問題

【1】(1)　三平方の定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{BC} &= \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{25+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

なので

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{41}}{41}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{41}}{41}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2)　三平方の定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{AC} &= \sqrt{7^2-5^2} = \sqrt{49-25} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

なので

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{6}}{12}}$$

(3)　三平方の定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{BC} &= \sqrt{10^2-5^2} \\ &= \sqrt{100-25} \\ &= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

なので

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{5}{10} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(4)　三平方の定理より

$$\begin{aligned} \mathrm{BC} &= \sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{16-8} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

なので

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{1}$$

【2】(1)

$$\frac{AH}{AB} = \sin(\alpha+\beta)$$
$$\frac{AH}{1} = \sin(\alpha+\beta)$$
$$AH = \boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)}$$

(2)

$$\frac{BE}{AB} = \cos\beta$$
$$\frac{BE}{1} = \cos\beta$$
$$BE = \boldsymbol{\cos\beta}$$

また

$$\frac{AE}{AB} = \sin\beta$$
$$\frac{AE}{1} = \sin\beta$$
$$AE = \boldsymbol{\sin\beta}$$

図 1

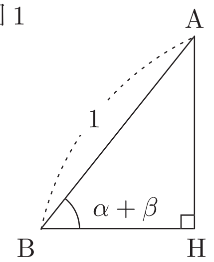


図 2

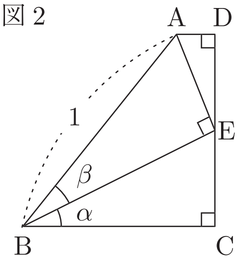
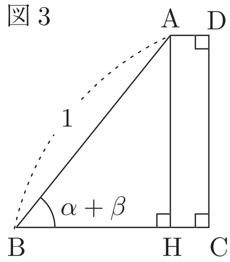


図 3



(3)

$$\frac{CE}{BE} = \sin\alpha$$
$$\frac{CE}{\cos\beta} = \sin\alpha$$
$$CE = \boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta}$$

△BCE において,

$$\angle CEB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

また,

$$\begin{aligned}\angle AED &= 180^\circ - \angle AEC \\ &= 180^\circ - (\angle AEB + \angle CEB) \\ &= 180^\circ - \{90^\circ + (90^\circ - \alpha)\} = \alpha\end{aligned}$$

よって

$$\frac{ED}{AE} = \cos\alpha$$
$$\frac{ED}{\sin\beta} = \cos\alpha$$
$$ED = \boldsymbol{\cos\alpha\sin\beta}$$

(4) 図 3 より

$$AH = CD$$
$$AH = CE + ED$$
$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

(5)

$$\frac{BC}{BE} = \cos\alpha$$
$$\frac{BC}{\cos\beta} = \cos\alpha$$
$$BC = \boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta}$$

また

$$\frac{AD}{AE} = \sin\alpha$$
$$\frac{AD}{\sin\beta} = \sin\alpha$$
$$AD = \boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta}$$

(6) $AH = CD$ が成り立つとき,
図 1 より, $BH = \cos(\alpha+\beta)$
(5) より,
$BC = \cos\alpha\cos\beta$
$AD = \sin\alpha\sin\beta$
図 3 より
$BH = BC - HC = BC - AD$
よって
$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)}$
$\boldsymbol{= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

【3】(1)

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \cos 30^\circ$$
$$\frac{x}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \sin 30^\circ$$
$$\frac{y}{1} = \frac{1}{2}$$
$$y = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

A から BC に下した垂線の足を H とすると,

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} = \sin 30^\circ$$
$$\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}$$
$$z = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

(2)

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \cos 30^\circ$$
$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$
$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}} = \cos 30^\circ$$
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ を代入して

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{4}a}$$
$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} = \cos 30^\circ$$
$$\frac{z}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$y = \frac{3}{4}a$ を代入して

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{4}a$$
$$= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}a}$$

(3)

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \sin 60^\circ$$
$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$
$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}} = \sin 60^\circ$$
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ を代入して

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{4}a}$$
$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} = \sin 60^\circ$$
$$\frac{z}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$y = \frac{3}{4}a$ を代入して

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{4}a$$
$$= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}a}$$

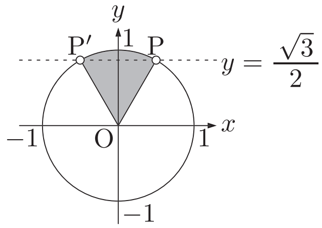
【4】

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

【5】 (1) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす α の値は，単位円周上の y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点 P，P$'$ に対応する角であるから，

$\alpha = 60^\circ$，120°

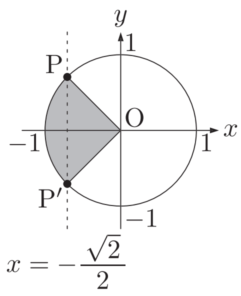


y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より大きい単位円の周上の点の集合は，$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ であるから，求める θ の値の範囲は

$\boldsymbol{60^\circ < \theta < 120^\circ}$

(2) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす α の値は単位円周上に x 座標が $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である点 P，P$'$ に対応する角であるから

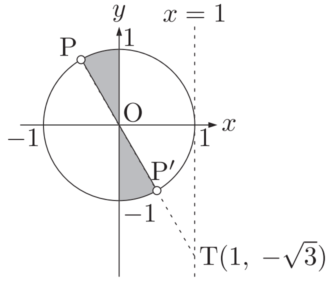
$\alpha = 135^\circ$，225°



単位円周上の x 座標が $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 以下の点の集合は，$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ であるから，求める θ の値の範囲は

$\boldsymbol{135^\circ \leqq \theta \leqq 225^\circ}$

(3) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ を満たす α の値は，直線 $x=1$ 上での y 座標が $-\sqrt{3}$ である点 T に対する単位円周上の点 P，P$'$ に対応する角であるから

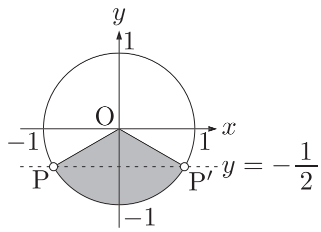


$$\alpha = 120°,\ 300°$$

直線 $x=1$ 上での y 座標が $-\sqrt{3}$ より小さい点の集合を考えて

$$\mathbf{90° < \theta < 120°,\ 270° < \theta < 300°}$$

(4)



$$2\sin\theta + 1 < 0$$
$$\sin\theta < -\frac{1}{2}$$

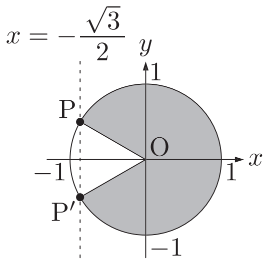
です．$\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$ を満たす α の値は，単位円周上の y 座標が $-\dfrac{1}{2}$ である点 P，P$'$ に対応する角であるから，

$$\alpha = 210°,\ 330°$$

y 座標が $-\dfrac{1}{2}$ より小さい点の集合は，$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ であるから，求める θ の値の範囲は

$$\mathbf{210° < \theta < 330°}$$

(5)



$$2\cos\theta \geqq -\sqrt{3}$$
$$\cos\theta \geqq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

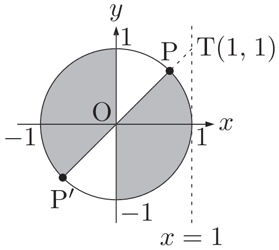
です．$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす α の値は単位円周上に x 座標が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点 P，P$'$ に対応する角であるから

$$\alpha = 150°,\ 210°$$

単位円周上の x 座標が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 以上の点の集合は，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{P'A}}$ であるから，求める θ の値の範囲は

$$\mathbf{0° \leqq \theta \leqq 150°,\ 210° \leqq \theta < 360°}$$

(6) $\tan\alpha = 1$ を満たす α の値は，直線 $x = 1$ 上での y 座標が 1 である点 T に対する単位円周上の点 P，P$'$ に対応する角であるから



$\alpha = 45^\circ$，225°

直線 $x = 1$ 上での y 座標が 1 以下の点の集合を考えて

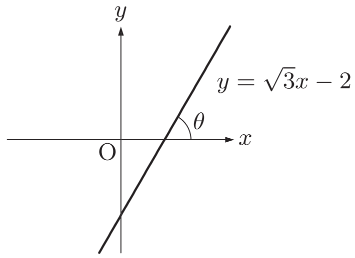
$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ}$**，**$\boldsymbol{90^\circ < \theta \leqq 225^\circ}$**，**$\boldsymbol{270^\circ < \theta < 360^\circ}$

【6】(1) 直線 $y=\sqrt{3}x-2$ と x 軸の正の向きとのなす角を
θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$$\tan\theta=\sqrt{3}$$

よって

$$\theta=\mathbf{60^\circ}$$

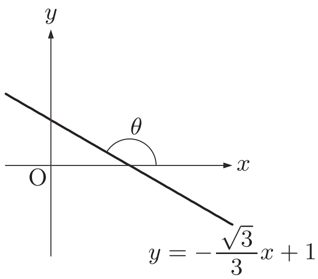


(2) 直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，

$$\theta=\mathbf{150^\circ}$$



(3) 直線 $y=x-1$ と x 軸の正の向きとのなす角を α $(0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ)$，
直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ と x 軸の正の向きとのなす角を β $(0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに，

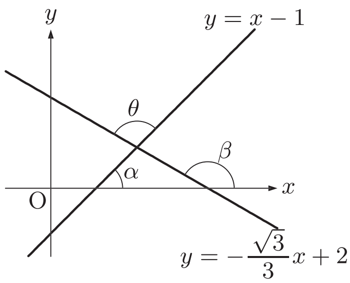
$$\alpha=45^\circ,\ \beta=150^\circ$$

2 直線のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}\theta&=\beta-\alpha\\&=150^\circ-45^\circ\\&=105^\circ>90^\circ\end{aligned}$$

求める角は鋭角なので，

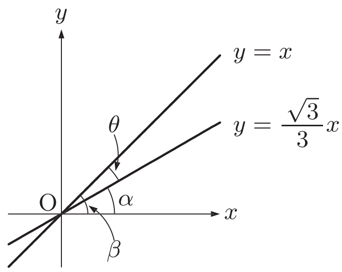
$$180^\circ-105^\circ=\mathbf{75^\circ}$$



(4) $x-\sqrt{3}y=0$ より，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

$x-y=0$ より，$y=x$

直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を α，直線 $y=x$ と x 軸の正の向きとのなす角を β とすると，



$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan\beta=1$$

ゆえに，

$$\alpha=30^\circ,\ \beta=45^\circ$$

2 直線のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}\theta&=\beta-\alpha\\&=45^\circ-30^\circ\\&=15^\circ<90^\circ\end{aligned}$$

よって，求める鋭角は，**15°**

(5) 求める直線を $y=ax+b\cdots①$ とおく．

$y=ax+b$ と x 軸の正の向きとのなす角が 135° なので，

$$a=\tan 135^\circ$$
$$a=-1$$

①に，$a=-1$ を代入すると，

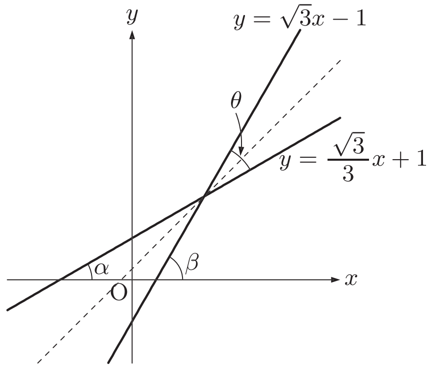
$$y=-x+b$$

この直線は $(-1,\ 2)$ を通るので，

$$2=1+b$$
$$b=1$$

よって，$\boldsymbol{y=-x+1}$

(6) まず 2 直線のなす角を求める．



直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$ と x 軸の正の向きとのなす角を α $(0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ)$，直線 $y=\sqrt{3}x-1$ と x 軸の正の向きとのなす角を β $(0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan\beta=\sqrt{3}$$

ゆえに

$$\alpha=30^\circ,\ \beta=60^\circ$$

2 直線のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}\theta&=\beta-\alpha\\&=60^\circ-30^\circ\\&=30^\circ\end{aligned}$$

よって，2 直線のなす鋭角は 30° である．
求める直線はこれを 2 等分するので

$$30^\circ \div 2=15^\circ$$

つまり $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$ と求める直線のなす角は 15° なので，求める直線と x 軸のなす角を γ とすると

$$\gamma=30^\circ+15^\circ=45^\circ$$
$$\tan\gamma=1$$

よって，求める直線を $y=ax+b$ とすると

$$a=1$$

また，求める直線は $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1,\ y=\sqrt{3}x-1$ の交点を通る．
交点は

$$(x,\ y)=(\sqrt{3},\ 2)$$

より，$y=x+b$ に代入して

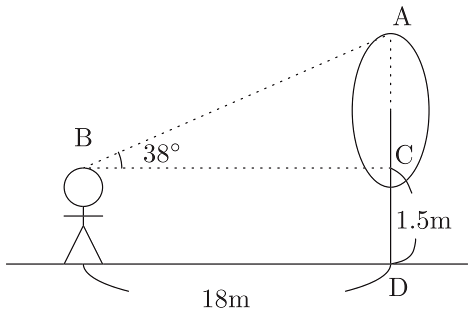
$$2=\sqrt{3}+b$$
$$b=2-\sqrt{3}$$

したがって

$$\boldsymbol{y=x+2-\sqrt{3}}$$

【7】図のように A, B, C, D を定めると

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \tan 38^\circ$$
$$\frac{\mathrm{AC}}{18} = 0.7813$$
$$\mathrm{AC} = 18 \times 0.7813$$
$$= 14.0634$$



木の高さは

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD}$$
$$= 14.0634 + 1.5$$
$$= \mathbf{15.5634(m)}$$

【8】(1) △ABC において

$$\angle ABC = 72^\circ$$

よって

$$\angle ABD = \angle DBC = 36^\circ$$

これより，△ABD，△BCD は二等辺三角形である．

$$BC = BD = AD = 1$$

ここで，$CD = x$ とおく．
△ABC ∽ △BCD であるので

$$\begin{aligned} AC : BD &= BC : CD \\ (1+x) : 1 &= 1 : x \\ x(1+x) &= 1 \\ x^2 + x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

よって

$$CD = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

また

$$\begin{aligned} AB &= AD + DC \\ &= 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

(2) A から BC におろした垂線の足を H とすると

$$\angle BAH = 36^\circ \times \frac{1}{2} = 18^\circ$$

$$BH = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

より，△ABH において

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ &= \frac{BH}{AB} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} \end{aligned}$$

D から AB におろした垂線の足を I とすると

$$BI = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

より，△BDI において

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= \frac{BI}{BD} \\ &= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \end{aligned}$$

【9】(1)

$$\angle BAC = 108^\circ$$
$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC$$
$$= 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$
$$\angle BDA = 72^\circ$$

より，△ABD は二等辺三角形なので

$AB = BD = 1$

また，△ABC ∽ △DAC なので，

$CD = x$ とおくと，

$$BC : AC = AC : DC$$
$$(1+x) : 1 = 1 : x$$
$$x(x+1) = 1$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ より，$x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって

$$CD = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$BC = BD + CD$$
$$= 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) A から BC におろした垂線の足を H とすると

$$BH = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

また，

$$AH^2 = AB^2 - BH^2$$
$$= 1^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
$$AH = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

よって

$$\sin 36^\circ = \frac{AH}{AB}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

(3)

$$\cos 36^\circ = \frac{BH}{AB}$$
$$= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

(4)

$$\tan 36^\circ = \frac{AH}{BH}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{80-32\sqrt{5}}}{4} = \boldsymbol{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

(5) B から AD におろした垂線の足を I とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{DI} &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\mathrm{BI}^2 &= \mathrm{BD}^2 - \mathrm{DI}^2 \\ &= 1^2 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \\ \mathrm{BI} &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sin 72^\circ &= \frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BD}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\cos 72^\circ &= \frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{BD}} \\ &= \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{1} = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}\end{aligned}$$

(7)

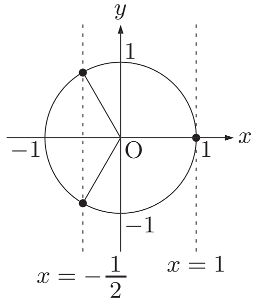
$$\begin{aligned}\tan 72^\circ &= \frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{DI}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{80+32\sqrt{5}}}{4} = \boldsymbol{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

２章　三角比（２）ー三角方程式と三角不等式ー

問題

【1】(1)

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$
$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$



$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なので，

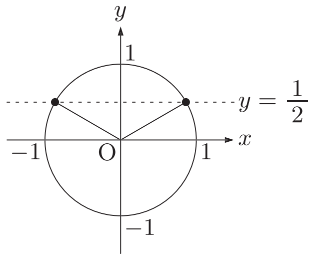
$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$，1

よって，

$\boldsymbol{\theta = 0^\circ，120^\circ，240^\circ}$

(2)

$$2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$$
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$$



$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので，

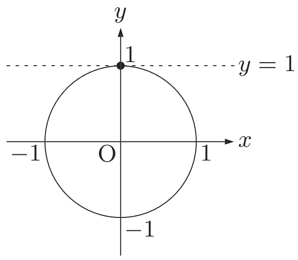
$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

よって，

$\boldsymbol{\theta = 30^\circ，150^\circ}$

(3)

$$\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$$
$$(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$$
$$-\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 = 0$$
$$(\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$$



$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので，

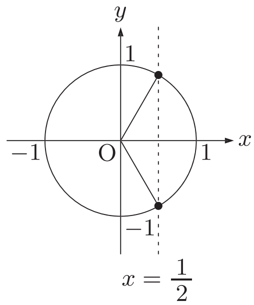
$\sin\theta = 1$

よって，

$\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$

(4)

$$\frac{1}{4} + \cos\theta - \sin^2\theta = 0$$
$$\frac{1}{4} + \cos\theta - (1 - \cos^2\theta) = 0$$
$$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$$
$$(2\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$$



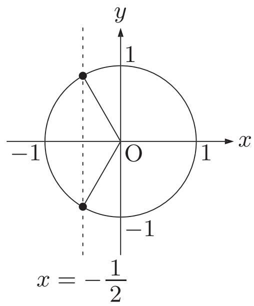
$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なので，

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

よって，

$\boldsymbol{\theta = 60^\circ，300^\circ}$

(5)
$$\begin{aligned}2\sin^2\theta+5\cos\theta+1&=0\\2(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta+1&=0\\-2\cos^2\theta+5\cos\theta+3&=0\\2\cos^2\theta-5\cos\theta-3&=0\\(2\cos\theta+1)(\cos\theta-3)&=0\end{aligned}$$



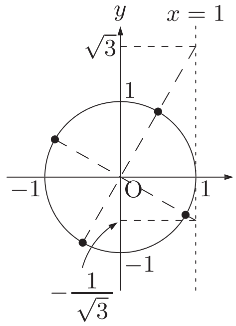
$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なので，

$$\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

よって，

$\boldsymbol{\theta=120^\circ，240^\circ}$

(6)
$$\begin{aligned}\sqrt{3}\tan^2\theta&=2\tan\theta+\sqrt{3}\\\sqrt{3}\tan^2\theta-2\tan\theta-\sqrt{3}&=0\\(\sqrt{3}\tan\theta+1)(\tan\theta-\sqrt{3})&=0\\\tan\theta&=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\end{aligned}$$



$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，

$\theta=150^\circ，330^\circ$

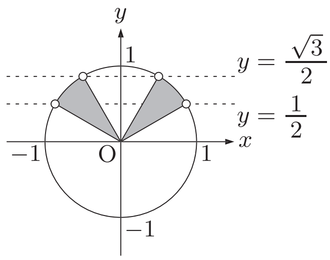
$\tan\theta=\sqrt{3}$ のとき，

$\theta=60^\circ，240^\circ$

よって，

$\boldsymbol{\theta=60^\circ，150^\circ，240^\circ，330^\circ}$

【2】(1)
$$\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$$



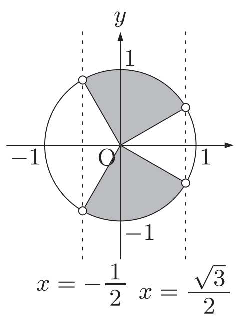
$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta=30^\circ，150^\circ$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\theta=60^\circ，120^\circ$

よって，

$\boldsymbol{30^\circ<\theta<60^\circ，120^\circ<\theta<150^\circ}$

(2)
$$-\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$$



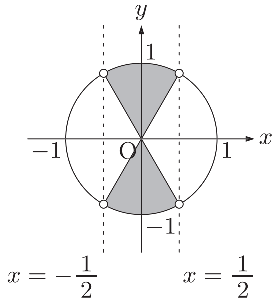
$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta=120^\circ，240^\circ$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\theta=30^\circ，330^\circ$

よって，

$\boldsymbol{30^\circ<\theta<120^\circ，240^\circ<\theta<330^\circ}$

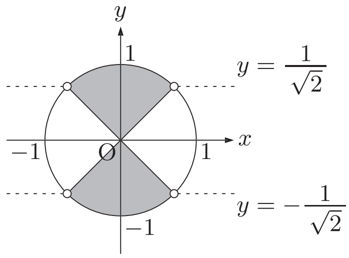
(3) $$4\cos^2\theta - 1 < 0$$
$$(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) < 0$$
$$-\frac{1}{2} < \cos\theta < \frac{1}{2}$$



$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta = 120°$，$240°$
$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta = 60°$，$300°$
よって，

$$\mathbf{60° < \boldsymbol{\theta} < 120°,\ 240° < \boldsymbol{\theta} < 300°}$$

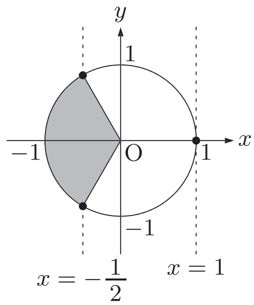
(4) $$2\sin^2\theta > 1$$
$$2\sin^2\theta - 1 > 0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta + 1)(\sqrt{2}\sin\theta - 1) > 0$$
$$\sin\theta < -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\theta$$



$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\theta = 225°$，$315°$
$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\theta = 45°$，$135°$
よって，

$$\mathbf{45° < \boldsymbol{\theta} < 135°,\ 225° < \boldsymbol{\theta} < 315°}$$

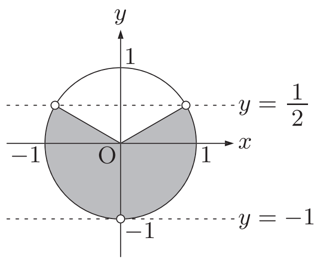
(5) $$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 \geqq 0$$
$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) \geqq 0$$
$$\cos\theta \leqq -\frac{1}{2},\ 1 \leqq \cos\theta$$



$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta = 120°$，$240°$
$\cos\theta = 1$ のとき，$\theta = 0°$
よって，

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0°,\ 120°} \leqq \boldsymbol{\theta} \leqq \mathbf{240°}$$

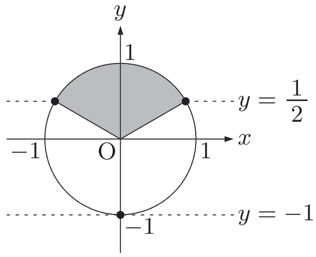
(6) $$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 < 0$$
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) < 0$$
$$-1 < \sin\theta < \frac{1}{2}$$



$\sin\theta = -1$ のとき，$\theta = 270°$
$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta = 30°$，$150°$
よって，

$$\mathbf{0°} \leqq \boldsymbol{\theta} \mathbf{< 30°,\ 150° <} \boldsymbol{\theta} \mathbf{< 270°,\ 270° <} \boldsymbol{\theta} \mathbf{< 360°}$$

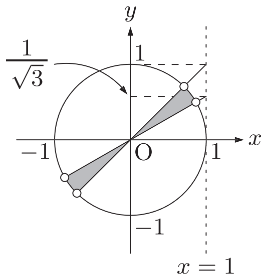
(7)
$$\begin{aligned}2\cos^2\theta-\sin\theta-1&\leqq 0\\2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1&\leqq 0\\-2\sin^2\theta-\sin\theta+1&\leqq 0\\2\sin^2\theta+\sin\theta-1&\geqq 0\\(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)&\geqq 0\\\sin\theta\leqq -1,\ \frac{1}{2}&\leqq\sin\theta\end{aligned}$$



$\sin\theta=-1$ のとき，$\theta=270^\circ$
$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta=30^\circ$，150°
よって，

$$\boldsymbol{30^\circ\leqq\theta\leqq 150^\circ,\theta=270^\circ}$$

(8)
$$\begin{aligned}3\tan^2\theta-(3+\sqrt{3})\tan\theta+\sqrt{3}&<0\\(3\tan\theta-\sqrt{3})(\tan\theta-1)&<0\\\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta&<1\end{aligned}$$



$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\theta=30^\circ$，210°
$\tan\theta=1$ のとき，$\theta=45^\circ$，225°
よって，

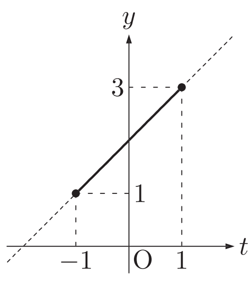
$$\boldsymbol{30^\circ<\theta<45^\circ,\ 210^\circ<\theta<225^\circ}$$

【3】(1) $\cos\theta=t$ とおく．$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ から，

$$-1\leqq t\leqq 1$$

また，

$$\begin{aligned}y&=\cos\theta+2\\&=t+2\qquad(-1\leqq t\leqq 1)\end{aligned}$$



グラフから，$t=1$ で最大値 3 をとり，
このとき，$\cos\theta=1$ から，$\theta=0^\circ$
$t=-1$ で最小値 1 をとり，
このとき，$\cos\theta=-1$ から，$\theta=180^\circ$
よって，

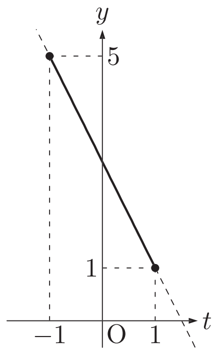
最大値：3 ($\boldsymbol{\theta=0^\circ}$)，最小値：1 ($\boldsymbol{\theta=180^\circ}$)

(2) $\sin\theta = t$ とおく．$0° \leqq \theta < 360°$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2\sin\theta \\ &= -2t + 3 \qquad (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$



グラフから，$t = -1$ で最大値 5 をとり，
このとき，$\sin\theta = -1$ から，$\theta = 270°$
$t = 1$ で最小値 1 をとり，
このとき，$\sin\theta = 1$ から，$\theta = 90°$
よって，

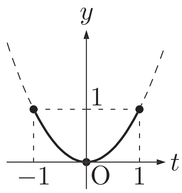
最大値：5　($\theta = 270°$)，最小値：1　($\theta = 90°$)

(3) $\sin\theta = t$ とおく．$0° \leqq \theta < 360°$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

$$\begin{aligned} y &= \sin^2\theta \\ &= t^2 \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$



グラフから，$t = -1,\ 1$ で最大値 1 をとり，
このとき，$\sin\theta = -1,\ 1$ から，$\theta = 90°,\ 270°$
$t = 0$ で最小値 0 をとり，
このとき，$\sin\theta = 0$ から，$\theta = 0°,\ 180°$
よって，

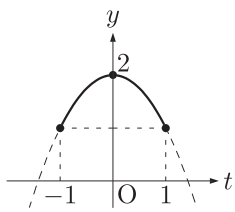
最大値：1 ($\theta = 90°,\ 270°$)，最小値：0 ($\theta = 0°,\ 180°$)

(4) $\cos\theta = t$ とおく．$0° \leqq \theta < 360°$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

$$\begin{aligned} y &= 2 - \cos^2\theta \\ &= -t^2 + 2 \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

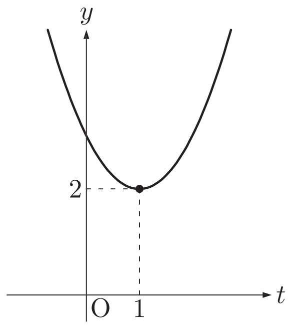


グラフから，$t = 0$ で最大値 2 をとり，
このとき，$\cos\theta = 0$ から，$\theta = 90°,\ 270°$
$t = -1,\ 1$ で最小値 1 をとり，
このとき，$\cos\theta = -1,\ 1$ から，$\theta = 0°,\ 180°$
よって，

最大値：2 ($\theta = 90°,\ 270°$)，最小値：1 ($\theta = 0°,\ 180°$)

(5) $\tan\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ から，
t は任意の実数なので，

$$\begin{aligned} y &= \tan^2\theta - 2\tan\theta + 3 \\ &= t^2 - 2t + 3 \\ &= (t-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

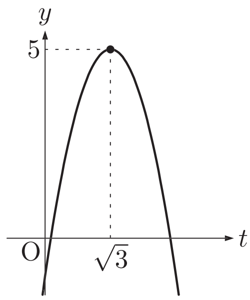


グラフから，$t = 1$ で最小値 2 をとり，
このとき，$\tan\theta = 1$ から，$\theta = 45^\circ$，225°
よって，

最大値：なし，最小値：2 ($\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$，$\boldsymbol{225^\circ}$)

(6) $\tan\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ から，
t は任意の実数なので，

$$\begin{aligned} y &= -2\tan^2\theta + 4\sqrt{3}\tan\theta - 1 \\ &= -2t^2 + 4\sqrt{3}t - 1 \\ &= -2(t^2 - 2\sqrt{3}t) - 1 \\ &= -2(t-\sqrt{3})^2 + 5 \end{aligned}$$



グラフから，$t = \sqrt{3}$ で最大値 5 をとり，
このとき，$\tan\theta = \sqrt{3}$ から，$\theta = 60^\circ$，240°
よって，

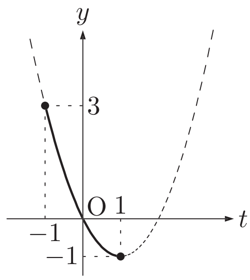
最大値：5 ($\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$，$\boldsymbol{240^\circ}$)，最小値：なし

(7) $\sin\theta = t$ とおく．$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

$$\begin{aligned} y &= \sin^2\theta - 2\sin\theta \\ &= t^2 - 2t \\ &= (t-1)^2 - 1 \ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

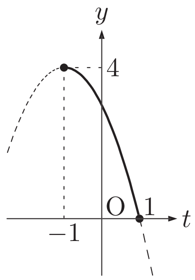


グラフから，$t = -1$ で最大値 3 をとり，
このとき，$\sin\theta = -1$ から，$\theta = 270^\circ$
$t = 1$ で最小値 -1 をとり，
このとき，$\sin\theta = 1$ から，$\theta = 90^\circ$
よって，

最大値：3 ($\boldsymbol{\theta = 270^\circ}$)，最小値：$\boldsymbol{-1}$ ($\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$)

(8) $\cos\theta = t$ とおく．$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$



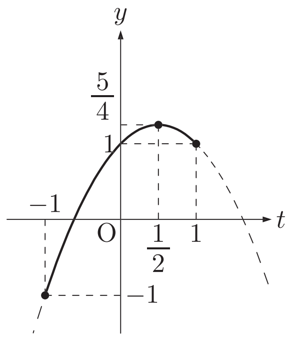
また，

$$\begin{aligned} y &= -\cos^2\theta - 2\cos\theta + 3 \\ &= -t^2 - 2t + 3 \\ &= -(t^2 + 2t) + 3 \\ &= -(t+1)^2 + 4 \ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

グラフから，$t = -1$ で最大値 4 をとり，
このとき，$\cos\theta = -1$ から，$\theta = 180^\circ$
$t = 1$ で最小値 0 をとり，
このとき，$\cos\theta = 1$ から，$\theta = 0^\circ$
よって，

最大値：4 ($\boldsymbol{\theta = 180^\circ}$)，最小値 0 ($\boldsymbol{\theta = 0^\circ}$)

(9)
$$\begin{aligned} y &= \cos^2\theta + \sin\theta \\ &= (1 - \sin^2\theta) + \sin\theta \\ &= -\sin^2\theta + \sin\theta + 1 \end{aligned}$$



より，$\sin\theta = t$ とおく．$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

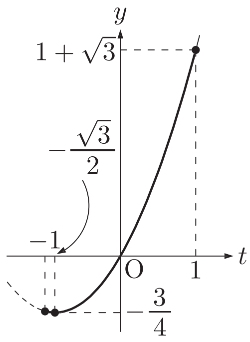
$$\begin{aligned} y &= -\sin^2\theta + \sin\theta + 1 \\ &= -t^2 + t + 1 \\ &= -(t^2 - t) + 1 \\ &= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

グラフから，$t = \dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，
このとき，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ から，$\theta = 30^\circ$，150°
$t = -1$ で最小値 -1 をとり，
このとき，$\sin\theta = -1$ から，$\theta = 270^\circ$
よって，

最大値：$\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$ ($\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$，$\boldsymbol{150^\circ}$)，最小値：$\boldsymbol{-1}$ ($\boldsymbol{\theta = 270^\circ}$)

(10)

$$\begin{aligned} y &= -\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 \\ &= -(1-\cos^2\theta) + \sqrt{3}\cos\theta + 1 \\ &= \cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta \end{aligned}$$



より，$\cos\theta = t$ とおく．$0° \leqq \theta < 360°$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

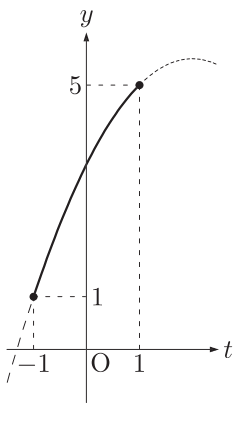
$$\begin{aligned} y &= \cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta \\ &= t^2 + \sqrt{3}t \\ &= \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

グラフから，$t = 1$ で最大値 $1 + \sqrt{3}$ をとり，
このとき，$\cos\theta = 1$ から，$\theta = 0°$
$t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\dfrac{3}{4}$ をとり，
このとき，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から，$\theta = 150°$，$210°$
よって，

最大値：$\boldsymbol{1+\sqrt{3}\ (\theta = 0°)}$，最小値：$\boldsymbol{-\frac{3}{4}\ (\theta = 150°,\ 210°)}$

(11)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\sin^2\theta + 2\cos\theta + 3 \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) + 2\cos\theta + 3 \\ &= -\frac{1}{2}\cos^2\theta + 2\cos\theta + \frac{7}{2} \end{aligned}$$



より，$\cos\theta = t$ とおく．$0° \leqq \theta < 360°$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

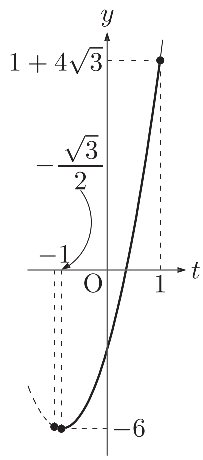
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\cos^2\theta + 2\cos\theta + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(t^2 - 4t) + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(t-2)^2 + \frac{11}{2}\ (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

グラフから，$t = 1$ で最大値 5 をとり，このとき，$\cos\theta = 1$ から，$\theta = 0°$
$t = -1$ で最小値 1 をとり，このとき，$\cos\theta = -1$ から，$\theta = 180°$
よって，

最大値：5 $(\boldsymbol{\theta = 0°})$，最小値：1 $(\boldsymbol{\theta = 180°})$

(12)

$$\begin{aligned} y &= \sin^2\theta - 3\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta \\ &= \sin^2\theta - 3(1-\sin^2\theta) + 4\sqrt{3}\sin\theta \\ &= 4\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta - 3 \end{aligned}$$



より，$\sin\theta = t$ とおく．$0° \leqq \theta < 360°$ から，

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，

$$\begin{aligned} y &= 4\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta - 3 \\ &= 4t^2 + 4\sqrt{3}t - 3 \\ &= 4(t^2 + \sqrt{3}t) - 3 \\ &= 4\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6 \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

グラフから，$t = 1$ で最大値 $1 + 4\sqrt{3}$ をとり，

このとき，$\sin\theta = 1$ から，$\theta = 90°$

$t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値 -6 をとり，

このとき，$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から，$\theta = 240°,\ 300°$

よって，

最大値：$\boldsymbol{1 + 4\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{(\theta = 90°)}$，最小値：$\boldsymbol{-6}$ $\boldsymbol{(\theta = 240°,\ 300°)}$

【4】(1) $0^\circ \leqq \theta < 120^\circ$ より，

$$\begin{aligned} 0^\circ \leqq \ &\theta \ < 120^\circ \\ 0^\circ \leqq \ &3\theta < 360^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = 3\theta$ とおくと，

$$0^\circ \leqq t < 360^\circ$$

$\sin 3\theta = 1$ より，

$$\begin{aligned} \sin t &= 1 \\ t &= 90^\circ \end{aligned}$$

$t = 90^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} 3\theta &= 90^\circ \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$

(2) $0^\circ \leqq \theta < 315^\circ$ より，

$$\begin{aligned} 0^\circ \leqq \ &\theta \ < 315^\circ \\ 45^\circ \leqq \ &\theta + 45^\circ < 360^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = \theta + 45^\circ$ とおくと，

$$45^\circ \leqq t < 360^\circ$$

$\cos(\theta + 45^\circ) = \dfrac{1}{2}$ より，

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2} \\ t &= 60^\circ,\ 300^\circ \end{aligned}$$

$t = 60^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} \theta + 45^\circ &= 60^\circ \\ \theta &= 15^\circ \end{aligned}$$

$t = 300^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} \theta + 45^\circ &= 300^\circ \\ \theta &= 255^\circ \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta = 15^\circ,\ 255^\circ}$

(3) $15^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，

$$\begin{aligned} 15^\circ \leqq \ &\theta \leqq 180^\circ \\ 30^\circ \leqq \ &2\theta \leqq 360^\circ \\ 0^\circ \leqq \ &2\theta - 30^\circ \leqq 330^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = 2\theta - 30^\circ$ とおくと，

$$0^\circ \leqq t \leqq 330^\circ$$

$\sin(2\theta - 30^\circ) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\begin{aligned} \sin t &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ t &= 240^\circ,\ 300^\circ \end{aligned}$$

$t = 240^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} 2\theta - 30^\circ &= 240^\circ \\ \theta &= 135^\circ \end{aligned}$$

$t = 300^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} 2\theta - 30^\circ &= 300^\circ \\ \theta &= 165^\circ \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta = 135^\circ,\ 165^\circ}$

(4) $20^\circ \leqq \theta \leqq 140^\circ$ より，

$$\begin{aligned} 20^\circ \leqq \ &\theta \leqq 140^\circ \\ 60^\circ \leqq \ &3\theta \leqq 420^\circ \\ 0^\circ \leqq \ &3\theta - 60^\circ \leqq 360^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = 3\theta - 60^\circ$ とおくと，

$$0^\circ \leqq t \leqq 360^\circ$$

$2\cos(3\theta - 60^\circ) + 5 = 4$ より，

$$\begin{aligned} 2\cos t + 5 &= 4 \\ \cos t &= -\frac{1}{2} \\ t &= 120^\circ,\ 240^\circ \end{aligned}$$

$t = 120^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} 3\theta - 60^\circ &= 120^\circ \\ \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

$t = 240^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned} 3\theta - 60^\circ &= 240^\circ \\ \theta &= 100^\circ \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta = 60^\circ,\ 100^\circ}$

(5) $15^\circ < \theta < 105^\circ$ より,

$$\begin{aligned} 15^\circ <& \quad \theta \quad < 105^\circ \\ 30^\circ <& \quad 2\theta \quad < 210^\circ \\ 90^\circ <& \ 2\theta + 60^\circ < 270^\circ \end{aligned}$$

ここで, $t = 2\theta + 60^\circ$ とおくと,

$$90^\circ < t < 270^\circ$$

$\tan(2\theta + 60^\circ) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より,

$$\begin{aligned} \tan t &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t &= 150^\circ \end{aligned}$$

$t = 150^\circ$ のとき,

$$\begin{aligned} 2\theta + 60^\circ &= 150^\circ \\ \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$

【5】(1) $0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より

$$\begin{aligned} 0^\circ \leqq& \ \ \theta \ < 180^\circ \\ 0^\circ \leqq& \ 2\theta < 360^\circ \end{aligned}$$

ここで, $t = 2\theta$ とおくと

$$0^\circ \leqq t < 360^\circ$$

$\cos 2\theta > -\dfrac{1}{2}$ より

$$\cos t > -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leqq t < 120^\circ,\ 240^\circ < t < 360^\circ$$

よって

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 60^\circ,\ 120^\circ < \theta < 180^\circ}$$

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 315^\circ$ より

$$\begin{aligned} 0^\circ \leqq& \quad \theta \quad \leqq 315^\circ \\ 45^\circ \leqq& \ \theta + 45^\circ \leqq 360^\circ \end{aligned}$$

ここで, $t = \theta + 45^\circ$ とおくと

$$45^\circ \leqq t \leqq 360^\circ$$

$\sin(\theta + 45^\circ) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\sin t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$45^\circ \leqq t \leqq 60^\circ,\ 120^\circ \leqq t \leqq 360^\circ$$

よって

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 15^\circ,\ 75^\circ \leqq \theta \leqq 315^\circ}$$

(3) $15^\circ \leqq \theta < 195^\circ$ より

$$\begin{aligned} 15^\circ \leqq & \quad \theta & < 195^\circ \\ 0^\circ \leqq & \ 2\theta - 30^\circ & < 360^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = 2\theta - 30^\circ$ とおくと

$$0^\circ \leqq t < 360^\circ$$

$\cos(2\theta - 30^\circ) < -\dfrac{1}{2}$ より

$$\cos t < -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 120^\circ < & \quad t & < 240^\circ \\ 120^\circ < & \ 2\theta - 30^\circ & < 240^\circ \\ 150^\circ < & \quad 2\theta & < 270^\circ \\ 75^\circ < & \quad \theta & < 135^\circ \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{75^\circ < \theta < 135^\circ}$$

(4) $0^\circ \leqq \theta < 105^\circ$ より

$$\begin{aligned} 0^\circ \leqq & \quad \theta & < 105^\circ \\ 45^\circ \leqq & \ 3\theta + 45^\circ & < 360^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = 3\theta + 45^\circ$ とおくと

$$45^\circ \leqq t < 360^\circ$$

$2\sin(3\theta + 45^\circ) + \sqrt{3} \geqq 0$ より

$$2\sin t \geqq -\sqrt{3}$$

$$\sin t \geqq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$45^\circ \leqq t \leqq 240^\circ,\ 300^\circ \leqq t < 360^\circ$$

なので

$$\begin{aligned} 45^\circ \leqq & \ 3\theta + 45^\circ & \leqq 240^\circ \\ 0^\circ \leqq & \quad 3\theta & \leqq 195^\circ \\ 0^\circ \leqq & \quad \theta & \leqq 65^\circ \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} 300^\circ \leqq & \ 3\theta + 45^\circ & < 360^\circ \\ 255^\circ \leqq & \quad 3\theta & < 315^\circ \\ 85^\circ \leqq & \quad \theta & < 105^\circ \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 65^\circ,\ 85^\circ \leqq \theta < 105^\circ}$$

(5) $105^\circ < \theta < 195^\circ$ より

$$\begin{aligned} 105^\circ < & \quad \theta & < 195^\circ \\ 90^\circ < & \ 2\theta - 120^\circ & < 270^\circ \end{aligned}$$

ここで，$t = 2\theta - 120^\circ$ とおくと

$$90^\circ < t < 270^\circ$$

$\tan(2\theta - 120^\circ) < -\sqrt{3}$ より

$$\tan t < -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 90^\circ < & \quad t & < 120^\circ \\ 90^\circ < & \ 2\theta - 120^\circ & < 120^\circ \\ 210^\circ < & \quad 2\theta & < 240^\circ \\ 105^\circ < & \quad \theta & < 120^\circ \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{105^\circ < \theta < 120^\circ}$

問題

【1】(1) 正弦定理より，

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{c}{\sin C}\\ \frac{10}{\sin 45^\circ} &= \frac{c}{\sin 30^\circ}\\ \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{c}{\frac{1}{2}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}c &= \frac{1}{2}\times 10\\ c &= \mathbf{5\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(2) 正弦定理より，

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B}\\ \frac{6}{\sin 45^\circ} &= \frac{b}{\sin 60^\circ}\\ \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}b &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\\ b &= \mathbf{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

(3) $\angle\mathrm{B} = 120^\circ$，$\angle\mathrm{C} = 15^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{A} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C})\\ &= 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ)\\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

なので，正弦定理より，

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B}\\ \frac{a}{\sin 45^\circ} &= \frac{9}{\sin 120^\circ}\\ \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times 9\\ a &= \mathbf{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

(4) $\angle\mathrm{A} = 15^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 135^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{C} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B})\\ &= 180^\circ - (15^\circ + 135^\circ)\\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

なので，正弦定理より，

$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin B} &= \frac{c}{\sin C}\\ \frac{b}{\sin 135^\circ} &= \frac{6}{\sin 30^\circ}\\ \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{6}{\frac{1}{2}}\\ \frac{1}{2}b &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times 6\\ b &= \mathbf{6\sqrt{2}}\end{aligned}$$

【2】(1) 正弦定理より，

$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin B} &= 2R\\ \frac{4}{\sin 30^\circ} &= 2R\\ \frac{4}{\frac{1}{2}} &= 2R\\ 2R &= 8\\ R &= \mathbf{4}\end{aligned}$$

(2) 正弦定理より，

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin C} &= 2R\\ \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} &= 2R\\ \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= 2R\\ 2R &= 2\\ R &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

(3) 正弦定理より，

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= 2R \\ \frac{6}{\sin 120^\circ} &= 2R \\ \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= 2R \\ 2R &= 4\sqrt{3} \\ R &= \mathbf{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(4) $\angle\mathrm{A} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{C} = 105^\circ$ より，

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{B} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{C}) \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

正弦定理より，

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin B} &= 2R \\ \frac{9}{\sin 30^\circ} &= 2R \\ \frac{9}{\frac{1}{2}} &= 2R \\ 2R &= 18 \\ R &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

(5) $\angle\mathrm{A} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 75^\circ$ より，

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{C} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B}) \\ &= 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

正弦定理より，

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin C} &= 2R \\ \frac{15}{\sin 45^\circ} &= 2R \\ \frac{15}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= 2R \\ 2R &= 15\sqrt{2} \\ R &= \mathbf{\frac{15\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

【3】(1) 正弦定理より，

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \frac{2}{\sin 30^\circ} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} \\ \frac{2}{\frac{1}{2}} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} \\ 2\sin B &= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ \sin B &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \angle\mathrm{B} &= \mathbf{60^\circ,\ 120^\circ} \end{aligned}$$

(2) 正弦定理より，

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{c}{\sin C} \\ \frac{2}{\sin A} &= \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} \\ \frac{2}{\sin A} &= \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{2}\sin A &= 2 \times \frac{1}{2} \\ \sin A &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \angle\mathrm{A} &= \mathbf{45^\circ,\ 135^\circ} \end{aligned}$$

(3) 正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{\sin B}$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{\sin B}$$
$$3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\sin B$$
$$\sin B=\frac{1}{2}$$
$$\angle \mathrm{B}=30^\circ,\ 150^\circ$$

$\angle \mathrm{A}=45^\circ$ より $\angle \mathrm{B}=150^\circ$ は不適.
よって，$\angle \mathrm{B}=\mathbf{30^\circ}$

(4) 正弦定理より，

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{6}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin C}$$
$$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin C}$$
$$2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sin C$$
$$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\angle \mathrm{C}=45^\circ,\ 135^\circ$$

$\angle \mathrm{B}=60^\circ$ より $\angle \mathrm{C}=135^\circ$ は不適.
よって，$\angle \mathrm{C}=\mathbf{45^\circ}$

【4】(1) 余弦定理より，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$a^2=(\sqrt{3})^2+5^2-2\times\sqrt{3}\times5\times\cos 30^\circ$$
$$a^2=(\sqrt{3})^2+5^2-2\times\sqrt{3}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$a^2=3+25-15$$
$$a^2=13$$
$$a=\pm\sqrt{13}$$

$a>0$ より，$a=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

(2) 余弦定理より，

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$b^2=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times2\times\cos 45^\circ$$
$$b^2=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$b^2=2+4-4$$
$$b^2=2$$
$$b=\pm\sqrt{2}$$

$b>0$ より，$b=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(3) 余弦定理より，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos 120^\circ$$
$$c^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$c^2=4+16+8$$
$$c^2=28$$
$$c=\pm2\sqrt{7}$$

$c>0$ より，$c=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$

(4) 余弦定理より，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$a^2=4^2+(\sqrt{2})^2-2\times4\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ$$
$$a^2=4^2+(\sqrt{2})^2-2\times4\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$a^2=16+2+8$$
$$a^2=26$$
$$a=\pm\sqrt{26}$$

$a>0$ より，$a=\boldsymbol{\sqrt{26}}$

(5) 余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\
c^2 &= (2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 4 \times \cos 150^\circ \\
c^2 &= (2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
c^2 &= 12 + 16 + 24 \\
c^2 &= 52 \\
c &= \pm 2\sqrt{13}
\end{aligned}
$$

$c > 0$ より，$c = \mathbf{2\sqrt{13}}$

【5】(1) 余弦定理の変形より，

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} \\
&= \frac{9 + 64 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 8} \\
&= \frac{24}{2 \cdot 3 \cdot 8} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\angle\mathrm{A} = 60^\circ,\ 300^\circ$

三角形の内角の和は 180° なので，

$\angle\mathrm{A} = \mathbf{60^\circ}$

(2) 余弦定理の変形より

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\
&= \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\
&= \frac{40}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\angle\mathrm{A} = 60^\circ,\ 300^\circ$

三角形の内角の和は 180° なので，

$\angle\mathrm{A} = \mathbf{60^\circ}$

(3) 余弦定理の変形より

$$
\begin{aligned}
\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\
&= \frac{3^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{9 + 8 - 5}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{12}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

$\angle\mathrm{B} = 45^\circ,\ 315^\circ$

三角形の内角の和は 180° なので，

$\angle\mathrm{B} = \mathbf{45^\circ}$

(4) 余弦定理の変形より

$$
\begin{aligned}
\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
&= \frac{2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} \\
&= \frac{4 + 4 + 2\sqrt{3} - 6}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} \\
&= \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} \\
&= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\angle\mathrm{C} = 60^\circ,\ 300^\circ$

三角形の内角の和は 180° なので，

$\angle\mathrm{C} = \mathbf{60^\circ}$

【6】(1) 正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$
$$\frac{3}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$$
$$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$$
$$3\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$$
$$\sin B=\frac{1}{2}$$
$$\angle\mathrm{B}=30^\circ,\ 150^\circ$$

$\angle\mathrm{A}=60^\circ$ より，$\angle\mathrm{B}<120^\circ$ なので，

$$\angle\mathrm{B}=\mathbf{30^\circ}$$

$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$ より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{C}&=180^\circ-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B})\\&=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)\\&=\mathbf{90^\circ}\end{aligned}$$

余弦定理より，

$$\begin{aligned}&c^2\\=&a^2+b^2-2ab\cos C\\=&3^2+(\sqrt{3})^2-2\times3\times\sqrt{3}\times\cos 90^\circ\\=&3^2+(\sqrt{3})^2-2\times3\times\sqrt{3}\times0\\=&12\end{aligned}$$
$$c=\pm2\sqrt{3}$$

$c>0$ より，$c=\mathbf{2\sqrt{3}}$

よって，

$$\boldsymbol{c=2\sqrt{3}},\ \angle\mathrm{B}=\mathbf{30^\circ},\ \angle\mathrm{C}=\mathbf{90^\circ}$$

(2) 正弦定理より，

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{6}{\sin 30^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin C}$$
$$\frac{6}{\frac{1}{2}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin C}$$
$$6\sin C=6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$$
$$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\angle\mathrm{C}=\mathbf{60^\circ,\ 120^\circ}$$

$\angle\mathrm{C}=60^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{A}&=180^\circ-(\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C})\\&=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)\\&=\mathbf{90^\circ}\end{aligned}$$

余弦定理より，

$$\begin{aligned}&a^2\\=&b^2+c^2-2bc\cos A\\=&6^2+(6\sqrt{3})^2-2\times6\times6\sqrt{3}\times\cos 90^\circ\\=&6^2+(6\sqrt{3})^2-2\times6\times6\sqrt{3}\times0\\=&144\end{aligned}$$
$$a=\pm12$$

$a>0$ より，$a=\mathbf{12}$

また，$\angle\mathrm{C}=120^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{A}&=180^\circ-(\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C})\\&=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)\\&=30^\circ\end{aligned}$$

余弦定理より，

$$\begin{aligned}&a^2\\=&b^2+c^2-2bc\times\cos A\\=&6^2+(6\sqrt{3})^2-2\times6\times6\sqrt{3}\times\cos 30^\circ\\=&6^2+(6\sqrt{3})^2-2\times6\times6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\=&36+108-108\\=&36\end{aligned}$$
$$a=\pm6$$

$a>0$ より，$a=\mathbf{6}$

よって，

$$\boldsymbol{a=12},\ \angle\mathrm{A}=\mathbf{90^\circ},\ \angle\mathrm{C}=\mathbf{60^\circ}$$

または，

$$\boldsymbol{a=6},\ \angle\mathrm{A}=\mathbf{30^\circ},\ \angle\mathrm{C}=\mathbf{120^\circ}$$

(3) 余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\
&= (2\sqrt{3})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times (3+\sqrt{3}) \times \cos 30^\circ \\
&= (2\sqrt{3})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times (3+\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 12 + 12 + 6\sqrt{3} - 6(3+\sqrt{3}) \\
&= 6 \\
c &= \pm\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

$c > 0$ より，$c = \boldsymbol{\sqrt{6}}$

余弦定理の変形より，

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{(3+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot (3+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}} \\
&= \frac{12 + 6\sqrt{3} + 6 - 12}{2 \cdot (3+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}} \\
&= \frac{6 + 6\sqrt{3}}{2 \cdot (3+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}} \\
&= \frac{6(1+\sqrt{3})}{2 \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{6}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\angle \mathrm{A} &= 45^\circ,\ 315^\circ
\end{aligned}
$$

三角形の内角の和は 180° より，$\angle \mathrm{A} = \boldsymbol{45^\circ}$

$\angle \mathrm{A} = 45^\circ$，$\angle \mathrm{C} = 30^\circ$ より，

$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{B} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C}) \\
&= 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) \\
&= \boldsymbol{105^\circ}
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{c = \sqrt{6}}$**，**$\angle \mathrm{A} \boldsymbol{= 45^\circ}$**，**$\angle \mathrm{B} \boldsymbol{= 105^\circ}$

(4) 余弦定理より，

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
&= (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 2\times 2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos 45^\circ \\
&= (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - 2\times 2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 12 + 8 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \\
&= 8 \\
a &= \pm 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$a > 0$ より，$a = \mathbf{2\sqrt{2}}$

余弦定理の変形より，

$$\begin{aligned}
\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\
&= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{8 + 4\sqrt{3} + 8 - 12}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4 + 4\sqrt{3}}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4(1+\sqrt{3})}{2\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2} \\
\angle\mathrm{B} &= 60^\circ,\ 300^\circ
\end{aligned}$$

三角形の内角の和は 180° より，$\angle\mathrm{B} = \mathbf{60^\circ}$

$\angle\mathrm{A} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$ より，

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{C} &= 180^\circ - (\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B}) \\
&= 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) \\
&= \mathbf{75^\circ}
\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a = 2\sqrt{2}}$**,** $\angle\mathrm{B} = \mathbf{60^\circ}$**,** $\angle\mathrm{C} = \mathbf{75^\circ}$

【7】(1) △BCD において，正弦定理より，

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{\mathrm{BD}}{\sin 135^\circ}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}$$
$$\mathrm{BD} = \mathbf{2}$$

(2) △ABD において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 9 + 4 - 6 \\ &= 7\end{aligned}$$
$$\mathrm{AD} = \pm\sqrt{7}$$

$\mathrm{AD} > 0$ より，$\mathrm{AD} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$

(3) △ABD において，余弦定理の変形より，

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{(\sqrt{7})^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3} \\ &= \frac{7 + 9 - 4}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3} \\ &= \frac{12}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot 3} \qquad \therefore\ \cos A = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{7}}{7}}\end{aligned}$$

【8】(1) △ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 16 + 9 - 12 \\ &= 13\end{aligned}$$
$$\mathrm{AC} = \pm\sqrt{13}$$

$\mathrm{AC} > 0$ より，$\mathrm{AC} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$

(2) 平行四辺形の内対角の和は 180° より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BCD} &= 180^\circ - \angle\mathrm{ABC} \\ &= 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

△BCD において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 9 + 16 + 12 \\ &= 37\end{aligned}$$
$$\mathrm{BD} = \pm\sqrt{37}$$

$\mathrm{BD} > 0$ より，$\mathrm{BD} = \boldsymbol{\sqrt{37}}$

【9】(1) △BCD において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 120^\circ \\
&= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 9 + 36 + 18 \\
&= 63 \\
\mathrm{BD} &= \pm 3\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ より，$\mathrm{BD} = \mathbf{3\sqrt{7}}$

(2) 円に内接する四角形の対角の和は，180° より，

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{BAD} &= 180^\circ - \angle\mathrm{BCD} \\
&= 180^\circ - 120^\circ \\
&= 60^\circ
\end{aligned}$$

△ABD において，正弦定理より，

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} &= \frac{\mathrm{AB}}{\sin 45^\circ} \\
\frac{3\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \frac{\mathrm{AB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{7} \\
\mathrm{AB} &= \mathbf{\sqrt{42}}
\end{aligned}$$

(3) 正弦定理より，

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} &= 2R \\
\frac{3\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= 2R \\
R &= \mathbf{\sqrt{21}}
\end{aligned}$$

【10】(1)

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\ \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

なので,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a-b)(1+\cos C) \\
&= (a-b)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \\
&= (a-b)\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \\
&= (a-b)\left\{\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\right\} \\
&= (a-b)\left\{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}\right\} \\
&= \frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= c(\cos B - \cos A) \\
&= c\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= c\left\{\frac{b(c^2+a^2-b^2)-a(b^2+c^2-a^2)}{2abc}\right\} \\
&= \frac{b(a^2-b^2)+a(a^2-b^2)-c^2(a-b)}{2ab} \\
&= \frac{(a+b)(a^2-b^2)-c^2(a-b)}{2ab} \\
&= \frac{(a+b)^2(a-b)-c^2(a-b)}{2ab} \\
&= \frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}
\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺 が成り立つので,

$$(a-b)(1+\cos C) = c(\cos B - \cos A)$$

（証明終）

(2)

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{2abc}{2R(b^2+c^2-a^2)}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\dfrac{b}{2R}}{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \frac{2abc}{2R(c^2+a^2-b^2)}$$

なので，

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (b^2+c^2-a^2)\tan A \\ &= (b^2+c^2-a^2)\cdot\frac{2abc}{2R(b^2+c^2-a^2)} \\ &= \frac{abc}{R}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= (c^2+a^2-b^2)\tan B \\ &= (c^2+a^2-b^2)\cdot\frac{2abc}{2R(c^2+a^2-b^2)} \\ &= \frac{abc}{R}\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺 が成り立つので，

$$(b^2+c^2-a^2)\tan A = (c^2+a^2-b^2)\tan B$$

（証明終）

(3)

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R},\ \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

なので，

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A \\ &= \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 - 2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{4R^2} \\ &= \frac{a^2}{4R^2} \\ &= \left(\frac{a}{2R}\right)^2 \\ &= \sin^2 A = \text{右辺}\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺 が成り立つので

$$\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A = \sin^2 A$$

（証明終）

【11】(1) $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$ なので,

$$
\begin{aligned}
\sin A : \sin B &= b : a \\
\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} &= b : a \\
\frac{a}{2R} \times a &= \frac{b}{2R} \times b \\
\frac{a^2}{2R} &= \frac{b^2}{2R} \\
a^2 &= b^2 \\
a &= b
\end{aligned}
$$

これより,△ABC は,

$\boldsymbol{a = b}$ の二等辺三角形

(2) $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ なので,

$$
\begin{aligned}
&a \cos B - b \cos A = c \\
&a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c \\
&\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = c \\
&\frac{2a^2 - 2b^2}{2c} = c \\
&\frac{a^2 - b^2}{c} = c \\
&b^2 + c^2 = a^2
\end{aligned}
$$

これより,△ABC は,

∠A $= \mathbf{90}°$ の直角三角形

(3)

$$\sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R},\ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

なので,

$$\begin{aligned}
\sin B\cos B &= \sin C\cos C\\
\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} &= \frac{c}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\
\frac{b(c^2+a^2-b^2)}{4Rac} &= \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4Rab}\\
4Rac^2(a^2+b^2-c^2) &= 4Rab^2(c^2+a^2-b^2)\\
c^2(a^2+b^2-c^2) &= b^2(c^2+a^2-b^2)\\
a^2c^2-c^4 &= a^2b^2-b^4\\
(a^2c^2-a^2b^2)-(c^4-b^4) &= 0\\
a^2(c^2-b^2)-(c^2+b^2)(c^2-b^2) &= 0\\
(c^2-b^2)(a^2-c^2-b^2) &= 0\\
(c+b)(c-b)(a^2-c^2-b^2) &= 0
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{cases} b+c=0 & \cdots① \\ c-b=0 & \cdots② \\ a^2-c^2-b^2=0 & \cdots③ \end{cases}$$

である．①は，不適.

②は,

$$c-b=0 \quad \therefore\ c=b \ \cdots②'$$

③は,

$$a^2-c^2-b^2=0 \quad \therefore\ a^2=c^2+b^2 \ \cdots③'$$

よって，△ABC は，$\boldsymbol{b=c}$ **の二等辺三角形もしくは** $\angle\mathrm{A} = \mathbf{90^\circ}$**の直角三角形**

【12】(1) △ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= 3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ\\ &= 3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}\\ &= 9+4-6\\ &= 7\end{aligned}$$

$$\mathrm{BC} = \pm\sqrt{7}$$

$\mathrm{BC} > 0$ より，$\mathrm{BC} = \sqrt{7}$

よって，

$$\mathrm{BM} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

(2) △ABC において，余弦定理の変形より，

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}\\ &= \frac{9+7-4}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}\\ &= \frac{12}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{7}\sqrt{7}}\end{aligned}$$

(3) △ABM において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2 &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+3^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times3\times\cos B\\ &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+3^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times3\times\frac{2}{7}\sqrt{7}\\ &= \frac{7}{4}+9-6\\ &= \frac{19}{4}\end{aligned}$$

$$\mathrm{AM} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

$\mathrm{AM} > 0$ より，$\mathrm{AM} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{19}}{2}}$

【13】(1) △ABC と △ADC において，

$$\begin{aligned}5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos B &= 3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos D\\ 5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos B &= 3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(180^\circ-B)\\ 5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos B &= 3^2+4^2-2\times3\times4\times(-\cos B)\\ 25+16-40\cos B &= 9+16+24\cos B\\ 64\cos B &= 16\\ \cos B &= \boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

(2) $\sin^2 B+\cos^2 B=1$ より，

$$\sin^2 B+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1$$
$$\sin^2 B=\frac{15}{16}$$
$$\sin B=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$0°<B<180°$ より，$\sin B>0$ だから，

$$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

△ABC において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos B\\&=5^2+4^2-2\times5\times4\times\frac{1}{4}\\&=25+16-10\\&=31\\\mathrm{AC}&=\pm\sqrt{31}\end{aligned}$$

$\mathrm{AC}>0$ より，$\mathrm{AC}=\sqrt{31}$ 正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$$
$$\frac{\sqrt{31}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R$$
$$R=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{465}}{15}}$$

【14】(1) $a:b:c=3:5:6$ より，

$$a=3k,\ b=5k,\ c=6k\quad(k>0)$$

とする．正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$
$$\frac{3k}{\sin A}=\frac{5k}{\sin B}=\frac{6k}{\sin C}=2R$$

だから，

$$\sin A=\frac{3k}{2R},\ \sin B=\frac{5k}{2R},\ \sin C=\frac{6k}{2R}$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{3k}{2R}:\frac{5k}{2R}:\frac{6k}{2R}\\&=\boldsymbol{3:5:6}\end{aligned}$$

(2) $a:b:c=3:5:6$ より，

$$a=3k,\ b=5k,\ c=6k \quad (k>0)$$

とする．余弦定理の変形より，

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= \frac{(5k)^2+(6k)^2-(3k)^2}{2\cdot 5k\cdot 6k}\\ &= \frac{25k^2+36k^2-9k^2}{2\cdot 5k\cdot 6k}\\ &= \frac{52k^2}{60k^2} = \mathbf{\frac{13}{15}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ &= \frac{(6k)^2+(3k)^2-(5k)^2}{2\cdot 6k\cdot 3k}\\ &= \frac{36k^2+9k^2-25k^2}{2\cdot 6k\cdot 3k}\\ &= \frac{20k^2}{36k^2} = \mathbf{\frac{5}{9}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{(3k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}\\ &= \frac{9k^2+25k^2-36k^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}\\ &= \frac{-2k^2}{30k^2} = -\mathbf{\frac{1}{15}}\end{aligned}$$

【15】(1) 条件式の連比を，$\dfrac{a+b}{7}=\dfrac{b+c}{11}=\dfrac{c+a}{8}=k$ とおくと，

$$\begin{cases} a+b=7k & \cdots ① \\ b+c=11k & \cdots ② \\ c+a=8k & \cdots ③ \end{cases}$$

$\bigl(①+②+③\bigr)\div 2$ より，

$$a+b+c=13k\cdots ④$$

$④-①$，$④-②$，$④-③$ より，

$$a=2k,\ b=5k,\ c=6k\cdots ⑤$$

よって，正弦定理より，

$$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}=a:b:c$$

だから，

$$\sin A:\sin B:\sin C=2k:5k:6k=\mathbf{2:5:6}$$

(2) 余弦定理より，

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k}$$
$$= \frac{57k^2}{60k^2} = \frac{19}{20}$$

より，

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{19}{20}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{361}{400}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{39}}{20}}$$

(1) より，

$$\sin B = \frac{\sqrt{39}}{20} \times \frac{5}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{39}}{8}}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{39}}{20} \times \frac{6}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{39}}{20}}$$

４章　三角比（４）ー面積と体積ー

問題

【1】(1)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \mathbf{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \mathbf{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ac\sin B \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 5 \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \mathbf{\frac{15}{2}} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 4 \times \sin 135^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{8^2 + 9^2 - 5^2}{2 \times 8 \times 9} \\ &= \frac{120}{144} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{11}{36} \\ \sin A &= \pm\frac{\sqrt{11}}{6} \end{aligned}$$

$\sin A > 0$ より，

$$\sin A = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

△ABC の面積は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \frac{\sqrt{11}}{6} \\ &= \mathbf{6\sqrt{11}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} \\ &= \frac{21}{24} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 \\ &= \frac{15}{64} \\ \sin A &= \pm\frac{\sqrt{15}}{8} \end{aligned}$$

$\sin A > 0$ より，

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

△ABC の面積は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{8} \\ &= \mathbf{\frac{3\sqrt{15}}{4}} \end{aligned}$$

(3)

$$\cos A = \frac{2^2 + 1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{3}{4}$$

よって,

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{7}{16}\end{aligned}$$

$$\sin A = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\sin A > 0$ より,

$$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

△ABC の面積は,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}\end{aligned}$$

(4) $\cos A$

$$\begin{aligned}&= \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(3+\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times \left(3+\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{12 + 12 + 6\sqrt{3} - 6}{4\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{18 + 6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})} \\ &= \frac{6\left(\sqrt{3}+3\right)}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+3\right)} \\ &= \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\sin A = \pm\frac{1}{2}$$

$\sin A > 0$ より,

$$\sin A = \frac{1}{2}$$

△ABC の面積は,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \left(3+\sqrt{3}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}+3}{2}}\end{aligned}$$

【3】(1) 余弦定理より，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60^\circ$$
$$c^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \frac{1}{2}$$
$$c^2 = 9 + 64 - 24$$
$$c^2 = 49$$
$$c = \pm 7$$

$c > 0$ より，$c = 7$

△ABC の面積は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r(a+b+c) &= S \\ \frac{1}{2}r(3+7+8) &= 6\sqrt{3} \\ 9r &= 6\sqrt{3} \\ r &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

正弦定理より，

$$2R = \frac{c}{\sin C}$$
$$2R = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$
$$R = \frac{7}{2\sin 60^\circ}$$
$$R = \frac{7}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$$
$$R = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

(2) 余弦定理より，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos 120^\circ$$
$$c^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$c^2 = 64 + 49 + 56$$
$$c^2 = 169$$
$$c = \pm 13$$

$c > 0$ より，$c = 13$

△ABC の面積は，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 14\sqrt{3} \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \\ 14\sqrt{3} &= \frac{1}{2}r(8+7+13) \\ 14\sqrt{3} &= 14r \\ r &= \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

正弦定理より，

$$2R = \frac{c}{\sin C}$$
$$R = \frac{13}{2\sin 120^\circ}$$
$$R = \frac{13}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$R = \frac{13}{\sqrt{3}}$$
$$R = \boldsymbol{\frac{13\sqrt{3}}{3}}$$

(3)

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= \frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}\\ &= \frac{45}{60}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\\ &= 1-\frac{9}{16}\\ &= \frac{7}{16}\\ \sin A &= \pm\frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

$\sin A > 0$ より，$\sin A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

△ABC の面積は，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A\\ &= \frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}\\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}r(a+b+c)\\ \frac{15\sqrt{7}}{4} &= \frac{1}{2}r(4+5+6)\\ \frac{15}{2}r &= \frac{15\sqrt{7}}{4}\\ r &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}\end{aligned}$$

正弦定理より，

$$\begin{aligned}2R &= \frac{a}{\sin A}\\ R &= \frac{a}{2\sin A}\\ R &= \frac{4}{2\times\frac{\sqrt{7}}{4}}\\ R &= \frac{8}{\sqrt{7}}\\ R &= \boldsymbol{\frac{8\sqrt{7}}{7}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= \frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}\\ &= \frac{65}{70} = \frac{13}{14}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\left(\frac{13}{14}\right)^2\\ &= \frac{14^2-13^2}{14^2}\\ &= \frac{(14+13)(14-13)}{196}\\ &= \frac{27}{196}\\ \sin A &= \pm\frac{3\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

$\sin A > 0$ より，$\sin A = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

△ABC の面積は，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A\\ &= \frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}\\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}r(a+b+c)\\ \frac{15\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2}r(3+5+7)\\ \frac{15}{2}r &= \frac{15\sqrt{3}}{4}\\ r &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

正弦定理より，

$$\begin{aligned}2R &= \frac{a}{\sin A}\\ R &= \frac{a}{2\sin A}\\ R &= \frac{3}{2\times\frac{3\sqrt{3}}{14}}\\ R &= \frac{7}{\sqrt{3}}\\ R &= \boldsymbol{\frac{7}{3}\sqrt{3}}\end{aligned}$$

【4】(1) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす.

△BCD において，正弦定理より，

$$\begin{aligned}2\mathrm{BH} &= \frac{10}{\sin 60^\circ}\\ \mathrm{BH} &= \frac{10}{2\sin 60^\circ}\\ &= \frac{10}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

△ABH において，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \sqrt{10^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2}\\ &= \sqrt{100 - \frac{100}{3}}\\ &= \frac{10\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\times 10\times 10\times\sin 60^\circ\\ &= \frac{1}{2}\times 10\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 25\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\times 25\sqrt{3}\times\frac{10\sqrt{6}}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{250\sqrt{2}}{3}}\end{aligned}$$

(2) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす.

△BCD において，正弦定理より，

$$\begin{aligned}2\mathrm{BH} &= \frac{6}{\sin 60^\circ}\\ \mathrm{BH} &= \frac{6}{2\sin 60^\circ}\\ &= \frac{6}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

△ABH において，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2}\\ &= \sqrt{16-12}\\ &= 2\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 60^\circ\\ &= \frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 9\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 2\\ &= \boldsymbol{6\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(3) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす.

△BCD において，正弦定理より，

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{BH} &= \frac{6}{\sin 60^\circ} \\
\mathrm{BH} &= \frac{6}{2\sin 60^\circ} \\
&= \frac{6}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

△ABH において，三平方の定理より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &= \sqrt{8^2-(2\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{64-12} \\
&= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin 60^\circ \\
&= \frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 9\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 2\sqrt{13} \\
&= \boldsymbol{6\sqrt{39}}
\end{aligned}
$$

(4) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす.

すると，H は △BCD の外接円の中心になる.

ここで，余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
6^2 &= 4^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{7}\cdot\cos C \\
36 &= 16+28-16\sqrt{7}\cos C \\
16\sqrt{7}\cos C &= 8 \\
\cos C &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{14}
\end{aligned}
$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ より，$\sin C > 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sin C &= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{189}{196}} \\
&= \frac{3\sqrt{21}}{14}
\end{aligned}
$$

したがって，正弦定理より，

$$
\begin{aligned}
\frac{6}{\frac{3\sqrt{21}}{14}} &= 2R \\
R &= \frac{2\sqrt{21}}{3}
\end{aligned}
$$

△ACH において，三平方の定理より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &= \sqrt{6^2-\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2} \\
&= \frac{4\sqrt{15}}{3}
\end{aligned}
$$

また，△BCD の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{CD}\times\sin C \\
&= \frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{7}\times\frac{3\sqrt{21}}{14} \\
&= 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

よって，体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{15}}{3} \\
&= \boldsymbol{8\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

【5】(1) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす.

$$\begin{aligned}
2\mathrm{BH} &= \frac{12}{\sin 60^\circ} \\
\mathrm{BH} &= \frac{12}{2\sin 60^\circ} \\
&= \frac{12}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

△ABH において，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AH} &= \sqrt{12^2-(4\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{144-48} \\
&= \sqrt{96} \\
&= 4\sqrt{6}
\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\times 12\times 12\times\sin 60^\circ \\
&= \frac{1}{2}\times 12\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 36\sqrt{3}
\end{aligned}$$

したがって，三角すいの体積は

$$\frac{1}{3}\times 36\sqrt{3}\times 4\sqrt{6} = 144\sqrt{2}$$

合同な 4 つの正三角形で囲まれた立体図形だから，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{BCD} = \triangle\mathrm{ADB} = \triangle\mathrm{BCD} = 36\sqrt{3}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\times r\times(36\sqrt{3}\times 4) &= 144\sqrt{2} \\
r\times(12\sqrt{3}\times 4) &= 144\sqrt{2} \\
r &= \boldsymbol{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

球の体積は，

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3 \\
&= \boldsymbol{8\sqrt{6}\pi}
\end{aligned}$$

球の表面積は，

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi r^2 \\
&= 4\pi(\sqrt{6})^2 \\
&= \boldsymbol{24\pi}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DB} &= \sqrt{6^2+6^2} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

三角すいの底面を △ABC とし，高さ AD とすると，三角すいの体積は，

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6\right) \times 6 = 36$$

ここで，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} = \triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times \sin 60^\circ \\ &= 18\sqrt{3}\end{aligned}$$

三角すいは，4 つの三角形で囲まれた立体図形だから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \times r \times (18 \times 3 + 18\sqrt{3}) &= 36 \\ r \times 18 \times (3 + \sqrt{3}) &= 108 \\ r &= \mathbf{3 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

球の体積は，

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(3-\sqrt{3})^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(54 - 30\sqrt{3}) \\ &= \boldsymbol{(72 - 40\sqrt{3})\pi}\end{aligned}$$

球の表面積は，

$$\begin{aligned}S &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi(3-\sqrt{3})^2 \\ &= \boldsymbol{(48 - 24\sqrt{3})\pi}\end{aligned}$$

(3) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす.

$$\begin{aligned}2\mathrm{BH} &= \frac{8}{\sin 60^\circ}\\ \mathrm{BH} &= \frac{8}{2\sin 60^\circ}\\ &= \frac{8}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

△ABH において，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \sqrt{5^2-\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2}\\ &= \sqrt{25-\frac{192}{9}} = \frac{\sqrt{33}}{3}\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\times 8\times 8\times\sin 60^\circ\\ &= \frac{1}{2}\times 8\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 16\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって，三角すいの体積は，

$$\frac{1}{3}\times 16\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{3} = \frac{16\sqrt{11}}{3}$$

また，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ACD} = \triangle\mathrm{ABD} = 12$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\times r\times(12\times 3+16\sqrt{3}) &= \frac{16\sqrt{11}}{3}\\ r\times(36+16\sqrt{3}) &= 16\sqrt{11}\\ r &= \frac{16\sqrt{11}}{36+16\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{36\sqrt{11}-16\sqrt{33}}{33}}\end{aligned}$$

球の体積は，

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi r^3\\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\left(\frac{36\sqrt{11}-16\sqrt{33}}{33}\right)^3\pi}\end{aligned}$$

球の表面積は，

$$\begin{aligned}S &= 4\pi r^2\\ &= \boldsymbol{4\left(\frac{36\sqrt{11}-16\sqrt{33}}{33}\right)^2\pi}\end{aligned}$$

(4) 三角すいの体積は,

$$\frac{1}{3} \times \left(2 \times 2 \times \frac{1}{2}\right) \times 4 = \frac{8}{3}$$

また,

$$\begin{aligned} \mathrm{CD} &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ \mathrm{AC} &= \mathrm{AD} \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

△ACD において，A から CD に垂線 AH をおろすと,

$$\begin{aligned} \mathrm{AH} &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで，4 つの面の面積は,

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4 \\ \triangle\mathrm{ABD} &= 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 \\ \triangle\mathrm{BCD} &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2 \\ \triangle\mathrm{ACD} &= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 6 \end{aligned}$$

三角すいの体積は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}r(4 + 4 + 2 + 6) &= \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3}r &= \frac{8}{3} \\ r &= \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

球の体積は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}\pi} \end{aligned}$$

球の表面積は,

$$\begin{aligned} S &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\pi} \end{aligned}$$

【6】(1) $\triangle$ABC において，余弦定理より，

$$\cos A = \frac{8^2+7^2-13^2}{2\times 8\times 7} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$$

$$\angle \mathrm{A} = 120^\circ,\ 240^\circ$$

三角形の内角の和は 180° なので，

$$\angle \mathrm{A} = \mathbf{120^\circ}$$

(2) $\mathrm{AD} = x$ とおく．

$$S = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 7\cdot x\cdot\sin 60^\circ$$
$$= 2\sqrt{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{4}x$$
$$= \frac{15\sqrt{3}}{4}x$$

また，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot \sin 120^\circ = 14\sqrt{3}$$

よって，

$$\frac{15\sqrt{3}}{4}x = 14\sqrt{3}$$
$$x = 14\sqrt{3}\times\frac{4}{15\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{56}{15}}$$

【7】(1)

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\sin\angle\mathrm{A}$$
$$= \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times\sin 60^\circ$$
$$= \mathbf{\frac{3}{2}}$$

(2) $\mathrm{AD} = x$ とおく．

$$S = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ADC}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\cdot \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}x$$
$$= \frac{\sqrt{3}+2}{4}x$$

また，(1) より，

$$\frac{\sqrt{3}+2}{4}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{3}{2}\times\frac{4}{\sqrt{3}+2}$$
$$= \mathbf{12 - 6\sqrt{3}}$$

【8】(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{AF} &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} \\ &= 3 \\ \mathrm{FC} &= \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{7} \\ \mathrm{AC} &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} \\ &= 2\end{aligned}$$

より，$\triangle\mathrm{AFC}$ において，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2^2}{2 \times 3 \times \sqrt{7}} \\ &= \frac{12}{6\sqrt{7}} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha \\ &= 1 - \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 \\ &= \frac{21}{49} \\ \sin\alpha &= \pm\frac{\sqrt{21}}{7}\end{aligned}$$

$\sin\alpha > 0$ より，

$$\sin\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{7}}$$

(2)

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AF} \times \mathrm{FC} \times \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

(3) 三角すい $\mathrm{B}-\mathrm{ACF}$ の体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V &= \triangle\mathrm{ACF} \times \ell \times \frac{1}{3} \\ &= \triangle\mathrm{ABC} \times \mathrm{BF} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}S \times \ell \times \frac{1}{3} &= \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1\right) \times \sqrt{6} \times \frac{1}{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \ell \times \frac{1}{3} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore\ \ell &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}\end{aligned}$$

【9】(1) まず,

$$\begin{aligned} PB &= 3\tan 30^\circ \\ &= \sqrt{3} \\ QD &= 3\tan 60^\circ \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

ここで,

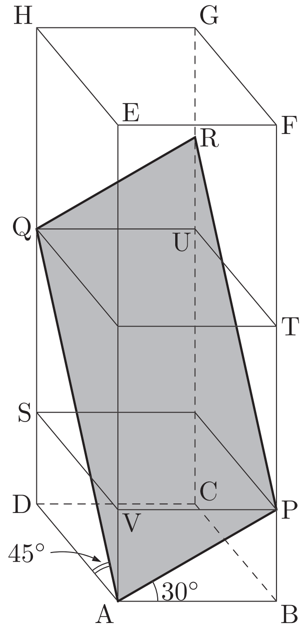
$$\begin{aligned} QS &= QD - DS \\ &= QD - PB \\ &= 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

△PSV において,三平方の定理より,

$$\begin{aligned} PS &= \sqrt{3^2 + 3^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

△QSP において,三平方の定理より,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{12 + 18} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{30}} \end{aligned}$$



(2) △APB において,

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{9 + 3} \\ &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

△AQD において,

$$\begin{aligned} AQ &= \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{9 + 27} \\ &= \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

△APQ において,余弦定理の変形より,

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{6^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{30})^2}{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

(3) (2) より,

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{3}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{13}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

平行四辺形 APRQ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= 2\triangle APQ \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{13}}{4}\right) \\ &= \boldsymbol{3\sqrt{39}} \end{aligned}$$

5章　整数

問題

【1】(1)　$144 = 2^4 \times 3^2$

より，個数は

$$(4+1)\times(2+1) = \mathbf{15}\ \textbf{(個)}$$

総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+3+3^2)$$
$$= 31 \times 13 = \mathbf{403}$$

(2)　$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$

より，個数は

$$(2+1)\times(3+1)\times(1+1) = \mathbf{24}\ \textbf{(個)}$$

総和は

$$(1+2+2^2)\times(1+3+3^2+3^3)\times(1+7)$$
$$= 7 \times 40 \times 8 = \mathbf{2240}$$

(3)　$3400 = 2^3 \times 5^2 \times 17$

より，個数は

$$(3+1)\times(2+1)\times(1+1) = \mathbf{24}\ \textbf{(個)}$$

総和は

$$(1+2+2^2+2^3)\times(1+5+5^2)\times(1+17)$$
$$= 15 \times 31 \times 18 = \mathbf{8370}$$

【2】(1)　$97-13=84,\ 139-13=126$

ここで，84 と 126 の最大公約数は

$$\begin{array}{r|rr} 7) & 84 & 126 \\ \hline 6) & 12 & 18 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

なので

$7\times 6=42$

よって，42 の約数のうち，余り 13 より大きいものだから

14，21，42

(2) 2 つの数は

$6\times a,\ 6\times b$

(a と b は互いに素な正の整数で $a<b$)

と表せる．この積が 216 だから

$6\times a\times 6\times b=216$

$a\times b=216\div 36=6$

よって

$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$

ゆえに，求める整数の組は

6 と 36，または 12 と 18

(3) 2 つの数は

$8\times a,\ 8\times b$

(a と b は互いに素な正の整数で $a<b$)

と表せる．最大公約数の性質より

$96=8\times a\times b$

$a\times b=96\div 8=12$

よって

$(a,\ b)=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$

このとき，それぞれの整数は 8 と 96，24 と 32 となる．求める整数はともに 2 桁だから

24 と 32

【3】(1)

$$\begin{array}{rr} & 100_{(2)} \\ +) & 10_{(2)} \\ \hline & 110_{(2)} \end{array}$$

よって

$110_{(2)}$

(2)

$$\begin{array}{rr} & 110_{(2)} \\ +) & 101_{(2)} \\ \hline & 1011_{(2)} \end{array}$$

よって

$1011_{(2)}$

(3)

$$\begin{array}{rr} & 1011_{(2)} \\ -) & 100_{(2)} \\ \hline & 111_{(2)} \end{array}$$

よって

$111_{(2)}$

(4)

$$\begin{array}{rr} & 1001_{(2)} \\ -) & 110_{(2)} \\ \hline & 11_{(2)} \end{array}$$

よって

$11_{(2)}$

(5)

$$\begin{array}{rr} & 10111_{(2)} \\ \times) & 101_{(2)} \\ \hline & 10111_{(2)} \\ & 10111_{(2)} \\ \hline & 1110011_{(2)} \end{array}$$

よって　**$1110011_{(2)}$**

(6)

$$\begin{array}{r|r} & 111_{(2)} \\ \cline{2-2} 1011_{(2)} & 1001101_{(2)} \\ & 1011_{(2)} \\ \cline{2-2} & 10000_{(2)} \\ & 1011_{(2)} \\ \cline{2-2} & 1011_{(2)} \\ & 1011_{(2)} \\ \cline{2-2} & 0_{(2)} \end{array}$$

よって　**$111_{(2)}$**

【4】**(1)**

$$4xy+2x+6y+3=3$$

$$\therefore\quad (2x+3)(2y+1)=3$$

であるから

$$(2x+3,\ 2y+1)=(-3,\ -1),\ (-1,\ -3),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(-3,\ -1),\ (-2,\ -2),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0)}\quad \textbf{(答)}$$

(2)

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$$

$\therefore\quad 2y+3x=xy$ すなわち $(x-2)(y-3)=6$

$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ より，$x-2 \geqq -1,\ \ y-3 \geqq -2$ であるから

$$(x-2,\ y-3)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4)}\quad \textbf{(答)}$$

(3)

$$4xy-2x-2y+1=63$$

$$\therefore\quad (2x-1)(2y-1)=63$$

x は素数より，$x \geqq 2$ であるから

$$2x-1 \geqq 3$$

$$\therefore\quad (2x-1,\ 2y-1)=(3,\ 21),\ (7,\ 9),\ (9,\ 7),\ (21,\ 3),\ (63,\ 1)$$

このうち，x が素数であるものは

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 11),\ (5,\ 4),\ (11,\ 2)}\quad \textbf{(答)}$$

(4) $$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=2$$

$\therefore\quad y+3x=2xy$ すなわち $(2x-1)(2y-3)=3$

$x \geqq y > 0$ より，$2x-1 \geqq 1,\ 2y-3 \geqq -1,\ 2x-1 > 2y-3$ であるから

$$(2x-1,\ 2y-3)=(3,\ 1)$$

$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 2)}$　**(答)**

【5】**(1)** $k=1$ のとき

$$11x+7y=1$$

$x=2,\ y=-3$ のとき，上式は成り立つので

$$11(x-2)+7(y+3)=0$$

11 と 7 は互いに素であるから，m を整数として

$$x-2=7m,\ -y-3=11m$$

$\therefore\quad \boldsymbol{x=7m+2,\ y=-11m-3}$ **(**$\boldsymbol{m}$ **は整数)**　**(答)**

(2) $k=2$ のとき

$$11x+7y=2=1+11\cdot 2+7\cdot(-3)$$

$\therefore\quad 11(x-2)+7(y+3)=1$

であるから，(1) より

$$x-2=7m+2,\ y+3=-11m-3$$

$\therefore\quad \boldsymbol{x=7m+4,\ y=-11m-6}$ **(**$\boldsymbol{m}$ **は整数)**　**(答)**

(3) $x=2k,\ y=-3k$ は与式を満たすので

$$11(x-2k)+7(y+3k)=0$$

11 と 7 は互いに素であるから，k が整数のとき，m を整数として

$$x-2k=7m,\ -y-3k=11m$$

$\therefore\quad \boldsymbol{x=7m+2k,\ y=-11m-3k}$ **(**$\boldsymbol{m,\ k}$ **は整数)**　**(答)**

【6】**(1)** $5x^2-2(6y+3)x+10y^2-4y+13=0\cdots\cdots$① を，$x$ の 2 次方程式とみて，判別式を D とすると，整数解 x をもつので

$$\frac{D}{4}=(6y+3)^2-5(10y^2-4y+13)\geqq 0$$

$\therefore\quad -14(y-2)^2\geqq 0$ すなわち $y=2$

①より

$(x-3)^2=0$　　$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 2)}$　**(答)**

(2) $2x^2-(y+4)x+3y^2-5y-6=0$ を，x の 2 次方程式とみて，判別式を D とすると，整数解 x をもつので

$$D=(y+4)^2-4\cdot 2(3y^2-5y-6)\geqq 0$$

$\therefore\quad 23y^2-48y-64\leqq 0$

$y>0$ に注意して

$0<y\leqq \dfrac{24+\sqrt{2048}}{23}$　　$\therefore\quad y=1,\ 2,\ 3$

(i) $y=1$ のとき

$$2x^2-5x-8=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{5\pm\sqrt{89}}{4}$$

x は整数より，不適.

(ii) $y=2$ のとき

$$2x^2-6x-4=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

x は整数より，不適.

(iii) $y=3$ のとき

$$2x^2-7x+6=0 \qquad \therefore \quad x=2$$

(i) ～ (iii) より

$(x,\ y)=(2,\ 3)$　(答)

【7】**(1)** (i) a が最大辺のとき

$$24=a+b+c\leqq 3a \qquad \therefore \quad a\geqq 8\cdots\cdots①$$

三角形の成立条件より

$$a<b+c=24-a \qquad \therefore \quad a<12\cdots\cdots②$$

①，②より

$$8\leqq a<12$$

これを満たす整数 a は

$$a=8,\ 9,\ 10,\ 11$$

(ii) a が最小辺のとき，c を最大辺とすると

$$8\leqq c=24-(a+b)\leqq 11 \qquad \therefore \quad 13\leqq a+b\leqq 16$$

$b\,(\leqq c)\leqq 11$ より

$$a\geqq 2\cdots\cdots③$$

$a\leqq b$ より

$$2a\leqq a+b\leqq 16 \qquad \therefore \quad a\leqq 8\cdots\cdots④$$

③，④より

$$2\leqq a\leqq 8$$

これを満たす整数 a は

$$a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

(i)，(ii) より

最大値 11，最小値 2　(答)

(2) $a\geqq b\geqq c$ のもとで $(a,\ b,\ c)$ の組を考えればよい.

(i) $a=11$ のとき

$$b+c=24-11=13$$

$c \leqq b \leqq 11$ より

$$13=b+c \leqq 2b \qquad \therefore \quad \frac{13}{2} \leqq b \leqq 11$$

これを満たす自然数 b は

$$b=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

$$\therefore \quad (b,\ c)=(7,\ 6),\ (8,\ 5),\ (9,\ 4),\ (10,\ 3),\ (11,\ 2) \quad 5\text{組}$$

(ii) $a=10$ のとき

$$b+c=14$$

$c \leqq b \leqq 10$ より

$$14 \leqq 2b \qquad \therefore \quad 7 \leqq b \leqq 10$$

これを満たす自然数 b は

$$b=7,\ 8,\ 9,\ 10$$

$$\therefore \quad (b,\ c)=(7,\ 7),\ (8,\ 6),\ (9,\ 5),\ (10,\ 4) \quad 4\text{組}$$

(iii) $a=9$ のとき

$$b+c=15$$

$c \leqq b \leqq 9$ より

$$15 \leqq 2b \qquad \therefore \quad \frac{15}{2} \leqq b \leqq 9$$

これを満たす自然数 b は

$$b=8,\ 9$$

$$\therefore \quad (b,\ c)=(8,\ 7),\ (9,\ 6) \quad 2\text{組}$$

(iv) $a=8$ のとき

$$b+c=16$$

$c \leqq b \leqq 8$ より

$$16 \leqq 2b$$

$\therefore \quad 8 \leqq b \leqq 8$ すなわち $(b,\ c)=(8,\ 8)$ 　1組

(i) 〜 (iv) より

$5+4+2+1=$ **12 (通り)** 　**(答)**