M2JB

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２東大数学～数学ⅡＢ発展～

Lecture 1　図形と方程式

演習問題 1 − 1

O を原点とする座標平面上の円 C を

$$C : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$$

と定める．原点 O を通り，円 C と接する直線のうち，傾きの大きい方を l とする．次の問いに答えよ．

(1) l の方程式を求めよ．
(2) x 軸に接し，円 C に外接するような円の中心 P の描く軌跡を求めよ．
(3) 直線 l と x 軸に接し，さらに円 C と外接する円の半径をすべて求めよ．

解答・解説

(1) まず，

$$C : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$$

で，C の中心を K(5, 5) とおく．

y 軸は C の接線ではないから，l は y 軸に平行ではない．よって

$$l : y = mx \quad \Longleftrightarrow \quad mx - y = 0$$

とおけて，K から l までの距離が 1 であるから

$$\frac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}} = 1.$$

両辺非負であるから 2 乗して

$$5^2(m-1)^2 = m^2 + 1$$
$$12m^2 - 25m + 12 = 0$$
$$(3m-4)(4m-3) = 0.$$
$$\therefore \quad m = \frac{4}{3},\ \ \frac{3}{4}.$$

大きい方は $m = \dfrac{4}{3}$ であるから，求める方程式は

$$l : y = \frac{4}{3}x. \qquad \textbf{(答)}$$

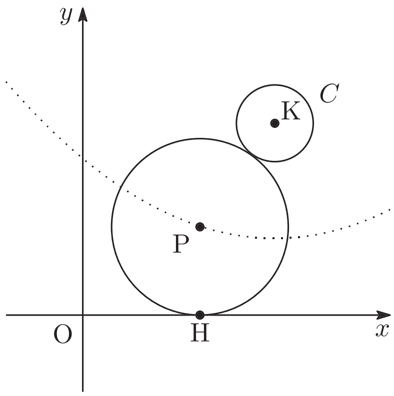
(2) P$(X,\ Y)$ とおく．また P から x 軸に下ろした垂線の足を H とする．

$Y<0$ のとき，問題の円が x 軸と接するとき C と接することはできない．よって $Y \geqq 0$ で，

$$\mathrm{KP}=\mathrm{PH}+1$$

に座標を代入することで

$$\sqrt{(X-5)^2+(Y-5)^2}=Y+1.$$



両辺非負であるから 2 乗して

$$(X-5)^2+(Y-5)^2=(Y+1)^2$$
$$\therefore \quad Y=\frac{1}{12}\left(X^2-10X+49\right).$$

この曲線上の任意の点が与えられた条件をみたすことは，計算を逆にたどることにより明らか．

よって求める軌跡は

$$\text{放物線}\ \ y=\frac{1}{12}\left(x^2-10x+49\right). \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 求める円の半径を r とする．中心を $(s,\ r)$ とおくと P は (2) の放物線の上にあるから

$$r=\frac{1}{12}(s^2-10s+49). \quad \cdots ①$$

P と $l: 4x-3y=0$ との距離が r であるから

$$\frac{|4s-3r|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r$$
$$\therefore \quad |4s-3r|=5r.$$

(I) $4s-3r \geqq 0$ のとき．

$$4s-3r=5r$$
$$\therefore \quad s=2r.$$

① に代入して

$$r = \frac{1}{12}(4r^2 - 20r + 49)$$
$$4r^2 - 32r + 49 = 0$$
$$\therefore \quad r = \frac{8 \pm \sqrt{15}}{2}.$$

(II) $4s - 3r < 0$ のとき．

$$4s - 3r = -5r$$
$$\therefore \quad r = -2s.$$

① に代入して

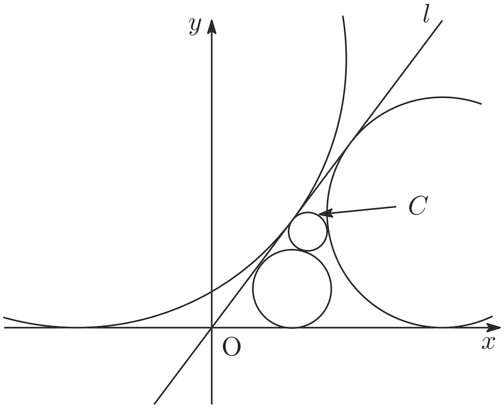
$$r = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}r^2 + 5r + 49\right)$$
$$r^2 - 28r + 4 \cdot 49 = 0$$
$$(r - 14)^2 = 0$$
$$\therefore \quad r = 14.$$

以上より，求める半径は

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{15}}{2}, \quad 14. \qquad (\textbf{答})$$

補足 1.1

上で得られた 3 つの円を図示すると，次のようになる．



演習問題 1 − 2

m を実数とする．方程式

$$mx^2 - my^2 + (1-m^2)xy + 5(1+m^2)y - 25m = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $(*)$ を因数分解し，xy 平面上で方程式 $(*)$ が表す図形は 2 直線であることを示せ．
(2) (1) で得られた 2 直線は，m の値によらず，それぞれ定点を通る．これらの定点を求めよ．
(3) m が $-1 \leqq m \leqq 3$ の範囲を動くとき，(1) で得られた 2 直線の交点の軌跡を求めよ．

解答・解説

(1) $(*)$ を x の式とみて因数分解する．

$$\begin{aligned} mx^2 + (1-m^2)yx - \left\{my^2 - 5\left(1+m^2\right)y + 25m\right\} &= 0 \\ mx^2 + (1-m^2)yx - (my-5)(y-5m) &= 0 \\ (mx+y-5m)(x-my+5) &= 0. \end{aligned}$$

すなわち，

$$(*) \iff mx + y - 5m = 0 \ \text{ または } \ x - my + 5 = 0.$$

これらは直交するから，一致することはない．よって $(*)$ は 2 直線を表す． **〔証明終〕**

(2) (1) で得られた 2 直線を

$$mx + y - 5m = 0 \quad \cdots ①, \qquad x - my + 5 = 0 \quad \cdots ②$$

とおく．

$$① : m(x-5) + y = 0$$

が任意の m に対して成り立つとき

$$x = 5, \quad y = 0.$$

よって，① が通る定点の座標は

$$(5,\ 0)\,. \qquad \textbf{(答)}$$

また，

$$② : x + 5 - my = 0$$

が任意の m に対して成り立つとき

$$x = -5, \quad y = 0.$$

よって，② が通る定点の座標は

$$(-5,\ 0)\,. \qquad \textbf{(答)}$$

(3) ①，② から m を消去する．

$$② \;:\; my = x + 5$$

であるから，y が 0 かどうかで場合を分ける．

(I) $y \fallingdotseq 0$ のとき．

$$m = \frac{x+5}{y}$$

を ① に代入して

$$\frac{x+5}{y}(x-5) + y = 0$$
$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 25. \quad \cdots ③$$

さらに $-1 \leqq m \leqq 3$ より

$$-1 \leqq \frac{x+5}{y} \leqq 3.$$

(i) $y > 0$ のとき．

$$-y \leqq x + 5 \leqq 3y.$$
$$\therefore \quad y \geqq -x - 5 \ \text{かつ} \ y \geqq \frac{x+5}{3}.$$

(ii) $y < 0$ のとき．

$$3y \leqq x + 5 \leqq -y.$$
$$\therefore \quad y \leqq \frac{x+5}{3} \ \text{かつ} \ y \leqq -x - 5.$$

すなわち，

$$\begin{cases} y > 0 \ \text{かつ} \ y \geqq -x - 5 \ \text{かつ} \ y \geqq \dfrac{x+5}{3} \\ \qquad\qquad \text{または} \\ y < 0 \ \text{かつ} \ y \leqq \dfrac{x+5}{3} \ \text{かつ} \ y \leqq -x - 5 \end{cases} \quad \cdots ④$$

とすると，このときの軌跡は ③ かつ ④．

(II) $y = 0$ のとき．

$$② \;:\; x = -5, \quad ① \;:\; m = 0$$

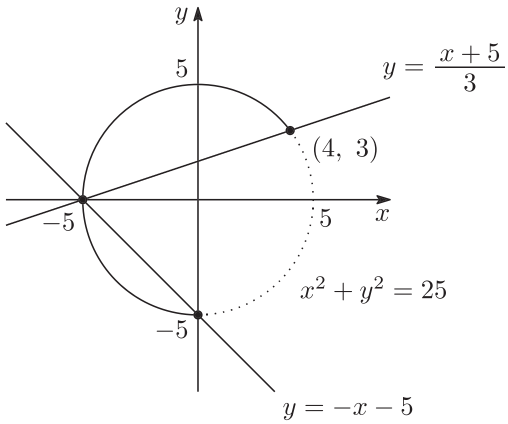
であるから，このときの交点は $(-5,\ 0)$．$\cdots$⑤

以上より，求める軌跡は

$$(③ \ \text{かつ} \ ④) \ \text{または} \ ⑤$$

より，

円 : $x^2 + y^2 = 25$ の，$y \geqq \dfrac{x+5}{3}$ または $y \leqq -x - 5$ をみたす部分． **(答)**


y
5
$y = \dfrac{x+5}{3}$
$(4,\ 3)$
-5
5
x
$x^2 + y^2 = 25$
-5
$y = -x - 5$

演習問題 1 − 3

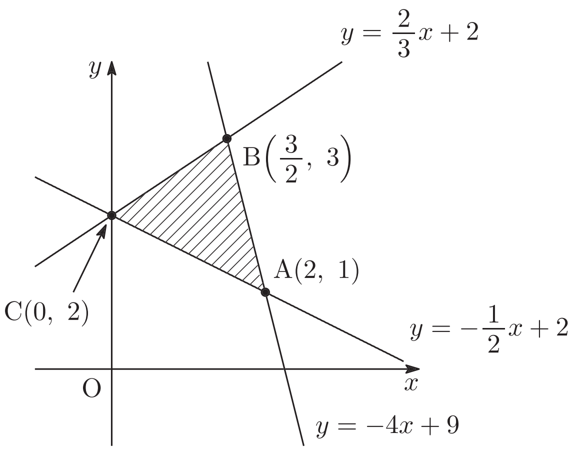
座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が

$$4x + y \leqq 9, \quad x + 2y \geqq 4, \quad 2x - 3y \geqq -6$$

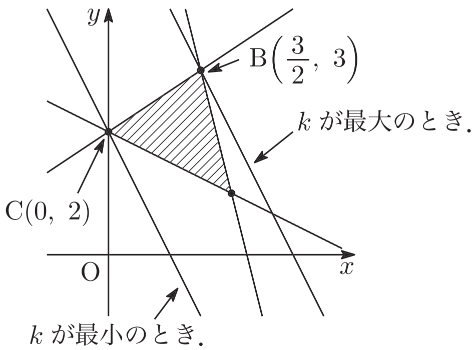
の範囲を動くとき，$2x + y$, $x^2 + y^2$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ．

解答・解説

与えられた領域を D とする．D を図示すると次のようになる．(境界を含む)



まず，$2x + y = k \quad \cdots ①$ とおく．直線 ① と D 共通部分をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい．



(I) 最大値について．

① が点 B を通るときであるから，

$$\max k = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 6.$$

(II) 最小値について．

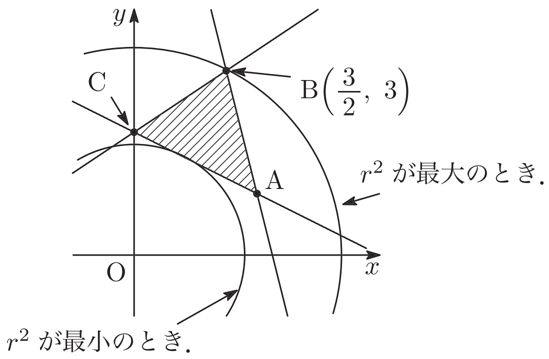
① が点 C を通るときであるから，

$$\max k = 2\,(0) + 2 = 2.$$

以上より，$2x + y$ について，

最大値 : 6,　最小値 : 2.　　(**答**)

次に，$x^2 + y^2 = r^2 \quad \cdots$② とおく．円 ② と領域 D が共通部分をもつような r^2 の値の最大値と最小値を求める．



(I)　最大値について．

② が点 B を通るときであるから，

$$\max r^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{45}{4}.$$

(II)　最小値について．

② が直線 AC に接するときであるから，O から直線 AC $x + 2y - 4 = 0$ までの距離

$$\frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

より，

$$\max r^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5}.$$

以上より，$x^2 + y^2$ について，

最大値 : $\frac{45}{4}$,　最小値 : $\frac{16}{5}$.　　(**答**)

演習問題 1 − 4

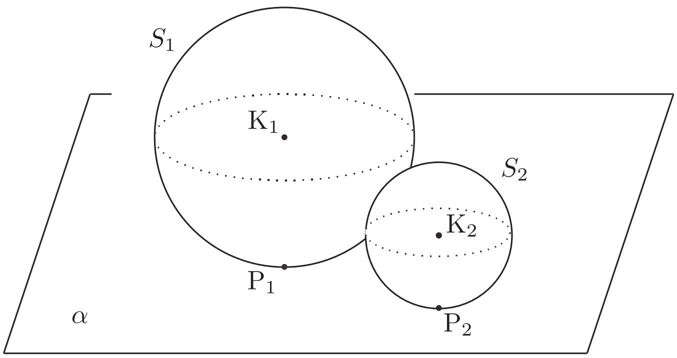
水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している．次の問いに答えよ．

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

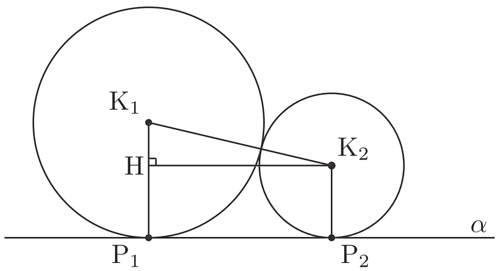
(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に接する球すべてを考える．それらの球と α との接点は，1 つの円または 1 つの直線の上にあることを示せ．

解答・解説

(1) S_1，S_2 の中心を K_1，K_2 とする．



4 点 K_1，K_2，P_1，P_2 を含む平面による断面は下図のようになる．点 H を図のように定めて



$$\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2 = r_1 + r_2,\quad \mathrm{K}_1\mathrm{H} = r_1 - r_2$$

であるから，3 平方の定理より

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)^2 &= (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)^2 - (\mathrm{K}_1\mathrm{H})^2 \\ &= (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2.\end{aligned}$$

よって
$$\mathrm{P_1P_2} = 2\sqrt{r_1r_2}. \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 2 つの球面の方程式を
$$S_1 \ : \ x^2+y^2+(z-r_1)^2={r_1}^2$$
$$S_2 \ : \ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-r_2)^2={r_2}^2$$

とおく．これらが外接しているから，(1) の結果より
$$(\mathrm{P_1P_2})^2 = a^2+b^2 = 4r_1r_2. \quad \cdots ①$$

このもとで，S_1，S_2 に外接し，α に乗っている球面を
$$S \ : \ (x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=r^2$$

とおく．S_1 と S が接するから，α との接点の間の距離を考えて
$$p^2+q^2=4r_1r. \quad \cdots ②$$

S_2 と S が接するから，同様に
$$(p-a)^2+(q-b)^2=4r_2r. \quad \cdots ③$$

②，③ の両辺は 0 でないから，辺ごとに割って
$$\frac{(p-a)^2+(q-b)^2}{p^2+q^2}=\frac{r_2}{r_1}.$$

ここで，$t=\dfrac{r_2}{r_1}$ とおくと，
$$\frac{(p-a)^2+(q-b)^2}{p^2+q^2}=t. \quad \cdots ④$$

(I) $t=1$ のとき．④ は
$$(p-a)^2+(q-b)^2=p^2+q^2.$$
$$\therefore \quad 2ap+2bq=a^2+b^2=4r_1r_2.$$

すなわち $\mathrm{P}(p,\ q)$ は直線 $ax+by=2r_1r_2$ 上にある．

(II) $t \fallingdotseq 1$ のとき．④ は
$$(p-a)^2+(q-b)^2=t(p^2+q^2).$$
$$(1-t)p^2+(1-t)q^2-2ap-2bq+a^2+b^2=0.$$

整理して，

$$\left(p-\frac{a}{1-t}\right)^2+\left(q-\frac{b}{1-t}\right)^2=\frac{t}{(1-t)^2}(a^2+b^2)$$
$$=\frac{t}{(1-t)^2}\cdot 4r_1r_2. \quad \cdots ⑤$$

ここで

$$\frac{a}{1-t}=\frac{ar_1}{r_1-r_2}, \quad \frac{b}{1-t}=\frac{br_1}{r_1-r_2}$$

であり，また

$$\frac{t}{(1-t)^2}\cdot 4r_1r_2=\frac{\frac{r_2}{r_1}}{\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\cdot 4r_1r_2$$
$$=\left(\frac{2r_1r_2}{r_1-r_2}\right)^2$$

であるから，⑤ より，$\mathrm{P}(p,\ q)$ は円

$$\left(x-\frac{ar_1}{r_1-r_2}\right)^2+\left(y-\frac{br_1}{r_1-r_2}\right)^2=\left(\frac{2r_1r_2}{r_1-r_2}\right)^2$$

の上にある．

以上より，示された．　　**〔証明終〕**

Lecture 2　関数

演習問題 2 − 1

次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$|\cos x| = \sin x$ をみたす x を求め，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$\cos(\cos x)$，$\cos(\sin x)$ の大小を比較せよ．

(2) $\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$，$\alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\alpha > \sin\beta$ となることを示し，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ を示せ．

解答・解説

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ において $\sin x \geqq 0$ である．

(I) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x \geqq 0$ なので $|\cos x| = \sin x$ より

$$\cos x = \sin x$$

これをみたすのは $x = \dfrac{\pi}{4}$ である．

(II) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\cos x \leqq 0$ なので $|\cos x| = \sin x$ より

$$-\cos x = \sin x$$

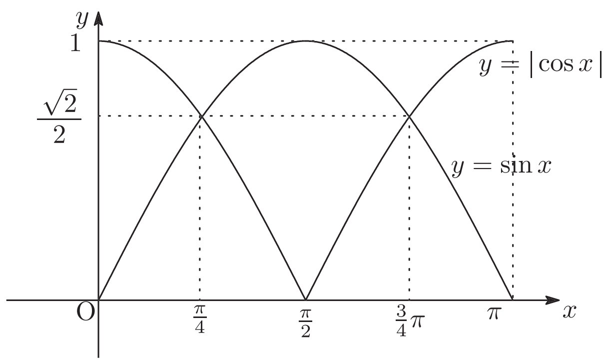
これをみたすのは $x = \dfrac{3}{4}\pi$ である．

以上より求める実数解は

$$x = \frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi. \qquad \textbf{(答)}$$

また，$\cos x = \cos(-x)$ であるから，$\cos(\cos x)$ と $\cos(\sin x)$ の大小関係を調べるためには，$\cos|\cos x|$ と $\cos(\sin x)$ の大小関係を調べれば十分である．

ここで，$y = |\cos x|$，$y = \sin x$ のグラフは下図のようになる．



$0 \leqq x \leqq 1 \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ の範囲において $\cos x$ は単調減少であるから，求める大小関係は

$$\begin{cases} \cos(\cos x) < \cos(\sin x) & \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi < x \leqq \pi\right) \\ \cos(\cos x) = \cos(\sin x) & \left(x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right) \\ \cos(\cos x) > \cos(\sin x) & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $\sin x$ が単調増加であることに注意すると

$$\begin{aligned} \cos\alpha - \sin\beta &> \cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \cos\alpha - \cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

より $\cos\alpha > \sin\beta$ は成り立つ．　　　**〔証明終〕**

ここで，$f(x) = \cos(\cos x) - \sin(\sin x)$ とすると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} - \sin\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} \\ &= \cos(\sin x) - \sin(\cos x) \\ &= \cos(-\sin x) - \sin(\cos x) \\ &= \cos\left\{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} - \sin\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称であり，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ について調べればよい．この範囲で $\alpha = \cos x$，$\beta = \sin x$ とすると

$$\cos x \geqq 0,\quad \sin x \geqq 0,\quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

であるから，条件 $\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$，$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ をみたす．
よって $\cos\alpha > \sin\beta$，すなわち $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ が成り立つ．　　　**〔証明終〕**

演習問題 2 − 2

$\boxed{1}$ $0 \leqq x < 2\pi$ とする．x の方程式

$$\sin 2x + \cos 3x = 0$$

をみたす最大の x に対して，$\sin x$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 関数

$$y = \sin 2\theta + 2a(\sin\theta + \cos\theta) + a^2 \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

を考える．ただし a は定数とする．次の問いに答えよ．

(1) $x = \sin\theta + \cos\theta$ として，y を x で表せ．
(2) y の最小値を求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$ 与えられた方程式を

$$\sin 2x + \cos 3x = 0 \quad \cdots(*)$$

とおく．

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

であるから，$(*)$ は

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos x + (4\cos^3 x - 3\cos x) &= 0 \\ \cos x\{2\sin x + 4(1 - \sin^2 x) - 3\} &= 0 \\ \therefore \quad \cos x(4\sin^2 x - 2\sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

すなわち

$$\cos x = 0 \ \text{ または } \ 4\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0.$$

(I) $\cos x = 0$ のとき．

$$x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}.$$

(II) $4\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$ のとき．

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

で，

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0 < \frac{1 + \sqrt{5}}{4} < 1$$

であるから，これら 2 つの値に対する x は，$0 < x < \pi$，$\pi < x < 2\pi$ の範囲にそれぞれ 2 個ずつ存在する．

ここで,

$$\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

をみたす x を小さい順に α, β とし，また

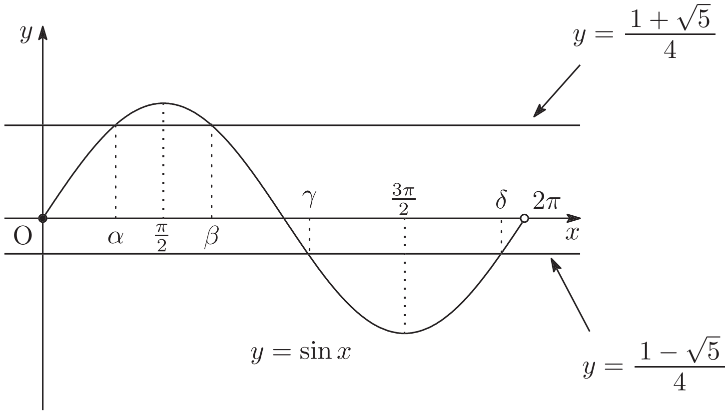
$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

をみたす x を小さい順に γ, δ とすると

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \gamma < \frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$$

であるから，求める値は

$$\sin\delta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \qquad \textbf{(答)}$$



$\boxed{2}$

(1) $x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと,

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sin\theta+\cos\theta)^2 \\ &= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(x^2-1).$$

よって与式は

$$\begin{aligned} y &= 2\sin\theta\cos\theta + 2a(\sin\theta+\cos\theta) + a^2 \\ &= x^2 + 2ax + a^2 - 1. \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) 今,

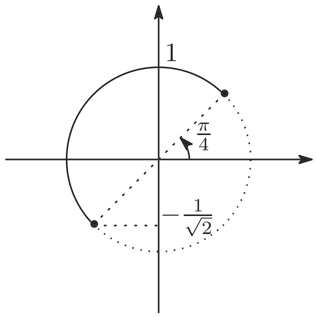
$$x = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{4}.$$

よって x の範囲は

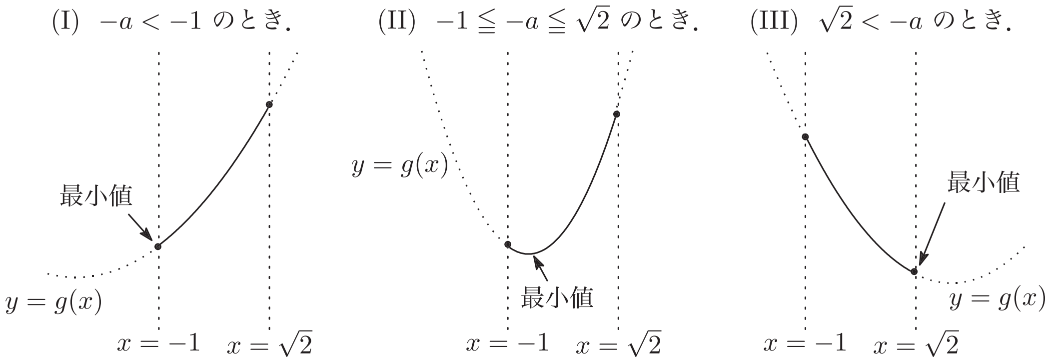
$$-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}.$$



このとき

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2ax + a^2 - 1 \\ &= (x+a)^2 - 1 \qquad \left(-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

とおく．$y = g(x)$ の軸 $x = -a$ の位置で場合を分ける．



(I) $-a < -1$，すなわち $1 < a$ のとき．

$$\min g(x) = g(-1) = a^2 - 2a.$$

(II) $-1 \leqq -a \leqq \sqrt{2}$，すなわち $-\sqrt{2} \leqq a \leqq 1$ のとき．

$$\min g(x) = g(-a) = -1.$$

(III) $\sqrt{2} < -a$，すなわち $a < -\sqrt{2}$ のとき．

$$\min g(x) = g(\sqrt{2}) = a^2 + 2\sqrt{2}a + 1.$$

以上より，求める最小値は

$$\begin{cases} a^2 - 2a & (1 < a \text{ のとき}) \\ -1 & \left(-\sqrt{2} \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}\right) \\ a^2 + 2\sqrt{2}a + 1 & \left(a < -\sqrt{2} \text{ のとき}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 2 − 3

$\boxed{1}$ 実数 x は不等式

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{x^2} > 3^{21-20x}$$

をみたす．次の問いに答えよ．

(1) x の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式

$$\frac{x^{16}}{125} = x^{16\log_5 x}$$

をみたす x の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 不等式

$$\log_x(3x^2 - 10x + 3) \leqq 1$$

を解け．

$\boxed{3}$ 関数

$$f(x) = \log_9\left(\frac{x^4}{3}\right) + \log_x\left(\frac{81}{\sqrt{x}}\right) \quad (x > 1)$$

の最小値を求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) 与えられた不等式は

$$3^{-4x^2} > 3^{21-20x}$$

と変形される．両辺，底 3 の対数をとると

$$-4x^2 > 21 - 20x.$$

整理して

$$\begin{aligned} &4x^2 - 20x + 21 < 0 \\ &(2x-3)(2x-7) < 0 \\ \therefore\quad &\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}. \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) 与式の両辺，底 5 の対数をとると

$$\log_5\left(\frac{x^{16}}{125}\right)=\log_5\left(x^{16\log_5 x}\right)$$
$$16\log_5 x-3=(16\log_5 x)(\log_5 x)$$

$t=\log_5 x$ とおくと上式は

$$16t-3=16t^2$$
$$16t^2-16t+3=0$$
$$(4t-1)(4t-3)=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{1}{4},\quad \frac{3}{4}.$$

よって

$$\log_5 x=\frac{1}{4},\quad \frac{3}{4}$$
$$\therefore\quad x=5^{\frac{1}{4}},\quad 5^{\frac{3}{4}}.$$

ここで

$$\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$$

より，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4<x^4<\left(\frac{7}{2}\right)^4$$

であり，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}=5.0625,\quad \left(\frac{7}{2}\right)^4=\frac{2401}{16}=150.0625$$

より，

$$5^{\frac{1}{4}}<\frac{3}{2}<5^{\frac{3}{4}}<\frac{7}{2}.$$

よって求める x の値は

$$x=5^{\frac{3}{4}}.\qquad \textbf{(答)}$$

$\boxed{2}$ まず，底の条件より

$$0<x<1,\quad 1<x.\quad \cdots①$$

また，真数の条件より

$$3x^2-10x+3>0$$
$$(3x-1)(x-3)>0$$
$$\therefore\quad x<\frac{1}{3},\quad 3<x.\quad \cdots②$$

① かつ ② より，

$$0 < x < \frac{1}{3},\quad 3 < x. \qquad \cdots(\#)$$

このもとで，与式は

$$\log_x(3x^2 - 10x + 3) \leqq \log_x x \qquad \cdots(*)$$

である．x の値の範囲で場合を分ける．

(I) $0 < x < \dfrac{1}{3}$ のとき．

$$3x^2 - 10x + 3 \geqq x$$

$$3x^2 - 11x + 3 \geqq 0.$$

$$\therefore \quad x \leqq \frac{11-\sqrt{85}}{6},\quad \frac{11+\sqrt{85}}{6} \leqq x.$$

$0 < \dfrac{11-\sqrt{85}}{6} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{11+\sqrt{85}}{6}$ であるから，x の範囲は

$$0 < x \leqq \frac{11-\sqrt{85}}{6}. \qquad \cdots③$$

(II) $3 < x$ のとき．

$$3x^2 - 10x + 3 \leqq x$$

$$3x^2 - 11x + 3 \leqq 0.$$

$$\therefore \quad \frac{11-\sqrt{85}}{6} \leqq x \leqq \frac{11+\sqrt{85}}{6}$$

$\dfrac{11-\sqrt{85}}{6} < 3 < \dfrac{11+\sqrt{85}}{6}$ であるから，x の範囲は

$$3 < x \leqq \frac{11+\sqrt{85}}{6}. \qquad \cdots④$$

求める x の範囲は ③ または ④ であるから

$$0 < x \leqq \frac{11-\sqrt{85}}{6},\quad 3 < x \leqq \frac{11+\sqrt{85}}{6}. \qquad \textbf{(答)}$$

$\boxed{3}$　$x>1$ であるから，底の条件と真数の条件はみたされている．底の変換公式を用いて

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log_3\left(\frac{x^4}{3}\right)}{\log_3 9}+\frac{\log_3\left(\frac{81}{\sqrt{x}}\right)}{\log_3 x} \\ &= \frac{1}{2}(4\log_3 x-1)+\frac{4-\frac{1}{2}\log_3 x}{\log_3 x} \\ &= 2\left(\log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}\right)-1. \end{aligned}$$

ここで $t=\log_3 x$ とおくと，$x>1$ より $t>0$．相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}\right)-1. \\ &= 2\left(t+\frac{2}{t}\right)-1 \\ &\geqq 4\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}-1 \\ &= 4\sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

等号は

$$t=\frac{2}{t}. \qquad \therefore \quad t=\sqrt{2}$$

のとき成立する．このとき $x=3^{\sqrt{2}}$ であるから，求める最小値は

$$4\sqrt{2}-1. \quad \left(x=3^{\sqrt{2}}\text{ のとき}\right). \qquad (\textbf{答})$$

演習問題 2 − 4

次の問いに答えよ．

(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ をみたす自然数 m，n は存在しないことを証明せよ．

(2) p，q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ．

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ．

解答・解説

(1) 背理法により示す．

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

をみたす自然数 m，n が存在すると仮定する．このとき

$$2^{\frac{m}{n}} = 3$$
$$\therefore \quad 2^m = 3^n.$$

m，n は自然数であるから，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

以上より，このような自然数 m，n は存在しない．　**〔証明終〕**

(2) 背理法により示す．

異なる自然数 p，q に対して $p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する．$p > q$ として一般性を失わない．このとき自然数 N を用いて

$$p\log_2 3 - q\log_2 3 = N$$

と表される．$p-q$ は自然数であるから

$$(p-q)\log_2 3 = N$$
$$\therefore \quad \log_2 3 = \frac{N}{p-q}$$

となるが，(1) よりこのような自然数 N，$p-q$ は存在しない．これは矛盾である．

以上より，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくない．　**〔証明終〕**

(3) $\log_2 3$ の小数第 1 位は，$10\log_2 3$ の整数部分の 1 の位である．

$$10\log_2 3 = \log_2 3^{10}$$

であり，

$$3^{10} = 59049, \quad 2^{15} = 32768, \quad 2^{16} = 65536$$

より，

$$
\begin{aligned}
2^{15} &< 3^{10} < 2^{16} \\
\log_2 2^{15} &< \log_2 3^{10} < \log_2 2^{16} \\
15 &< 10\log_2 3 < 16 \\
\therefore \quad 1.5 &< \log_2 3 < 1.6.
\end{aligned}
$$

以上より，小数第 1 位は

$$5. \qquad (\textbf{答})$$

Lecture 3　微積分

演習問題 3 − 1

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ について，次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の増減を調べて，$y = f(x)$ のグラフをえがけ.

(2) x の方程式 $f(x) = a$（a は正の定数）が異なる 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

(3) (2) のとき，異なる 3 つの実数解を α，β，γ（$\alpha < \beta < \gamma$）とする．このとき，

$$V = |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$$

のとり得る値の範囲を求めよ.

解答・解説

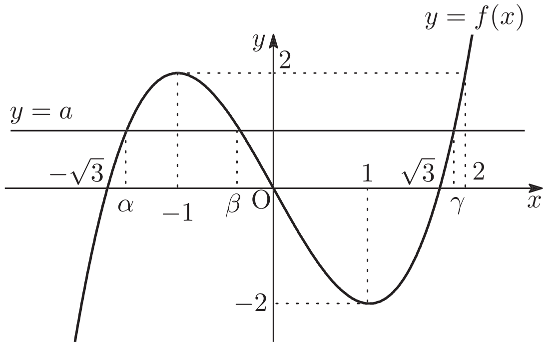
(1) $f(x) = x^3 - 3x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

したがって次の増減表を得る.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって，グラフは下図の太線部のようになる.　　**(答)**



(2) 次のように曲線 C と直線 l を定める.

$$\begin{cases} C : y = f(x) \\ l : y = a \end{cases}$$

$f(x) = a$ が相異なる 3 つの実数解をもつための条件は，曲線 C と直線 l が異なる 3 交点をもつことである．
よって，条件 $a > 0$ より，求める a の範囲は

$$0 < a < 2 \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 図より，$\alpha < 0,\ \beta < 0$ であるから

$$|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$$

が成立する．よって

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = |\alpha + \beta| + |\gamma|$$

ここで，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は x の 3 次方程式 $x^3 - 3x = a$ の異なる 3 つの実数解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad \therefore \quad \alpha + \beta = -r$$

よって

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| + |\gamma| &= |\alpha + \beta| + |\gamma| \\ &= |-\gamma| + |\gamma| \\ &= 2|\gamma| \end{aligned}$$

図より $\sqrt{3} < |\gamma| < 2$ であるから

$$\begin{aligned} &2\sqrt{3} < 2|\gamma| < 4 \\ \therefore \quad &2\sqrt{3} < |\alpha| + |\beta| + |\gamma| < 4 \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 3 − 2

a を実数とし，

$$f(x) = x^3 - 3ax$$

とする．区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．M の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答・解説

まず，

$$F(x) = |f(x)| = |x^3 - 3ax|$$

とおく．

$$\begin{aligned} F(-x) = |f(-x)| &= |-x^3 + 3ax| \\ &= |x^3 - 3ax| = |f(x)| = F(x) \end{aligned}$$

であるから，$F(x)$ は偶関数である．よって，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を考えれば十分である．

次に，

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$$

であるから，a の値で場合を分ける．

(I) $a \leqq 0$ のとき．$f'(x) \geqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調増加．$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ より，

$$M = f(1) = 1 - 3a.$$

(II) $a > 0$ のとき．

$$f'(x) = 3(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$$

であるから，$f'(x)$ は $x = \sqrt{a}$ で負から正に符号を変える．

よって，$a > 1$ のときは $M = F(1)$.

また $0 < a \leqq 1$ のとき，M は $F(\sqrt{a})$ と $F(1)$ のうち小さくない方である．

ここで $F(\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a}$ であり，

$$F(\sqrt{a}) > F(1)$$

を解くと，

(a) $a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき．

$$2a\sqrt{a} > 1 - 3a$$
$$(\sqrt{a} + 1)^2(2\sqrt{a} - 1) > 0.$$

よって $\dfrac{1}{4} < a \leqq \dfrac{1}{3}$.

(b) $a \geqq \dfrac{1}{3}$ のとき

$$2a\sqrt{a} > 3a - 1$$
$$(\sqrt{a}-1)^2(2\sqrt{a}+1) > 0.$$

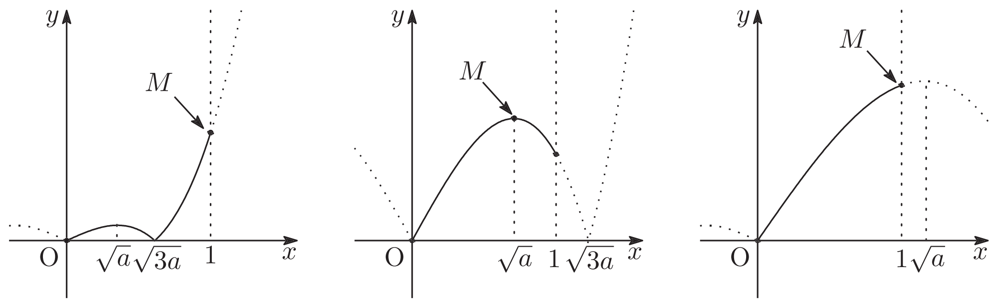
このときつねに $F(a) > F(1)$.

すなわち

$$\begin{cases} a \leqq \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & F(\sqrt{a}) \leqq F(1) \\ \dfrac{1}{4} < a \text{ のとき} & F(\sqrt{a}) > F(1) \end{cases}$$

である．よって，$y = F(x)$ のグラフは次のようになるから，

(i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき.　(ii) $\dfrac{1}{4} < a \leqq 1$ のとき.　(ii) $1 < a$ のとき.



(i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき.

$$M = f(1) = 1 - 3a.$$

(ii) $\dfrac{1}{4} < a \leqq 1$ のとき.

$$M = |\,f(\sqrt{a})\,| = 2a\sqrt{a}.$$

(iii) $1 < a$ のとき.

$$M = |\,f(1)\,| = |\,1 - 3a\,| = 3a - 1.$$

以上より，

$$M = \begin{cases} 1 - 3a & \left(a \leqq \dfrac{1}{4}\right) \\ 2a\sqrt{a} & \left(\dfrac{1}{4} < a \leqq 1\right) \\ 3a - 1 & (1 < a) \end{cases}$$

すなわち M は，$a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき単調減少，$a \geqq \dfrac{1}{4}$ のとき単調増加であるから，

$$a = \frac{1}{4} \text{ のとき　最小値} : \frac{1}{4}. \qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 3 − 3

点 P が放物線 $C_1 : y = 2x^2 - x$ 上を動く．点 P における C_1 の接線と，放物線 $C_2 : y = -x^2 + 1$ とで囲まれる部分の面積の最小値を求めよ．

解答・解説

C_1 の方程式の右辺を

$$f(x) = 2x^2 - x$$

とおく．P$(t,\ f(t))$，P における C_1 の接線を l とする．

$$f'(x) = 4x - 1$$

より，

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \therefore\quad y &= (4t-1)x - 2t^2 \ (= g(x) \text{ とおく}) \end{aligned}$$

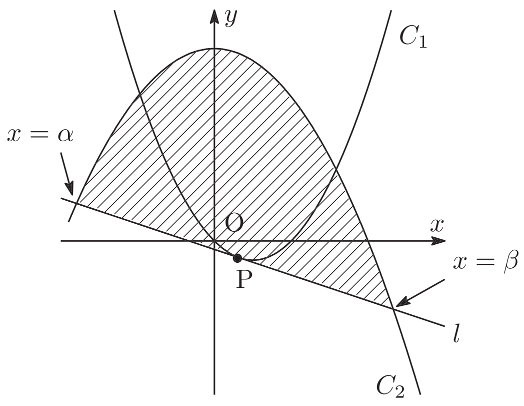
$C_2 : y = -x^2 + 1$ と連立すると，

$$\begin{aligned} (4t-1)x - 2t^2 &= -x^2 + 1 \\ x^2 + (4t-1)x - 2t^2 - 1 &= 0 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (4t-1)^2 - 4(-2t^2 - 1) \\ &= 24t^2 - 8t + 5 \\ &= 24\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{3} > 0. \end{aligned}$$

よって C_2 と l はつねに異なる 2 点を共有する．$(*)$ の実数解を α，β $(\alpha < \beta)$ として，問題の面積を S とおくと



$$\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \{(-x^2+1)-g(x)\}\,dx \\
&= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.
\end{aligned}$$

ここで $(*)$ を解くと

$$x = \frac{-(4t-1) \pm \sqrt{24t^2-8t+5}}{2}$$

より，

$$\begin{aligned}
\beta-\alpha &= \frac{-(4t-1)+\sqrt{24t^2-8t+5}}{2} - \frac{-(4t-1)-\sqrt{24t^2-8t+5}}{2} \\
&= \sqrt{24t^2-8t+5} \\
&= \sqrt{24\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{13}{3}}.
\end{aligned}$$

であるから，$t=\dfrac{1}{6}$ のとき $\beta-\alpha$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$ をとる．よって求める S の最小値は

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{6}\left(\frac{13}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{13\sqrt{39}}{54}. \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

演習問題 3 − 4

xy 平面上に 2 つの曲線

$$C_1 \ : \ y = x^3 - x, \quad C_2 \ : \ y = x^3 - x + 4$$

がある．点 $\mathrm{A}\big(p,\ p^3 - p\big)$ における曲線 C_1 の接線を l とする．ただし，$p \fallingdotseq 0$ とする．

(1) l の方程式を求めよ．
(2) l と C_1 の A 以外の共有点 B の座標を求めよ．
(3) l と C_2 がある点 D で接するとき，p の値を求めよ．
(4) (3) のとき，C_1 と l とで囲まれた図形の面積を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x) = x^3 - x$ とおく．
$f'(x) = 3x^2 - 1$ より，$x = p$ における接線の方程式は

$$y = (3p^2 - 1)(x - p) + p^3 - p$$

整理して，求める方程式は

$$l : y = (3p^2 - 1)x - 2p^3 \qquad \textbf{(答)}$$

(2) C_1 と l の方程式を連立して y を消去すれば

$$x^3 - x = 3p^2x - x - 2p^3$$

$x = p$ を重解に持つことより，整理して

$$(x - p)^2(x + 2p) = 0$$

したがって，B の x 座標は $x = -2p$ となる．$f(-2p) = -8p^3 + 2p$ だから，求める座標は

$$\mathrm{B}(-2p,\ -8p^3 + 2p) \qquad \textbf{(答)}$$

(3) $g(x) = x^3 - x + 4$ とおく．$g'(x) = 3x^2 - 1$ であるから，C_2 上の点 $(t,\ t^3 - t + 4)$ における接線の方程式は同様にして

$$y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 4$$

これが l と一致するので

$$\begin{cases} 3t^2 - 1 = 3p^2 - 1 & \cdots\cdots ① \\ -2t^3 + 4 = -2p^3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より

$$t = p,\ -p$$

$t = p$ は ② をみたさないため不適.
$t = -p$ のとき，② に代入して整理すると

$$p^3 = -1$$

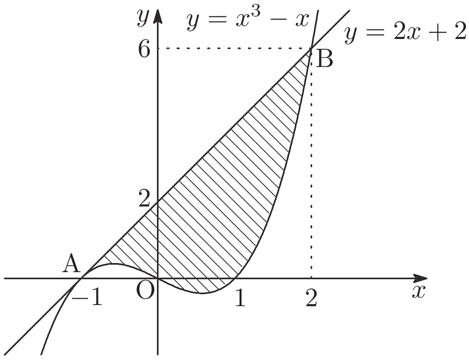
p は実数であるから

$$p = -1 \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $p = -1$ を代入して

$$l : y = 2x + 2,\ \mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 6)$$

となるので，求める面積は図の斜線部.



よって

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{2} \{(2x + 2) - (x^3 - x)\} dx \\
=& \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2) dx \\
=& \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2} \\
=& (-4 + 6 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right) \\
=& \frac{27}{4} \qquad \textbf{(答)}
\end{aligned}$$

Lecture 4　数列

演習問題 4 − 1

次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，次の和を計算せよ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

(2) 任意の自然数 k に対して，次の等式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}=k(k+1), \\ \dfrac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}=k(k+1)(k+2) \end{cases}$$

が成り立つことを利用して，和

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1),\quad \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

をそれぞれ n で表せ．

(3) 任意の自然数 k に対して，次の等式

$$\begin{cases} k(k+1)-k=k^2, \\ (k-1)k(k+1)+k=k^3 \end{cases}$$

が成り立つことを利用して，和

$$\sum_{k=1}^{n} k^2,\quad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

をそれぞれ n で表せ．

解答・解説

(1) (a) 任意の自然数 k に対して

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

が成り立つから，与式は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}. \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(b) 任意の自然数 k に対して

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

が成り立つから，与式は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\\&=\sqrt{n+1}-1.\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) 任意の自然数 k に対して

$$k(k+1)=\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

が成り立つから，両辺の $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ にわたる和をとって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\&=\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0\cdot1\cdot2\}\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

同様に，任意の自然数 k に対して

$$k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

が成り立つから，両辺の $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ にわたる和をとって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\&=\frac{1}{4}\{n(n+1)(n+2)(nL+3)-0\cdot1\cdot2\cdot3\}\\&=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3) 任意の自然数 k に対して

$$k^2=k(k+1)-k$$

が成り立つから，上の結果を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-k\}\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

また，任意の自然数に対して

$$\begin{aligned} k^3 &= k^3 - k + k \\ &= (k-1)k(k+1) + k \end{aligned}$$

が成り立つから，上の結果を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} \{(k-1)k(k+1) + k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)(k+2) + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n-1)(n+2) + 2\} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \qquad (\textbf{答}) \end{aligned}$$

演習問題 4 − 2

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．自然数 n に対して

$$S_n = n^3 + 3n^2 + 2n$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ を計算せよ．

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が,

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n で表せ．

(2) a_n を n で表せ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) 任意の自然数 n に対して

$$S_n = n^3 + 3n^2 + 2n \quad \cdots ①$$

が成り立つから，$n = 1$ として

$$a_1 = 1 + 3 + 2 = 6.$$

また，$n \geqq 2$ として

$$S_{n-1} = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1) \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= a_n \\ &= \{n^3 - (n-1)^3\} + 3\{n^2 - (n-1)^2\} + 2\{n - (n-1)\} \\ &= 3n^2 + 3n. \end{aligned}$$

この式で $n = 1$ とすると，上で得られた a_1 と一致するから，求める一般項は

$$a_n = 3n^2 + 3n. \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \textbf{(答)}$$

(2)　(1) の結果より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(k+1)}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)　与えられた式を

$$S_n=2a_n+n^2\quad\cdots①$$

とおく．① で $n=1$ として

$$S_1=a_1=2a_1+1.\qquad\therefore\quad a_1=-1.$$

また ① で n を $n+1$ として

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+(n+1)^2\quad\cdots②$$

② − ① として

$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n=a_{n+1}&\\&=2a_{n+1}-2a_n+(n+1)^2-n^2\\\therefore\quad a_{n+1}&=2a_n-2n-1.\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)\qquad\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2)　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおく．すなわち

$$b_n=a_{n+1}-a_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とする．

$$a_{n+1}=2a_n-2n-1.\quad\cdots③$$

で $n=1$ として

$$a_2=-5.$$

また ③ で n を $n+1$ として

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-2n-3.\quad\cdots④$$

④ − ③ より

$$\begin{aligned}a_{n+2}-a_{n+1}&=2(a_{n+1}-a_n)-2.\\\therefore\quad b_{n+1}&=2b_n-2.\quad\cdots⑤\end{aligned}$$

$b_1 = a_2 - a_1 = -4$ のもとでこれを解く．1 次方程式

$$c = 2c - 2$$

の解 $c = 2$ を用いて ⑤ は

$$b_{n+1} - 2 = 2(b_n - 2)$$

と変形される．この式は，数列 $\{b_n - 2\}$ が公比 2，初項 $b_1 - 2 = -6$ の等比数列であることを示しているから，

$$b_n - 2 = (-6) \cdot 2^{n-1}.$$
$$\therefore \quad b_n = -3 \cdot 2^n + 2.$$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3 \cdot 2^k + 2) \\ &= -1 + \frac{-6\left(2^{n-1} - 1\right)}{2 - 1} + 2(n-1) \\ &= -3 \cdot 2^n + 2n + 3. \end{aligned}$$

この式で $n = 1$ とすると，(1) で得られた a_1 と一致する．よって求める一般項は

$$a_n = -3 \cdot 2^n + 2n + 3. \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 4 − 3

数列 $\{a_n\}$ は
$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = 16{a_n}^3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
をみたす．次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおくことにより，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(2) すべての自然数 n に対して $a_n = a$ となるような a の値を求めよ．

解答・解説

(1) 初項 $a_1 = a > 0$ であり，漸化式から帰納的にすべての自然数 n に対して
$$a_n > 0.$$
漸化式の両辺の，底 2 の対数をとると
$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1} &= \log_2\left(16{a_n}^3\right)\\ &= 3\log_2 a_n + 4.\end{aligned}$$
$b_n = \log_2 a_n$ とすると
$$b_{n+1} = 3b_n + 4.$$
$b_1 = \log_2 a$ のもとでこれを解く．1 次方程式
$$c = 3c + 4$$
の解 $c = -2$ を用いて
$$b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2).$$
この式は数列 $\{b_n + 2\}$ が公比 3，初項 $b_1 + 2 = \log_2 a + 2$ の等比数列であることを示す．よって
$$b_n + 2 = (\log_2 a + 2)\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore \quad b_n = (\log_2 a + 2)\cdot 3^{n-1} - 2. \quad \cdots(*)$$
以上より，
$$a_n = 2^{(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2}. \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \textbf{(答)}$$

(2) すべての自然数 n に対して
$$a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad b_n = \log_2 a \quad \cdots(\#)$$
であるから，$(*)$ で $n = 2$ としても $(\#)$ は成り立つ．すなわち
$$b_2 = 3(\log_2 a + 2) - 2 = \log_2 a.$$

このとき

$$\log_2 a = -2 \qquad \therefore \quad a = \frac{1}{4}$$

でなくてはならない．逆にこのとき，すべての自然数 n で $(\#)$ が成り立つ．

以上より，求める a の値は

$$a = \frac{1}{4}. \qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 $4-4$

正の整数からなる数列 $\{a_n\}$ が，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$\begin{cases} n\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)<2, & \cdots ① \\ 2+\dfrac{1}{a_{n+1}}<(n+1)\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたし，かつ $a_2=2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_3 を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解答・解説

(1) ① で $n=1$ として

$$1\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)<2.$$

$a_2=2$ を用いて整理すると

$$\frac{1}{a_1}<2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$
$$\therefore\quad a_1>\frac{2}{3}.$$

② で $n=1$ として

$$2+\frac{1}{a_2}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$$
$$\therefore\quad a_1<\frac{4}{3}$$

a_1 は正の整数であるから

$$a_1=1. \qquad (\textbf{答})$$

同様に ① で $n=2$ として

$$2\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)<2$$
$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a_3}\right)<2$$
$$\therefore\quad a_3>2.$$

② で $n=2$ として

$$2+\frac{1}{a_3}<3\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$$
$$\frac{2}{a_3}>\frac{1}{2}.$$
$$\therefore\quad a_3<4.$$

a_3 は正の整数であるから，

$$a_3=3.\qquad \textbf{(答)}$$

(2) 求める一般項は

$$a_n=n\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

であると推定される．この推定が正しいことを，n に関する数学的帰納法により示す．

(I) $n=1,\ 2$ のとき．

$a_1=1$，$a_2=2$ より成立．

(II) 2 以上のある自然数 k に対して

$$a_k=k\quad \cdots(\#)$$

であると仮定する．このもとで

$$a_{k+1}=k+1$$

であることを示す．① で $n=k$ として

$$k\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)<2.$$

$a_k=k$ とすると

$$k\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)<2$$
$$\frac{k}{a_{k+1}}<1.$$
$$\therefore\quad a_{k+1}>k.$$

また ② で $n=k$ とすると

$$2+\frac{1}{a_{k+1}}<(k+1)\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$a_k=k$ を代入して整理すると

$$2+\frac{1}{a_k}<(k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$\frac{k}{a_{k+1}}>2-\frac{k+1}{k}=\frac{k-1}{k}$$
$$\therefore\quad a_{k+1}<\frac{k^2}{k-1}=k+1+\frac{1}{k-1}\quad (k\geqq 2)$$

すなわち

$$k < a_{k+1} < k + 1 + \frac{1}{k-1}$$

であるから

$$a_{k+1} = k + 1.$$

以上より，示された．　**〔証明終〕**

よって求める一般項は

$$a_n = n. \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \textbf{(答)}$$

Lecture 5　ベクトル

演習問題 5 − 1

三角形 OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を M，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を N とする．さらに，線分 AN と線分 BM の交点を X とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OX と辺 AB の交点を Y とするとき，AY : YB を求めよ．

(3) 三角形 OAB の面積を S とし，(2) の Y に対して三角形 MNY の面積を T とする．$S:T$ を求めよ．

解答・解説

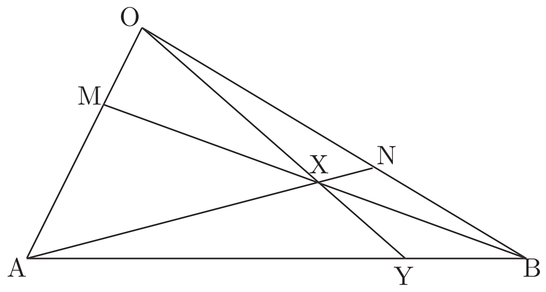
(1) X は AN 上にあるので，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおける．また，X は BM 上にあるので，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおける．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，2 式の係数を比較して

$$\begin{cases} 1-s=\dfrac{1}{3}t \\ \dfrac{3}{5}s=1-t \end{cases}$$

より

$$s=\frac{5}{6},\quad t=\frac{1}{2}$$

となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.\qquad \text{(答)}$$

(2) Y は OX 上にあるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OY}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OX}} \ (k \text{ は実数}) \\ &= \frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

また Y は AB 上にあるので

$$\frac{k}{6} + \frac{k}{2} = 1$$

したがって $k = \dfrac{3}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OY}} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}\end{aligned}$$

より

$$\mathrm{AY} : \mathrm{YB} = 3 : 1. \qquad (\textbf{答})$$

(3) (2) より

$$\begin{aligned}T &= S - (\triangle\mathrm{OMN} + \triangle\mathrm{AMY} + \triangle\mathrm{BNY}) \\ &= S - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot S + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot S + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot S\right) \\ &= \frac{1}{5}S\end{aligned}$$

となるので

$$S : T = 5 : 1. \qquad (\textbf{答})$$

演習問題 5 − 2

平面上の異なる 3 点 O，A，B は同一直線上にないとする．この平面上の点 P が，

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) 点 P の軌跡が円となることを示せ．
(2) (1) で得られた円の中心を C とする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．
(3) O との距離が最小となる (1) の円周上の点を P_0 とする．A，B が条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0$$

をみたすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s，t の値を求めよ．

解答・解説

$\mathrm{O}(\vec{0})$，$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ とおく．

(1) 与式の両辺を 2 で割って整理すると

$$\begin{aligned}
\left|\vec{p}\right|^2-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{2}\cdot\vec{p}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}&=0\\
\left|\vec{p}\right|^2-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{2}\cdot\vec{p}+\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2&=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}+\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2\\
\therefore\quad \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2&=\frac{\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{a}\cdot\vec{b}}{4^2}\\
&=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2
\end{aligned}$$

すなわち与式は

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|.\quad\cdots(*)$$

これは点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right)$ を中心とする，半径 $\left|\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|$ の円を表す．　**〔証明終〕**

(2) 上の結果より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right).\qquad\textbf{(答)}$$

(3) 条件より

$$\left|\vec{a}\right|^2+5\,\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=0.\quad\cdots(\#)$$

OP の長さが最小のとき，点 P は直線 OC と問題の円との交点のうち，O に近い方である．このとき 3 点 O，P，C は共線であるから，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表される．(∗) に代入して，両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}\left|(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 &= \left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2\\ (k-1)^2\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2 &= \left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2\\ (k-1)^2\left(\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}.\end{aligned}$$

ここで (#) より，

$$\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2 = -5\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

上式に代入すると

$$(k-1)^2\left(-9\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = -\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

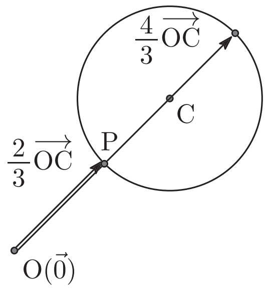
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ とすると，(#) より

$$\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2=0. \qquad \therefore \quad \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=0$$

であるから，3 点 O，A，B は一致することになり，不適．よって $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ であるから，

$$9(k-1)^2=1.$$

$$\therefore \quad k=\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}.$$



よって，問題の点 P は $k=\dfrac{2}{3}$ に対応するから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，求める s，t の値は

$$s=\frac{1}{6},\quad t=-\frac{1}{3}. \qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 5 − 3

$\boxed{1}$ 空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 2, 5)，B(2, 5, 1)，C(1, 1, k) が同一平面上にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) k の値を求めよ．

(2) 2 直線 AB，OC の交点の座標を求めよ．

$\boxed{2}$ 2 つのベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

に関して，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす平行 4 辺形の面積を求めよ．

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めよ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1) 4 点 O，A，B，C は同一平面上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots ①$$

をみたす実数 s，t が存在する．

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，① は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} &= s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s+2t \\ 2s+5t \\ 5s+t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これをみたす実数 s，t が存在するから，

$$\begin{cases} s + 2t = 1 & \cdots ② \\ 2s + 5t = 1 & \cdots ③ \\ 5s + t = k & \cdots ④ \end{cases}$$

②，③ より

$$s=3,\quad t=-1.$$

④ に代入して

$$k=5\cdot 3+(-1)=14.\qquad (\textbf{答})$$

(2) AB と OC の交点を P とする．

3 点 O，P，C は同一直線上にあるから，u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-u\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

3 点 A，P，B は同一直線上にあるから，

$$3u+(-u)=1.\qquad \therefore\quad u=\frac{1}{2}.$$

よって，O を始点とする点 P の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\14\end{pmatrix}.$$

以上より，求める座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 7\right).\qquad (\textbf{答})$$

$\boxed{2}$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+1\cdot 2+(-1)\cdot 2=-1.\qquad (\textbf{答})$

(2) 求める面積を S とする．まず，

$$\left|\vec{a}\right|^2=3,\quad \left|\vec{b}\right|^2=9$$

であるから，

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\&=\sqrt{3\cdot 9-(-1)^2}\\&=\sqrt{26}\qquad (\textbf{答})\end{aligned}$$

(3) 求める単位ベクトルを

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$$

とおく．このベクトルは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に直交する単位ベクトルであるから，

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=p+q-r=0 & \cdots ①\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=-p+2q+2r=0 & \cdots ②\\ \left|\vec{n}\right|^2=p^2+q^2+r^2=1. & \cdots ③\end{cases}$$

①＋② より

$$3q + r = 0. \qquad \therefore \quad r = -3q.$$

① に代入して

$$p + q + 3q = 0. \qquad \therefore \quad p = -4q.$$

これらを ③ に代入すると

$$16q^2 + q^2 + 9q^2 = 1. \qquad \therefore \quad q = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

よって求める単位ベクトルは

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(答)}$$

演習問題 5 − 4

O を原点とする座標空間内に，3 点 A(1, −1, 0)，B(1, 1, 4)，C(4, 3, 5) をとる．次の問いに答えよ．

(1) 平面 OAB に関して点 C と対称な点を D とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を適当な実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表したとき，s，t，u の値を求めよ．

(2) 4 面体 OABC の体積を求めよ．

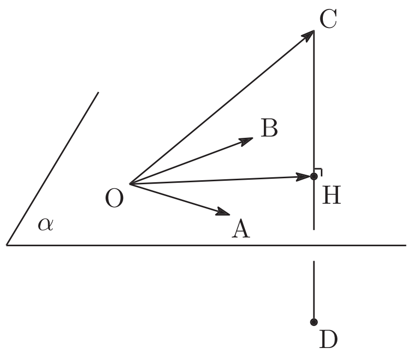
(3) O と平面 ABC の距離を求めよ．

解答・解説

(1) 平面 OAB を α とし，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とすると，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である．点 C から平面 α に下ろした垂線の足を H とすると，



p，q を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

と表される．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = p\vec{a} + q\vec{b} - \vec{c}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ は直交するから

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \vec{a} = p\left|\vec{a}\right|^2 + q\,\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \quad \cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \vec{b} = p\,\vec{a}\cdot\vec{b} + q\left|\vec{b}\right|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \quad \cdots ②$$

である．ここで，

$$\left|\vec{a}\right|^2=2,\quad \left|\vec{b}\right|^2=18,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=27$$

であるから，① は

$$2p-1=0.\qquad \therefore\quad p=\frac{1}{2}.$$

② は

$$18q-27=0.\qquad \therefore\quad q=\frac{3}{2}.$$

以上より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}.$$

すなわち

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=2\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)-\vec{c}\\&=\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}\\&=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\end{aligned}$$

とすると，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$s=1,\quad t=3,\quad u=-1.\qquad (\textbf{答})$$

(2) 4 面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|$$

で，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 18-0^2}=3.\end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=3$．以上より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3=3.\qquad (\textbf{答})$$

(3) 求める距離を h とすると，

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h = 3. \qquad \therefore \quad h = \frac{9}{\triangle\mathrm{ABC}}$$

である．$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求める．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = 20, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 50, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 28.$$

よって

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\right)^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{20\cdot 50 - 28^2} \\ &= 3\sqrt{6}. \end{aligned}$$

以上より，求める距離は

$$h = \frac{9}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \qquad \textbf{(答)}$$

添削課題

次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．$x \leqq 0$ において，常に $x^3 + 4x^2 \leqq ax + 18$ が成り立っているものとする．このとき，a の取りうる値の範囲を求めよ．

(2) (1) で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3 + 4x^2 \leqq a_0 x + 18$$

を解け．

解答・解説

(1) 与えられた不等式より

$$x^3 + 4x^2 \leqq ax + 18 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 + 4x^2 - 18 \leqq ax \text{①}$$

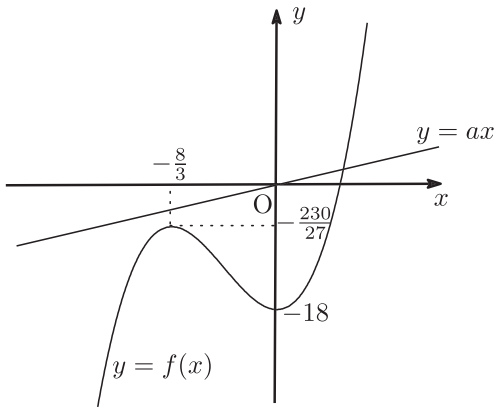
$f(x) = x^3 + 4x^2 - 18$ とおけば

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x(3x + 8)$$

したがって次の増減表を得る．

x	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{230}{27}$	$\searrow$	-18	$\nearrow$

よって，グラフは下図のようになる．



いま，直線 $y = ax$ と $y = f(x)$ が接するときの a の値を求める．

$y=f(x)$ 上の点 $(s,\ f(s))$ における $y=f(x)$ の接線は

$$y=f'(s)(x-s)+f(s)\iff y=s(3s+8)(x-s)+s^3+4s^2-18$$

と表せる．これが原点 $(0,\ 0)$ を通るとき

$$0=s(3s+8)(-s)+s^3+4s^2-18\iff(s+3)(s^2-s+3)=0$$

となる．

$$s^2-s+3=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$$

であるから $s=-3$ であり，このときの接線の方程式は $y=3x$ となる．
よって，図より，すべての $x\leqq 0$ に対して $f(x)\geqq ax$ をみたす a の範囲は

$$a\leqq 3 \qquad \textbf{(答)}$$

(2) (1) より $a_0=3$ であるから，これを不等式に代入して

$$\begin{aligned}&x^3+4x^2\leqq 3x+18\\&x^3+4x^2-3x-18\leqq 0\\&(x-2)(x^2+6x+9)\leqq 0\\&(x-2)(x+3)^2\leqq 0\end{aligned}$$

したがって

$$x\leqq 2 \qquad \textbf{(答)}$$

M2JB

高２東大数学～数学ⅡＢ発展～

Z-KAI

会員番号			氏　名	