M1T

夏期講習

解答

Z会東大進学教室

高 1 難関大数学

1章　図形と方程式（1）

問題

【1】(1) $2x+3y=6$ を変形して,

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

よって, 求める直線の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ で, 点 $(-2,\ 1)$ を通るから,

$$y-1=-\frac{2}{3}(x+2)$$
$$\therefore\quad y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\ (\text{または } 2x+3y+1=0)$$

(2) y 軸に平行でないとき $(a+1\neq 2a)$ と, y 軸に平行なとき $(a+1=2a)$ に分けて考える.

(i) $a+1\neq 2a$ すなわち $a\neq 1$ のとき

傾き：$\dfrac{5-3}{2a-(a+1)}=\dfrac{2}{a-1}$

よって, 求める直線の方程式は,

$$y-3=\frac{2}{a-1}\{x-(a+1)\}$$
$$y=\frac{2}{a-1}x-\frac{2(a+1)}{a-1}+3=\frac{2}{a-1}x+\frac{a-5}{a-1}$$

(ii) $a+1=2a$ すなわち $a=1$ のとき

y 軸に平行な直線となるから, $x=2$

$$\therefore\quad \begin{cases} a\neq 1 \text{ のとき} & y=\dfrac{2}{a-1}x+\dfrac{a-5}{a-1} \\ a=1 \text{ のとき} & x=2 \end{cases}$$

(3)

線分 AB の傾き：$\dfrac{0-4}{4-2}=-2$

求める直線の傾きを m とすると, 線分 AB と直交するから,

$$m\cdot(-2)=-1\qquad \therefore\quad m=\frac{1}{2}$$

また,

線分 AB の中点：$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{4+0}{2}\right)=(3,\ 2)$

求める直線は傾き $\dfrac{1}{2}$ で, 点 $(3,\ 2)$ を通るので,

$$y-2=\frac{1}{2}(x-3)$$
$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

【2】(1) 点 $(2,\ -1)$ と $3x-4y+8=0$ との距離だから,

$$\begin{aligned} d &= \frac{|3\times 2+(-4)\times(-1)+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \\ &= \frac{|6+4+8|}{\sqrt{25}} = \frac{18}{5} \end{aligned}$$

(2) $2x-y=1$ 上の点 $(1,\ 1)$ と $2x-y-4=0$ との距離を求めればよい.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2\times 1-1\times 1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} \\ &= \frac{|2-1-4|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

【3】$x^2-xy-2y^2+4x+y+k=0$ が 2 直線を表すのは, 与式が一次式の積に因数分解されるときであるから

$$x^2-(y-4)x-2y^2+y+k=0 \quad \cdots ①$$

とおく. ①の判別式を D_1 とすると

$$D_1=(y-4)^2-4(-2y^2+y+k)=9y^2-12y+16-4k$$

これが $(1\text{ 次式})^2$ の形になるから

$$36-9(16-4k)=0 \qquad \therefore\ \ k=3$$

このとき

$$D_1=9y^2-12y+4=(3y-2)^2$$
$$\therefore\ \ x=\frac{y-4\pm(3y-2)}{2}=2y-3,\ -y-1$$

より, ①は

$$(x-2y+3)(x+y+1)=0$$

と因数分解される. すると, 題意の直線は明らかに $x-2y+3=0$ とは異なるので, 交点を通る直線は

$$x+y+1+l(x-2y+3)=0 \quad \cdots ②$$

と表せる. ②より

$$(1+l)x+(1-2l)y+1+3l=0$$

これが $x-2y+3=0$ と直交するので

$$1+l-2(1-2l)=0 \qquad \therefore\ \ l=\frac{1}{5}$$

よって, 求める直線は

$$\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{8}{5}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x+3y+8=0$$

【4】(1) 点 B$(a,\ b)$ とする．このとき，点 M は，線分 AB の中点なので，

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1+a}{2} \\ -3 = \dfrac{3+b}{2} \end{cases}$$

これを解けば，$a=3$，$b=-9$.

よって，**点 B(3，−9)**　　(答)

(2) 点 C$(a,\ b)$ とする．このとき，l は線分 AC の垂直二等分線になるので，以下が成立する．

(i) 直線 AC$\perp$ 直線 l

(ii) AC の中点 M は，直線 l 上に存在

まず，(i) より直線 l の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ なので，AC の傾きは 2.

よって，

$$\frac{b-3}{a-1} = 2$$
$$\iff \quad 2a-b=-1 \ \cdots\cdots ①$$

また (ii) より，M$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ が l 上に存在するので，

$$\frac{b+3}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{2} - 1$$
$$\iff \quad a+2b=-11 \ \cdots\cdots ②$$

①，② を連立して解くと，$a=-\dfrac{13}{5}$，$b=-\dfrac{21}{5}$.

よって，**点 C** $\left(-\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}},\ -\dfrac{\mathbf{21}}{\mathbf{5}}\right)$　　(答)

【5】(1) 求める円の方程式は，$(x-a)^2+(y-3)^2=a^2$ とおける (図 1 参照).

この円と直線は接するので

$$\frac{|3a-12-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = |a| \iff |3(a-8)| = 5|a|$$
$$\iff 3(a-8) = \pm 5a$$

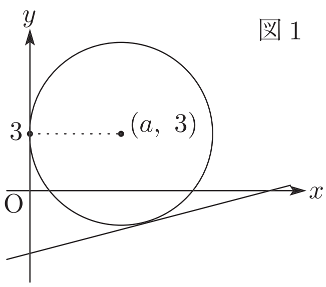


図 1

ここで

$3a-24=5a$　のとき　$a=-12$

$3a-24=-5a$ のとき　$a=3$

であるから，求める円の方程式は

$$(x+12)^2+(y-3)^2=144$$
$$(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

(2) 円の中心を $(a,\ b)$，半径を r とすると (図 2 参照)，$r^2 = 3^2 + b^2$ より

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 3^2 + b^2$$

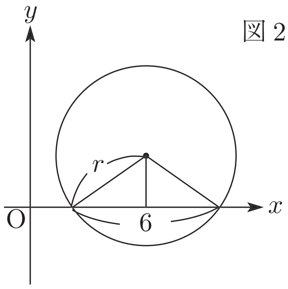


図 2

これが 2 点 $(x,\ y) = (1,\ 2),\ (3,\ 4)$ を通ること
より

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (2-b)^2 = 3^2 + b^2 \\ (3-a)^2 + (4-b)^2 = 3^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + 4 - 4b = 3^2 & \cdots ① \\ (3-a)^2 + 16 - 8b = 3^2 & \cdots ② \end{cases}$$

① × 2 − ② より

$$2(1-a)^2 + 8 - (3-a)^2 - 16 = 3^2 \iff (a+6)(a-4) = 0$$
$$\iff a = 4,\ -6$$

したがって

$$(a, b) = (4,\ 1),\ (-6,\ 11)$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$$
$$(x+6)^2 + (y-11)^2 = 130$$

(3) 2 円の交点を求める．共通弦の方程式が

$$x - 2y = 0$$

であるから，$(2y-1)^2 + y^2 = 1$ を解いて

$$y = \frac{4}{5},\ 0$$

よって

$$(x,\ y) = (0,\ 0),\ \left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

この 2 点の中点が中心となるから，中心 : $\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$ となる．

よって，求める円の方程式は

$$\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

【6】(1) $(-3,\ 1)$ は，円周上の点なので，接線の方程式は

$$\boldsymbol{-3x+y=10} \qquad \text{(答)}$$

(2) $(2,\ 2)$ は円 $(x-6)^2+(y+1)^2=25$ 上の点である．ここで，$\mathrm{C}(6,\ -1)$，$\mathrm{A}(2,\ 2)$ とすると，求める接線は，

「点 A を通り，直線 CA に垂直な直線」

である．

CA の傾きは，$\dfrac{-1-2}{6-2}=-\dfrac{3}{4}$ であるので，接線の傾きは $\dfrac{4}{3}$．さらに，$\mathrm{A}(2,\ 2)$ を通るので，求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}(x-2)+2 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 点 $(4,\ -3)$ は円外の点なので，円周上の点 $(a,\ b)$ における接線 ℓ を考え,「ℓ が点 $(4,\ -3)$ を通るときの $(a,\ b)$」を求め，接線の方程式を求める．

円周上の点を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は

$$ax+by=5$$

であり，これが点 $(4,\ -3)$ を通るので

$$4a-3b=5 \ \cdots\cdots①$$

また，$(a,\ b)$ は円 $x^2+y^2=5$ 上の点なので，

$$a^2+b^2=5 \ \cdots\cdots②$$

この，①，② を連立させて解くと，

$$① \iff a=\frac{3}{4}b+\frac{5}{4} \ \cdots\cdots①'$$

これを ② に代入して

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{4}b+\frac{5}{4}\right)^2+b^2=5 \\ \iff\ & 25b^2+30b-55=0 \\ \iff\ & 5b^2+6b-11=0 \\ \iff\ & (b-1)(5b+11)=0 \\ &\therefore\ b=1,\quad -\frac{11}{5} \end{aligned}$$

①′ に代入して

$b=1$ のとき，$a=2$

$b=-\dfrac{11}{5}$ のとき，$a=-\dfrac{2}{5}$

よって，接線の方程式は

$(a,\ b)=\left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{11}{5}\right)$ のとき

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{5}x-\frac{11}{5}y=5 \\ \iff\ & \boldsymbol{2x+11y=-25} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき

$$\boldsymbol{2x+y=5} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) |中心の y 座標| = (半径) であればよい.

$$|3a| = 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \pm 1} \qquad \text{(答)}$$

(2) |中心の x 座標| = (半径) であればよい.

$$|4a| = 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \pm \frac{3}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2 円の半径の和) = (中心間の距離) であればよい.

$$5 + 3 = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5|a|$$

したがって

$$\boldsymbol{a = \pm \frac{8}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(4) (2 円の半径の差) = (中心間の距離) であればよい.

$$5 - 3 = 5|a| \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \pm \frac{2}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(5) |半径の差| < (中心間の距離) < (半径の和) であるから

$$2 < 5|a| < 8$$

$a > 0$ のとき

$$\frac{2}{5} < a < \frac{8}{5}$$

$a < 0$ のとき, $2 < -5a < 8$ より

$$-\frac{8}{5} < a < -\frac{2}{5}$$

以上より

$$\boldsymbol{-\frac{8}{5} < a < -\frac{2}{5},\ \frac{2}{5} < a < \frac{8}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) ①, ②の交点を通る直線は

$$x^2 + y^2 + x - 2y - 5 + k(x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10) = 0$$

とかける. これが実際に直線を表すためには, $k = -1$ でなければならない. よって,

$$6x + 3y - 15 = 0$$
$$\therefore \quad 2x + y - 5 = 0$$

(2) ①, ②の交点を通る円は,

$$(x^2 + y^2 + x - 2y - 5) + k(x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10) = 0$$

とかける. これが $(0,\ -1)$ を通るから

$$1 + 2 - 5 + k(1 + 5 + 10) = 0$$
$$\therefore \quad k = \frac{1}{8}$$

よって, 求める円は,

$$3x^2 + 3y^2 + x - 7y - 10 = 0$$

問題

【1】$x^2-2x+2=ax$ から，

$$x^2-(a+2)x+2=0 \cdots\cdots ①$$

① の判別式を D とすると，直線と放物線が 2 点で交わることから，　$D>0$

$$\text{よって}\quad D=(a+2)^2-8>0$$
$$\therefore\quad (a+2)^2>8$$

ゆえに，

$$a<-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}<a \cdots\cdots ②$$

また，$\mathrm{P}(\alpha,\, a\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\, a\beta)$ とおき，$\mathrm{G}(x,\, y)$ とする．
α,β は ① の解であるから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=a+2$$

一方，G は三角形 PQR の重心であるので，

$$x=\frac{\alpha+\beta+1}{3}=\frac{a+3}{3} \cdots\cdots ③$$
$$y=\frac{a\alpha+a\beta}{3}=\frac{a(a+2)}{3} \cdots\cdots ④$$

③ を a について解くと，$a=3x-3$，これを ④ に代入して，

$$\begin{aligned} y&=\frac{(3x-3)(3x-1)}{3} \\ &=3x^2-4x+1 \end{aligned}$$

また，②，$a=3x-3$ から

$$3x-3<-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}<3x-3$$

よって，$x<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}<x$
この放物線の上の $x<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}<x$ を満たす点は上の計算を逆にたどることによって条件を満たすことが分かる．
したがって，求める G の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=3x^2-4x+1}$ の $\boldsymbol{x<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}<x}$ の部分

(答)

【2】P $(x,\ y)$ とおくと, $\mathrm{AP}:\mathrm{PO}=2:1$ より,

$$
\begin{aligned}
&2\mathrm{PO}=\mathrm{AP}\\
&4\mathrm{PO}^2=\mathrm{AP}^2
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PO}^2=x^2+y^2\\
&\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2
\end{aligned}
$$

これらを代入すると,

$$
\begin{aligned}
&4(x^2+y^2)=(x-a)^2+y^2\\
&3x^2+3y^2+2ax-a^2=0\\
\therefore\quad &\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}a^2
\end{aligned}
$$

よって, 点 P の軌跡は, 中心 $\left(-\dfrac{a}{3},\ 0\right)$, 半径 $\dfrac{2}{3}a$ の円である.

【3】x 軸に接するので, 円の中心を $(a,\ b)$ とすれば, 半径は $|b|$ である.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

とおく. この円が, さらに

$$\text{円}:x^2+(y+3)^2=1$$

と外接するので, (中心間の距離) = (半径の和) より

$$\sqrt{a^2+(b+3)^2}=|b|+1$$

両辺を 2 乗して, 整理すると

$$a^2+9+6b=2|b|+1$$

ここで, 題意より $b<0$ なので

$$-8b=a^2+8 \quad\Longleftrightarrow\quad b=-\frac{1}{8}a^2-1$$

よって, 求める軌跡は

$$\text{放物線}\quad y=-\frac{1}{8}x^2-1$$

【4】 $P(X,\ Y)$ とする. それぞれの接点を $T_1,\ T_2$ とすると,

$$\overline{PT_1}^2 = (X-1)^2 + (Y+1)^2 - 1$$
$$\overline{PT_2}^2 = (X-4)^2 + (Y-2)^2 - 2^2$$

$\overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2$ は次のことと同値である.

$$(X-1)^2 + (Y+1)^2 - 1 = (X-4)^2 + (Y-2)^2 - 4$$
$$-2X + 1 + 2Y + 1 - 1 = -8X + 16 - 4Y + 4 - 4$$
$$6X + 6Y - 15 = 0$$

つまり,

$$2X + 2Y - 5 = 0$$

をみたす.

$\therefore$ 直線 : $2x + 2y - 5 = 0$

【5】(1)
$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq -x+5 \\ y \leqq 2x-1 \end{cases}$$

各交点を図 1 のように A, B, C とおくと

$$A\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ B(2,\ 3),\ C(5,\ 0)$$

となり, 不等式をみたす領域は, 図 1 の斜線部分となる (境界含む).

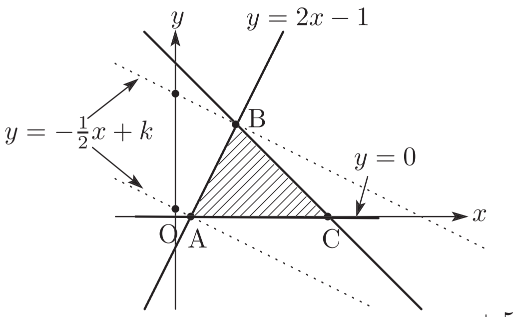


図 1

$k = \dfrac{1}{2}x + y$ より

$$y = -\frac{1}{2}x + k \quad \cdots ①$$

①は y 切片 k, 傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線である.
よって, ①が斜線部分との共有点をもつような k の範囲を調べればよい.
図 1 より, 点 B を通るときから, 点 A を通るときまでなので

・① が点 B を通るとき

$$k = \frac{1}{2}\cdot 2 + 3 = 4$$

・① が点 A を通るとき

$$k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$$

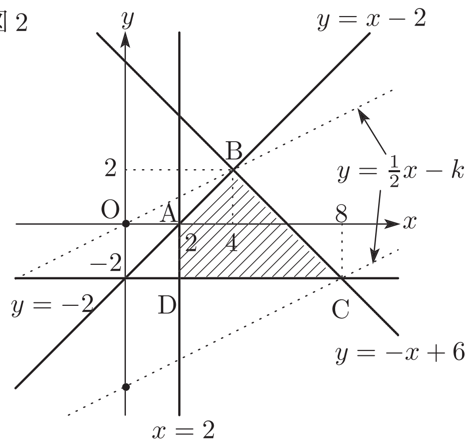
よって

最大値 4,　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$　　(答)

(2)

$$\begin{cases} x \geqq 2 \\ y \geqq -2 \\ y \leqq x-2 \\ y \leqq -x+6 \end{cases}$$

図 2



各交点を A, B, C, D とおくと

$$\mathrm{A}(2,\ 0),\quad \mathrm{B}(4,\ 2)$$
$$\mathrm{C}(8,\ -2),\quad \mathrm{D}(2,\ -2)$$

となり, 不等式をみたす領域は,
図 2 の斜線部分となる (境界含む).

$k = \dfrac{1}{2}x - y$ より

$$y = \frac{1}{2}x - k \quad \cdots ①$$

①は y 切片 $-k$, 傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線である.
よって, ①が斜線部分との共有点をもつような k の範囲を調べればよい.
図 2 より, 点 B を通るときから点 C を通るときまでなので

・ ① が点 B を通るとき

$$k = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 = 0$$

・ ① が点 C を通るとき

$$k = \frac{1}{2}\cdot 8 - (-2) = 6$$

よって

最大値 6, 最小値 0 (答)

※ 図を見ると, 点 B を通るときが最大値, 点 C を通るときが最小値と判断しがちだが, y 切片の k の符号がマイナスなので逆になる. 注意しよう.

【6】

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 2(|x|+|y|) & \cdots ① \\ x^2+y^2 \geqq 1 & \cdots ② \end{cases}$$

とおく.
①の表す領域を求めると,
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} &x^2+y^2 \leqq 2(x+y) \quad \cdots ③ \\ &x^2-2x+y^2-2y \leqq 0 \\ &(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2 \end{aligned}$$

③において, x を $-x$, y を $-y$ で置き換えてみても①と一致するので, ①は x 軸に対しても, y 軸に対しても対称となる.

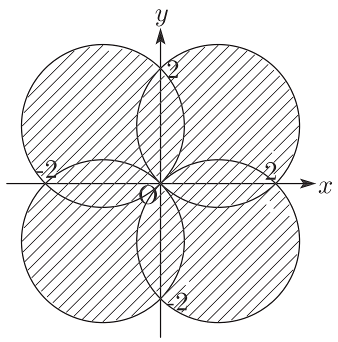


図 1

円 : $x^2+y^2-2(x+y)=0$ と y 軸との交点を求めると,

$$y^2-2y=0 \qquad \therefore \quad y=0,\ 2$$

よって, ①の表す領域は図 1 の斜線部分 (境界を含む) となる.
また, ②の表す領域は, 原点中心で半径 1 の円の外側となるので, ①, ②をみたす領域は図 2 の斜線部分 (境界を含む) となる.

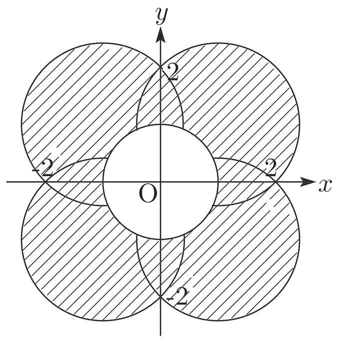


図 2

面積は,

$4 \times$ (2 辺の長さが 2 の直角二等辺三角形 + 半径 $\sqrt{2}$ の半円) − (半径 1 の円)

で表せるので,

$$4\left(2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\right)-1\cdot 1\cdot\pi=8+3\pi$$

【7】 $x^2+y^2 \leqq 5$ かつ $y \geqq 2x$ で定まる領域を図示する (図 1).

ここで，$x-2y=k$ とおく.

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}k \quad \cdots ①$$

傾き $\frac{1}{2}$ の直線がこの領域と共有点をもつのは，接点 T を通るときから A を通るときまでである.

①より，T を通るときに k の最小値が定まり，A を通るときに k の最大値が定まる.

T について，$x-2y-k=0$ と円の距離が $\sqrt{5}$ のときであるから

$$\frac{|k|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5} \qquad \therefore \quad k=\pm 5$$

y 切片 >0 となるのは

$$k=-5$$

A は，$y=2x$ と $x^2+y^2=5$ の交点だから

$$5x^2=5 \qquad \therefore \quad x=\pm 1$$

図 1 より

$$x=-1, \quad y=-2$$

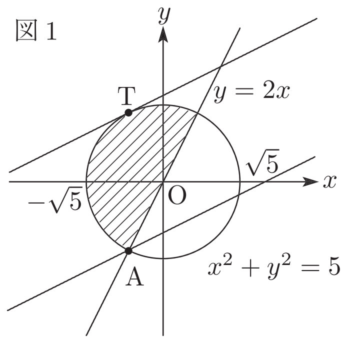
このとき

$$k=x-2y=-1-2(-2)=3$$

よって

最大値 : 3　最小値 : -5

図 1



【8】(1) (X,Y) が通過領域の点

$\iff$ ある実数 t_0 があって $t_0X+Y-{t_0}^2=0$ となる.

$\iff$ $tX+Y-t^2=0$ が t の 2 次方程式として実数解をもつ.

$\iff$ $t^2-Xt-Y=0$ より, $D=X^2+4Y \geqq 0$ $\quad\therefore\quad Y \geqq -\dfrac{1}{4}X^2$

$$\therefore\quad y \geqq -\frac{1}{4}x^2$$

(2) 同様に, $t^2-Xt-Y=0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に少なくとも 1 つ解をもてばよい.
$f(t)=t^2-Xt-Y$ とおく.

(i) $f(-1)f(1) \leqq 0$

または,

(ii) $D \geqq 0,\quad f(-1) \geqq 0,\quad f(1) \geqq 0,\quad -1 \leqq \dfrac{X}{2} \leqq 1$

であればよい. ここで,

$$f(-1)=1+X-Y,\quad f(1)=1-X-Y,\quad D=X^2+4Y$$

(i) より,
$$(X-Y+1)(-X-Y+1) \leqq 0$$
$$\iff \begin{cases} X-Y+1 \geqq 0 \\ -X-Y+1 \leqq 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} X-Y+1 \leqq 0 \\ -X-Y+1 \geqq 0 \end{cases}$$

(ii) より,
$$\begin{cases} Y \geqq -\dfrac{1}{4}X^2 \\ X-Y+1 \geqq 0 \\ -X-Y+1 \geqq 0 \\ -2 \leqq X \leqq 2 \end{cases}$$

よって,
$$\begin{cases} y \leqq x+1 \\ y \geqq -x+1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y \geqq x+1 \\ y \leqq -x+1 \end{cases}$$

$$\text{または} \begin{cases} y \geqq -\dfrac{1}{4}x^2 \\ y \leqq x+1 \\ y \leqq -x+1 \\ -2 \leqq x \leqq 2 \end{cases}$$

図 1 の斜線部分 (境界を含む).

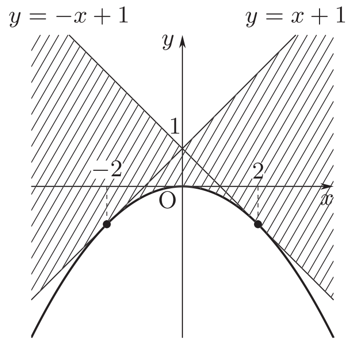


図 1

問題

【1】〔I〕(1)

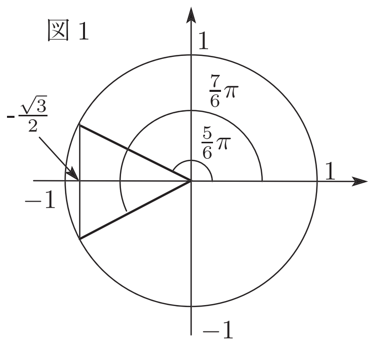


図 1 より,

$$\therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi} \qquad (答)$$

(2) $\dfrac{x}{2} = \theta$ とおくと, 方程式

$$2\cos\theta = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

を

$$0 \leqq x < 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq \theta < \pi$$

の範囲で解くことと同値であるから,

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \qquad \therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ より,

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi} \qquad (答)$$

(4) 与式より

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

すなわち

$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0 \text{ かつ } \cos x \neq 0$$

よって

$$\sin x = 0 \text{ または } \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるから

$$x = \boldsymbol{0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi} \qquad (答)$$

〔II〕(1) $\dfrac{\theta}{2}=\alpha$ とすると，$0 \leqq \alpha < \pi$ の範囲で，不等式

$$\cos\alpha > -\frac{1}{2} \quad \cdots①$$

を解けばよい．① を解くと

$$0 \leqq \alpha < \frac{2}{3}\pi$$

であるので，

$$0 \leqq \frac{\theta}{2} < \frac{2}{3}\pi \quad \therefore \quad \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{4}{3}\pi} \qquad \textbf{(答)}$$

(2)
$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta + 3\cos\theta > 0 &\iff 2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta > 0 \\ &\iff -2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 2 > 0 \\ &\iff 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 < 0 \\ &\iff (2\cos\theta+1)(\cos\theta-2) < 0 \\ &\qquad \therefore\ -\frac{1}{2} < \cos\theta < 2 \end{aligned}$$

したがって $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，$-\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leqq 1$

$$\therefore\ \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$\begin{aligned} \tan^2\theta &\leqq 1 \\ \tan^2\theta - 1 &\leqq 0 \\ (\tan\theta-1)(\tan\theta+1) &\leqq 0 \\ \therefore -1 \leqq \tan\theta &\leqq 1 \quad \cdots① \end{aligned}$$

① をみたす θ の範囲は，

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi} \quad \textbf{(答)}$$

(4) 与式より

$$\begin{aligned} 1-2\sin^2\theta > 3-5\sin\theta &\iff 2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 < 0 \\ &\iff (2\sin\theta-1)(\sin\theta-2) < 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1}{2} < \sin\theta < 2$$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\dfrac{1}{2} < \sin\theta \leqq 1$

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) ①

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}\cos\frac{5}{12}\pi &= \cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}\tan\frac{7}{12}\pi &= \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}\\ &= -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\ &= -\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\ &= -\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}\\ &= \boldsymbol{-2-\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから,

$$\cos\alpha>0,\ \cos\beta>0$$

ゆえに,

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

したがって，

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\
&= \frac{\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}} \\
&= \frac{-\frac{33}{20}}{\frac{14}{5}} \\
&= -\boldsymbol{\frac{33}{56}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) $0 < \theta < \pi$ より，

$$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$$

であり，$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} > 0$ であるから，$\theta + \frac{\pi}{4}$ は，第 1 象限の角である．

よって，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

$$\begin{aligned}
\therefore\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{1 - \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{8}{9}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

さらに，

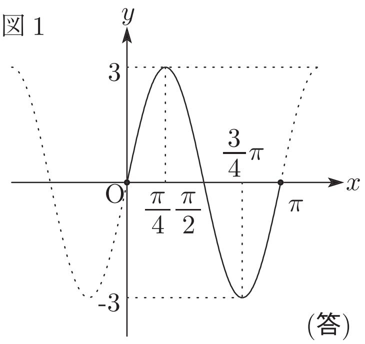
$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\left\{\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right\} \\
&= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \\
&= \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{2}}{6}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【3】(1) $y = 3\sin 2x$ より, これは, $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍, y 軸方向に 3 倍にそれぞれ拡大したものであるから, 周期は,

$$2\pi \times \frac{1}{2} = \pi \qquad \text{(答)}$$

であり, グラフは図 1 のようになる.

図 1



(答)

(2)　基本的な考え方は (1) と同様で, $y = -\tan\dfrac{x}{2}$ より, これは, $y = -\tan x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大したものとして考えればよい.

さらに, $y = \tan x$ をベースに考えるならば,

$$y = -\tan x \iff -y = \tan x$$

のグラフは, $y = -\tan x$ のグラフを x 軸に関して対称に移したものと考えられる.
よって, 求める周期は,

$$\pi \times 2 = \mathbf{2}\pi \qquad \text{(答)}$$

であり, 図 2 を得る.

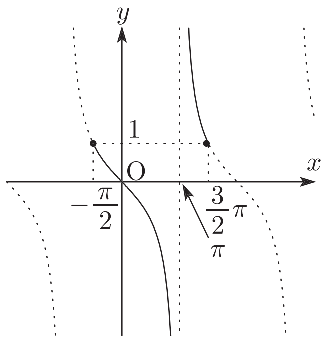


図 2

(答)

(3) 先に変形を行うと,

$$y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \iff y - 2 = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \frac{y-2}{2} = \cos\frac{x - \dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{1}{2}} \quad \cdots ①$$

と変形すると, 次のように式を読み取ることが出来る. $y = \cos x$ のグラフを x 軸方向, y 軸方向にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ 倍, 2 倍した

$$\frac{y}{2} = \cos\frac{x}{\dfrac{1}{2}} \quad \cdots ②$$

を, さらに x 軸の正方向に $\dfrac{\pi}{6}$, y 軸の正方向に 2 だけそれぞれ平行移動したグラフである. ②より, 周期は,

$$2\pi \times \frac{1}{2} = \pi \qquad \text{(答)}$$

であり, 図 3 を得る.

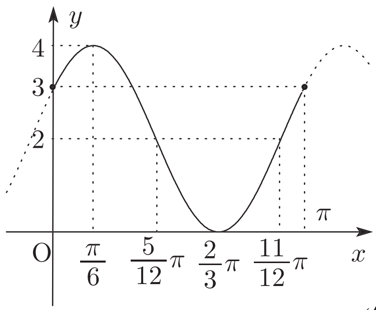


図 3　　　　(答)

＜参考＞

一般に, $y=f(x)$ 上の任意の点 $(x,\ y)$ に対し, $(ax,\ by)=(X,\ Y)$ なる点 $(X,\ Y)$ をとると, これが移動後の曲線上の点を表す．よって, $x=\dfrac{X}{a},\ y=\dfrac{Y}{b}$ をみたすことから,

$$\frac{Y}{b}=f\left(\frac{X}{a}\right)$$

を得る.

よって, $\dfrac{y}{b}=f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ のグラフは, $y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に b 倍, x 軸方向に a 倍したものである.

【4】(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ より,

$$1+t^2=1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \iff \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって,

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}=\boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}} \quad \text{(答)}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果を用いると

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+2t+t^2}{1+3t^2}$$

この値を k とおく.

$$\frac{1+2t+t^2}{1+3t^2}=k$$

$1+3t^2 \neq 0$ なので, これは

$$1+2t+t^2=k(1+3t^2) \qquad \therefore \quad (3k-1)t^2-2t+k-1=0 \quad \cdots(*)$$

と同値である. k のとり得る値の範囲は, $(*)$ が実数解をもつことによって定まる.
いま, $g(t)=(3k-1)t^2-2t+k-1$ とおく. ここで, $t\left(=\tan\dfrac{x}{2}\right)$ はすべての実数値をとる.

(i) $k=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$g(t)=-2t-\frac{2}{3}$$

$(*)$ つまり $g(t)=0$ を満たす t を求めると, $t=-\dfrac{1}{3}$ を解にもつので $k=\dfrac{1}{3}$ は適する.

(ii) $k \neq \dfrac{1}{3}$ のとき
$y=g(t)$ は 2 次関数となり, $(*)$ が実数解をもつための条件は, $(*)$ の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=1-(3k-1)(k-1) \;=\; 1-(3k^2-4k+1)=-3k^2+4k \geqq 0$$

$$k(3k-4)\leqq 0 \qquad \therefore \quad 0\leqq k\leqq\frac{4}{3} \text{ かつ } k\neq\frac{1}{3}$$

(i), (ii) より, $0\leqq k\leqq\dfrac{4}{3}$ $\qquad \therefore\ \boldsymbol{0\leqq f(x)\leqq\frac{4}{3}}$ (答)

【5】(1) 積→和の変換公式 $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ より

$$\begin{aligned} y &= \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta + \cos\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{aligned}$$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ より

y の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　$\boldsymbol{(\theta = 0, \pi)}$

最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$　$\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right)}$　　**(答)**

(2) 和→積の変換公式 $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ より

$$\begin{aligned} y &= \sin\theta + \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sin\frac{1}{2}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ より

y の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{\pi}{3}\right)}$

最小値は $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{4}{3}\pi\right)}$　　**(答)**

【6】 $f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

$$\left(\text{ただし, } \sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(1) θ は任意の角だから,

$\therefore$ **最大値 5, 最小値 − 5** (答)

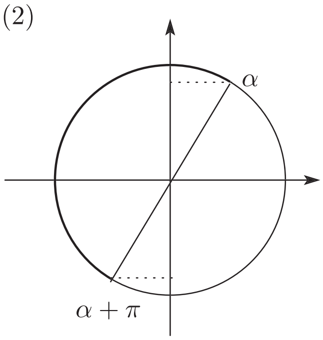
(2) $0\leqq\theta\leqq\pi \iff \alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ より,

$$\therefore\ \begin{cases}\textbf{最大値 } \mathbf{5}\\ \textbf{最小値 } 5\sin(\pi+\alpha)=-5\sin\alpha=\mathbf{-4}\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

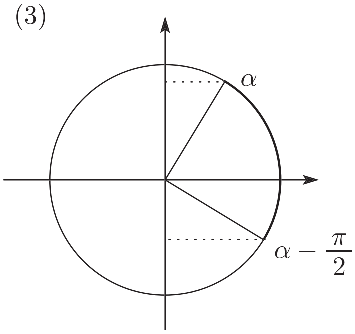
(3) $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0 \iff \alpha-\frac{\pi}{2}\leqq\theta+\alpha\leqq\alpha$ より,

$$\therefore\ \begin{cases}\textbf{最大値 } 5\sin\alpha=\mathbf{4}\\ \textbf{最小値 } 5\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-5\cos\alpha=\mathbf{-3}\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

(2)



(3)



【7】

$$2\sin x\cos x=\sin 2x \quad\Longleftrightarrow\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

であることから,

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$$

これで, 変数が $2x$ $(0\leqq 2x\leqq \pi)$ でまとめられた. さらに, 三角関数の合成を行うと,

$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\quad\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\right)$$

よって,

$$-\frac{\pi}{6}\leqq 2x-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

であるから, 下図より

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1\quad\cdots①$$

よって,

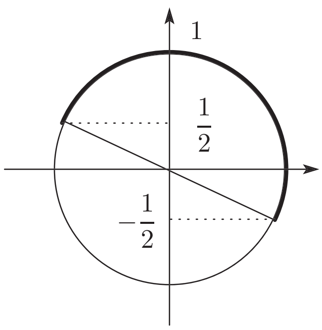
$$-1\leqq f(x)\leqq\frac{1}{2}$$

①の等号成立条件が,

$$(左辺)\quad 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\quad\Longleftrightarrow\quad x=0$$
$$(右辺)\quad 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{3}$$

であるから,

最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$,　最小値 $f(0)=\mathbf{-1}$　　(答)



問題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 3^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{4}} \times 540^{-\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{4}} \\
&= 3^{\frac{1}{2}} \times (2 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} \times (2^2 \cdot 3^3 \cdot 5)^{-\frac{1}{4}} \times (2 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} \\
&= 2^{\frac{1}{4}+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+3\times\left(-\frac{1}{4}\right)} \times 5^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \\
&= 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \\
&= \mathbf{1} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(2) $x^{\frac{1}{6}} = X,\ y^{\frac{1}{6}} = Y$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)(X + Y)(X^2 - XY + Y^2) \\
&= (X^3 - Y^3)(X^3 + Y^3) \\
&= X^6 - Y^6 \\
&= \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6 - \left(y^{\frac{1}{6}}\right)^6 \\
&= \boldsymbol{x - y} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

＜参考＞

因数分解 (展開) の公式

- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (複号同順)
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(3) 底がそろっていることから, 指数だけを計算すると,

$$p(q - r) + q(r - p) + r(p - q) = 0$$

であるから,

$$(\text{与式}) = x^0 = \mathbf{1} \qquad (\text{答})$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \log_2 5 + \log_2 3^3 - \log_2 270\\ &= \log_2 \frac{5\times 3^3}{270}\\ &= \log_2 \frac{1}{2} = \mathbf{-1} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{\log_2 5}{\log_2 4} - \log_2 5 + 2\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 16}\\ &= \frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 5\\ &= \mathbf{0} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \log_3 5\cdot\frac{\log_3 9}{\log_3 5}\\ &= \log_3 9 = \mathbf{2} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【3】与えられた数の底を 2 にそろえる.

$$\begin{aligned}&1 = 2^0\\ &8^{0.25} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}\\ &(\sqrt{2})^{-3} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = 2^{-\frac{3}{2}}\\ &4^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\\ &\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(2^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$2 > 1$ であることから,

$$2^{-\frac{3}{2}} < 2^0 < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\quad (\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{-3}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}} < \mathbf{1} < \mathbf{4}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} < \mathbf{8}^{\mathbf{0.25}} \qquad (\text{答})$$

＜別解＞

対数を用いて解くことも出来る.

$$\begin{aligned}&\log_2 1 = 0\\ &\log_2 8^{0.25} = \frac{1}{4}\times 3 = \frac{3}{4}\\ &\log_2 (\sqrt{2})^{-3} = -3\log_2\sqrt{2} = -\frac{3}{2}\\ &\log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\\ &\log_2\sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$2 > 1$ であることから,

$$(\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{-3}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}} < \mathbf{1} < \mathbf{4}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} < \mathbf{8}^{\mathbf{0.25}} \qquad (\text{答})$$

【4】 $2^x = 3^y = 5^z = a \quad \cdots ①$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \quad \cdots ②$

とおく. ①より,

$$a > 0 \quad \cdots ③$$

であり, ②より,

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0$$

であるから, $a \neq 1$ である. そこで, ①において, a を底とする対数をとると,

$$x \log_a 2 = y \log_a 3 = z \log_a 5 = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \log_a 2, \quad \frac{1}{y} = \log_a 3, \quad \frac{1}{z} = \log_a 5$$

よって, ②より,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5 = \log_a 30$$

$$\therefore \quad \log_a 30 = 2 = \log_a a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = 30$$

$$\therefore \quad a = \pm\sqrt{30}$$

③より, $a > 0$ であるので,

$$\boldsymbol{a = \sqrt{30}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $N=2^{40}$ とおく.

$$\log_{10} N = 40 \times \log_{10} 2 = 40 \times 0.3010 = 12.04$$

$$\left(\log_{10} 10^{12} =\right) 12 \leqq \log_{10} N < 13 \left(= \log_{10} 10^{13}\right)$$

$$10^{12} \leqq N < 10^{13}$$

$$\therefore \quad 10^{12} \leqq 2^{40} < 10^{13}$$

よって

13 桁　　(答)

(2) $N = 15^{10}$ とおく.

$$\begin{aligned} \log_{10} N &= 10 \times \log_{10} 15 \\ &= 10 \times (\log_{10} 3 + \log_{10} 5) \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 0.6990$
これと，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を ① に代入すると，

$$\begin{aligned} \log_{10} N = 10 \times (0.4771 + 0.6990) = 11.761 \\ (\log_{10} 10^{11} =)11 \leqq \log_{10} N < 12 (= \log_{10} 10^{12}) \\ 10^{11} \leqq N < 10^{12} \\ \therefore \quad 10^{11} \leqq 15^{10} < 10^{12} \end{aligned}$$

よって，

12 桁　　**(答)**

【6】(1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと, $2^x > 0,\ 2^{-x} > 0$ より,

$$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

(等号成立は, $2^x = 2^{-x}$ より, $x = 0$ のとき)

よって,

$t \geqq 2$ (答)

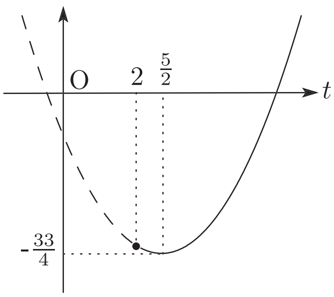


図 1

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{2x} - 5(2^x + 2^{-x}) + 2^{-2x} \\ &= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 - 5(2^x + 2^{-x}) \\ &= t^2 - 5t - 2 \\ &= \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} \end{aligned}$$

これより, 最小値は, $-\dfrac{33}{4}$ であり, このとき $t = \dfrac{5}{2}$ である (図 1 参照).

ここで, $t = \dfrac{5}{2}$ となる x を求める.

$\dfrac{5}{2} = 2^x + 2^{-x}$ で, $2^x = X$ とすると,

$$X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2}$$

したがって

$$2X^2 - 5X + 2 = (2X - 1)(X - 2) = 0$$

$$\therefore\quad X = \frac{1}{2},\ 2$$

よって

$$2^x = \frac{1}{2},\ 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1,\ 1$$

となるので

$x = 1,\ -1$ のとき 最小値 $-\dfrac{33}{4}$ (答)

【7】$\log_2 x + \log_x 2 = \log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 x} = t$ とおく.

$x > 1$ より

$$\log_2 x > 0$$

なので, t のとりうる値の範囲は

$$t \geqq 2\sqrt{\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 x}} = 2$$

$t = 2$ となるのは

$$\log_2 x = \frac{1}{\log_2 x}$$

となるときで

$$(\log_2 x)^2 = 1 \text{ つまり } \log_2 x = \pm 1$$

のときである. $x > 1$ より

$$x = 2$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 x + \log_x 2)^2 - 2 - 4(\log_2 x + \log_x 2) + 1 \\ &= t^2 - 2 - 4t + 1 \\ &= t^2 - 4t - 1 \\ &= (t-2)^2 - 5 \end{aligned}$$

だから, $f(x)$ は $t = 2$ で最小値 -5 をとる. よって,

最小値 $\boldsymbol{-5}$ ($x = 2$ のとき) (答)

【8】真数条件と底の条件から

$$x > 0,\ x \fallingdotseq 1,\ y > 0,\ y \fallingdotseq 1$$

このとき, 条件は $\log_x y > \dfrac{1}{\log_x y}$　$(\log_x y \fallingdotseq 0)$ となる. つまり

$$\frac{(\log_x y)^2 - 1}{\log_x y} > 0$$

ここで, $\log_x y$ の正負で場合分けをする.

(i) $\log_x y > 0$ のとき, 分子 > 0 となるので

$$(\log_x y + 1)(\log_x y - 1) > 0 \qquad \therefore \quad \log_x y > 1$$

(ii) $\log_x y < 0$ のとき, 分子 < 0 となるので

$$(\log_x y + 1)(\log_x y - 1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < \log_x y < 0$$

(i), (ii) より

$$\begin{aligned} &-1 < \log_x y < 0,\ 1 < \log_x y \\ \therefore \quad &\log_x x^{-1} < \log_x y < \log_x x^0,\ \log_x x < \log_x y \\ \therefore \quad &\log_x \frac{1}{x} < \log_x y < \log_x 1,\ \log_x x < \log_x y \end{aligned}$$

したがって

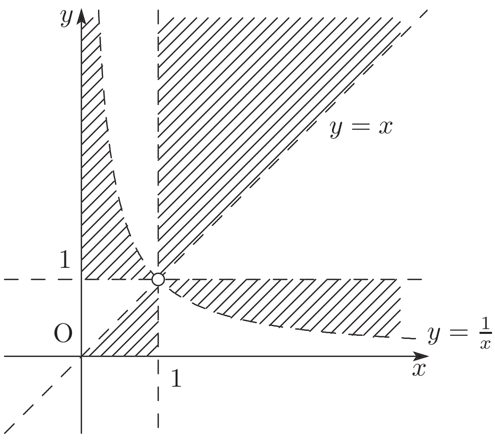
(i) $0 < x < 1$ のとき

$$\frac{1}{x} > y > 1,\ x > y$$

(ii) $1 < x$ のとき

$$\frac{1}{x} < y < 1,\ x < y$$

これを図示すると, 図のようになる.



ただし, 境界線上を除く　　(答)

M1T
高１難関大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	