)

(2)

$$\begin{aligned} Q &= \sin x\cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(x-y)\right\} \end{aligned}$$

$-\dfrac{2}{3}\pi \leqq x - y \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より, $-1 \leqq \sin(x-y) \leqq 1$

$x - y = \dfrac{\pi}{2}$ つまり, $(x,\ y) = \left(\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{\pi}{12}\right)$ のとき

最大値　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}}$　　(答)

$x - y = -\dfrac{\pi}{2}$ つまり, $(x,\ y) = \left(\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{7}{12}\pi\right)$ のとき

最小値　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2}}$　　(答)

【7】

≪証明≫

左辺に対し, 和・積の公式を適用すると,

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

と変形される. よって,

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\left(1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\quad\cdots①$$

このとき, $0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\pi$ より,

$$0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi,\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$$

であるから,

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0,\quad 0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqq 1$$

が成り立つことから,

$$\left(1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\geqq 0$$

したがって, ① より,

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\leqq\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

が成り立ち, 等号成立は,

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$$

のときであるから, $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\iff\alpha=\beta$ のときに限ることがわかる. 〔証明終〕

≪注≫

右辺の形 $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ にそろえることが目的であることはいうまでもない.

<別解>

$$f(\alpha,\ \beta)=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

とおく. $f(\alpha,\ \beta)$ は, $\alpha,\ \beta$ についての対称式であるから,

$$0<\alpha\leqq\beta<\pi$$

としても一般性を失うことはない. このとき,

$$\begin{aligned}f(\alpha,\ \beta)&=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\&=\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

と変形されるが,

$$0<\frac{\alpha}{2}\leqq\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$$

であり, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において, $\cos x$ は単調減少関数, $\sin x$ は単調増加関数であることから,

$$\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}&\geqq 0\ (\text{等号成立は } \alpha=\beta \text{ のとき})\\ \sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}&\leqq 0\ (\text{等号成立は } \alpha=\beta \text{ のとき})\end{aligned}$$

したがって,

$$f(\alpha,\ \beta)\leqq 0\quad(\text{等号成立は } \alpha=\beta \text{ のとき})$$

が証明された. 〔証明終〕

問題

【1】〔I〕

(1) 底を 2 にそろえると

$$\log_8 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 8} = \frac{1}{3}\log_2 12 = \log_2 12^{\frac{1}{3}}$$
$$\log_4 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 6 = \log_2 6^{\frac{1}{2}}$$

ここで, 真数部分は

$12^{\frac{1}{3}},\ 6^{\frac{1}{2}},\ 3$

であるが, すべての数を 6 乗すると

$$\left(12^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 12^2 = 144,\ \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 6^3 = 216,\ 3^6 = 729$$

である. よって

$$\left(12^{\frac{1}{3}}\right)^6 < \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^6 < 3^6 \iff 12^{\frac{1}{3}} < 6^{\frac{1}{2}} < 3$$

ここで, 底を 2 (>1) とする対数をとると

$$\log_2 12^{\frac{1}{3}} < \log_2 6^{\frac{1}{2}} < \log_2 3$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{\log_8 12 < \log_4 6 < \log_2 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 2 数の底がそろっているので, 底を $\dfrac{1}{2}$ にそろえると

$$\log_2 0.3 = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 0.3}{\log_{\frac{1}{2}} 2} = \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{10}}{\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{10} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{3}$$

ここで, 真数部分を比較すると

$$\frac{3}{2} < 3 < \frac{10}{3}\ \left(= 3 + \frac{1}{3}\right)$$

が成立し, 底が $\dfrac{1}{2}$ (<1) であることから

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} > \log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{3}$$
$$\therefore\ \ \boldsymbol{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} > \log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_2 0.3} \qquad \text{(答)}$$

(3) $$\log_4 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 4} = \frac{1}{\log_5 4},\ \log_3 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{1}{\log_5 3}$$

$(0<)\log_5 3 < \log_5 4 (<1)$ より, $\dfrac{1}{\log_5 4} < \dfrac{1}{\log_5 3}$ であるから

$$\therefore\ \ \boldsymbol{\log_4 5 < \log_3 5} \qquad \text{(答)}$$

〔II〕

(1) 与えられた各式を, 底を x $(x>0,\ x \fallingdotseq 1)$ とする対数にすると,

$$\log_x a = \frac{1}{3}, \quad \log_x b = \frac{1}{8}, \quad \log_x c = \frac{1}{24}$$

このとき,

$$\log_x abc = \log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\log_{abc} x = 2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\log_a b = t$ とおくと, 与式は,

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \quad &\iff \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0,\ t \fallingdotseq 0 \\ &\iff \quad (2t-1)(t-2) = 0,\ t \fallingdotseq 0 \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

と表される.

$$a > b > 1 \quad \iff \quad 1 > \log_a b > 0$$

より,

$$0 < t < 1$$

であるから, ① を満たす解として

$$t = \frac{1}{2}$$

を得る. このとき,

$$\begin{aligned} \log_a b^2 + \log_b a^3 &= 2\log_a b + 3\log_b a \\ &= 2t + \frac{3}{t} \\ &= 1 + 6 \\ &= \mathbf{7} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】(1)　(i)　$$(2^x-2^{-x})^2=2^{2x}-2+2^{-2x}=1 \qquad \therefore \quad 2^{2x}+2^{-2x}=3$$

これを用いて

$$(2^x+2^{-x})^2=2^{2x}+2+2^{-2x}=5$$

$2^x+2^{-x}>0$ より，$2^x+2^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$　　(答)

(ii)　$$2^x-2^{-x}=2^x-\frac{1}{2^x}=1$$

$2^x=t$ とすると

$$t-\frac{1}{t}=1 \qquad t^2-t-1=0 \qquad \therefore \quad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$t>0$ より

$$t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ここで, $t^3=(t^2-t-1)(t+1)+2t+1$ より

$$t^3=0+2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1=\boldsymbol{2+\sqrt{5}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) $x^{\frac{1}{2}}=\alpha,\ x^{-\frac{1}{2}}=\beta$ とおくと

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$$

このとき

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times1=7$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\times1\times3=18$$
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=7^2-2\times1^2=47$$
$$\therefore \quad P=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^3+\beta^3}=\boldsymbol{\frac{47}{18}} \qquad \text{(答)}$$

【3】

$$2^x=3^y=5^z=a \quad \cdots①$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \quad \cdots②$$

とおく. ①より,

$$a>0 \quad \cdots③$$

であり, ②より,

$$x\neq0, \quad y\neq0, \quad z\neq0$$

であるから, $a\neq1$ である. そこで, ①において, a を底とする対数をとると,

$$x\log_a 2=y\log_a 3=z\log_a 5=1$$
$$\therefore \quad \frac{1}{x}=\log_a 2, \quad \frac{1}{y}=\log_a 3, \quad \frac{1}{z}=\log_a 5$$

よって, ②より,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_a 2+\log_a 3+\log_a 5=\log_a 30$$
$$\therefore \quad \log_a 30=2=\log_a a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2=30$$
$$\therefore \quad a=\pm\sqrt{30}$$

③より，$a>0$ であるので,

$\boldsymbol{a=\sqrt{30}}$　　(答)

【4】$\log_2 x + \log_x 2 = \log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 x} = t$ とおく．

$x > 1$ より

$$\log_2 x > 0$$

なので，t のとりうる値の範囲は

$$t \geqq 2\sqrt{\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 x}} = 2$$

$t = 2$ となるのは

$$\log_2 x = \frac{1}{\log_2 x}$$

となるときで

$$(\log_2 x)^2 = 1 \text{ つまり } \log_2 x = \pm 1$$

のときである．$x > 1$ より

$$x = 2$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 x + \log_x 2)^2 - 2 - 4(\log_2 x + \log_x 2) + 1 \\ &= t^2 - 2 - 4t + 1 \\ &= t^2 - 4t - 1 \\ &= (t-2)^2 - 5 \end{aligned}$$

だから，$f(x)$ は $t = 2$ で最小値 -5 をとる．よって，

最小値 $\boldsymbol{-5}$ ($\boldsymbol{x = 2}$ のとき) (答)

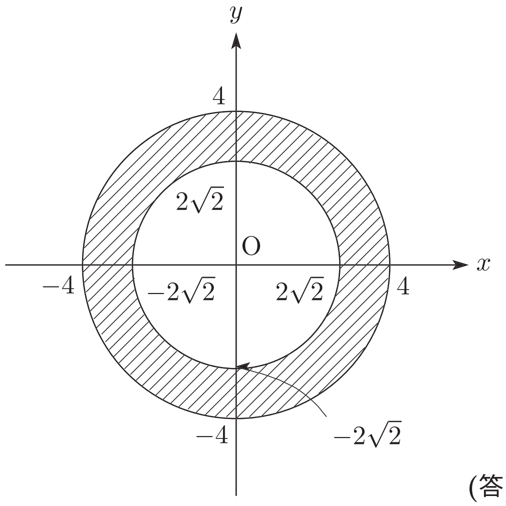
【5】真数条件より

$$16 - x^2 - y^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 16 \quad \cdots\cdots ①$$

① の条件下で

$$\begin{aligned} & \log_2(16 - x^2 - y^2) \leqq 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & \log_2(16 - x^2 - y^2) \leqq \log_2 2^3 \\ \Longleftrightarrow \quad & 16 - x^2 - y^2 \leqq 8 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + y^2 \geqq 8 \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

よって，① かつ ② より，図示すると下図のようになる．
(ただし，円周 $x^2 + y^2 = 8$ 上の点は含むが，円周 $x^2 + y^2 = 16$ 上の点は含まない．)



(答)

【6】(1) 5^n が 11 桁の整数であるとき,

$$10^{10} \leqq 5^n < 10^{11}$$

が成立する．ここで, 10 を底とする対数をとると,

$$10 \leqq n\log_{10}5 < 11 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{10}{\log_{10}5} \leqq n < \frac{11}{\log_{10}5} \quad \cdots ①$$

このとき,

$$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - \log_{10}2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$$

であるから, ① に代入すると,

$$14.306\cdots \leqq n < 15.736\cdots \qquad \therefore \quad n = 15$$

よって，これを満たす自然数は $\boldsymbol{n = 15}$　(答)

(2) $\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100} = 100(\log_{10}2 - \log_{10}3) = 100 \times (0.3010 - 0.4771) = -17.61$

これより $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100} = 10^{-17.61}$ だから

$$10^{-18} \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{100} < 10^{-17}$$

よって, **小数第 18 位** にはじめて 0 でない数字が現れる．　(答)

≪注≫

(2) では, $10^{-18} \leqq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100} < 10^{-17}$ のもつ意味について考えるとよい.

$10^{-(n+1)} \leqq N < 10^{-n}$　($n,\ N$ とも自然数) において

$$0.\underbrace{00\cdots\cdots0}_{n}1 \leqq N < 0.\underbrace{00\cdots\cdots0}_{n-1}1$$

であるので，小数第 $(n+1)$ 位に初めて 0 でない数字が現れると読み取れる.
具体的に $(0.001 =)10^{-3} \leqq N < 10^{-2}(= 0.01)$ などとして N が小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを考えるとわかりやすいだろう.

【7】(1) 7^x が 15 桁の整数であることから,

$$\begin{aligned}
&10^{14} \leqq 7^x < 10^{15} \\
\therefore \quad & 14 \leqq x\log_{10} 7 < 15 \\
\therefore \quad & \frac{14}{0.8451} \leqq x < \frac{15}{0.8451} \\
\therefore \quad & 16.56\cdots \leqq x < 17.74\cdots
\end{aligned}$$

x は整数であるから,

$$x = 17$$

7^x の 1 の位の数について考えると,

$$\begin{aligned}
&x = 1 \text{ のとき} \quad 7 \\
&x = 2 \text{ のとき} \quad 7^2 = 49 \\
&x = 3 \text{ のとき} \quad 7^3 = 343 \\
&x = 4 \text{ のとき} \quad 7^4 = 2401 \\
&x = 5 \text{ のとき} \quad 7^5 = 16807 \\
&x = 6 \text{ のとき} \quad 7^6 = 117649 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

これより

$$7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ \cdots$$

のように, 周期 4 で現れる. したがって,

$$17 = 4 \times 4 + 1$$

より, 1 の位は, **7** (答)

(2) 題意より, 10^{14} 位とは, 7^{17} の最高位の数である. ここで, 最高位を a とすると

$$\begin{aligned}
&a \times 10^{14} \leqq 7^{17} < (a+1) \times 10^{14} \\
&\log_{10} a + 14 \leqq 17\log_{10} 7 < \log_{10}(a+1) + 14 \\
&\log_{10} a \leqq 17\log_{10} 7 - 14 < \log_{10}(a+1) \\
&\log_{10} a \leqq 0.3667 < \log_{10}(a+1)
\end{aligned}$$

$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\therefore \quad a = 2$$

したがって, 10^{14} 位の数字は, **2** (答)

M1JS/M1J

高 1 選抜東大数学

高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	