M1TK

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高1難関大数学K

～2次関数・集合と論理集中講義～

問題

【1】(1) 図より，上に凸のグラフだから，$a < 0$．

$\therefore$　負　(答)

(2)

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

軸の式は $x = -\dfrac{b}{2a}$ である．これが

$$0 < -\frac{b}{2a}$$

となり，(1) より $a < 0$ だから，$b > 0$ となる．

$\therefore$　正　(答)

(3) $x = 0$ とすると，$y = c$ となり，図より $c > 0$ となる．

$\therefore$　正　(答)

(4) 頂点の y 座標は $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$．図より，$-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$．(1) より $a < 0$ だから，$b^2 - 4ac > 0$ となる．

$\therefore$　正　(答)

(5) $x = 1$ とすると，図より $y = a + b + c > 0$

$\therefore$　正　(答)

【2】$C : y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 4$ を平方完成すると,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x) - 4 \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-2)^2 - 4\right\} - 4 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^2 - 6 \end{aligned}$$

となるので，C の頂点は $(2,\ -6)$ である.

(1) 題意より，C_1 の頂点は $(-2,\ -4)$ であり，C と C_1 の方程式の x^2 の係数は同じであるから，求めるグラフ C_1 の方程式は,

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2} \qquad (答)$$

(2) グラフ C_2 の頂点を $(p,\ q)$ とおくと，題意よりグラフ C_2 を対称・平行移動した頂点は，$(p+2,\ -q)$ であり，これが C の頂点 $(2,\ -6)$ と一致するので,

$$\begin{cases} p + 2 = 2 \\ -q = -6 \end{cases} \quad より, \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = 6 \end{cases}$$

とわかる.

さらに，グラフ C_2 を x 軸について対称移動することから，C_2 の方程式の x^2 の係数は $-\dfrac{1}{2}$ である.

よって，求めるグラフ C_2 の方程式は,

$$\therefore\ \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + 6} \qquad (答)$$

【3】$P : y = x^2 - 2x - 8$ を平方完成すると，

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 8 \\ &= (x-1)^2 - 9 \end{aligned}$$

(1) y 軸方向に平行移動したグラフの方程式を

$$y = (x-1)^2 + a$$

とおくと，これが原点を通るので

$$0 = (0-1)^2 + a$$
$$\therefore\ a = -1$$

よって，求めるグラフの方程式は，

$$y = (x-1)^2 - 1$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = x^2 - 2x} \qquad \text{(答)}$$

(2) x 軸の正の向きに平行移動したグラフの方程式を

$$y = (x-b)^2 - 9$$

とおくと，これが原点を通るので

$$0 = (0-b)^2 - 9$$
$$b^2 = 9$$

x 軸の正の向きに平行移動するので，$b > 1$ に注意して

$$\therefore\ b = 3$$

よって，求めるグラフの方程式は，

$$y = (x-3)^2 - 9$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = x^2 - 6x} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 頂点の座標が $(1,\ -2)$ だから，求める方程式は，

$$y = a(x-1)^2 - 2 \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが $(2,\ -3)$ を通ることから，

$$-3 = a(2-1)^2 - 2 \qquad \therefore\ a = -1$$

よって，求める方程式は，

$$y = -(x-1)^2 - 2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = -x^2 + 2x - 3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める方程式は

$$y = a(x-1)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが 2 点 $(0,\ 2)$，$(3,\ 5)$ を通ることから，

$$\begin{cases} 2 = a + q & \cdots ① \\ 5 = 4a + q & \cdots ② \end{cases}$$

② − ① より

$$3a = 3 \qquad \therefore\ a = 1$$

① に代入して

$$q = 1$$

よって，求める方程式は

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = x^2 - 2x + 2} \qquad \text{(答)}$$

(3) $(1,\ 8)$, $(-3,\ 8)$ の y 座標は等しいから，軸はこの 2 点の中点を通る．すなわち，軸の方程式は $x = -1$ である．
さらに，頂点は x 軸上にあるから，その座標は $(-1,\ 0)$
よって，求める放物線は

$$y = a(x+1)^2 \quad (a \neq 0)$$

と表せる．これが $(1,\ 8)$ を通るから

$$8 = a(1+1)^2 \qquad \therefore\ a = 2$$

よって，求める方程式は

$$y = 2(x+1)^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = 2x^2 + 4x + 2} \qquad \text{(答)}$$

(4) 求める方程式を $y = ax^2 + bx + c\ (a \fallingdotseq 0)$ とおくと，

$(-1,\ 9)$ を通るから，　$9 = a - b + c \quad \cdots ①$
$(1,\ -1)$ を通るから，　$-1 = a + b + c \quad \cdots ②$
$(2,\ 0)$ を通るから，　$0 = 4a + 2b + c \quad \cdots ③$

② − ① より

$$-10 = 2b \qquad \therefore\ b = -5 \quad \cdots ④$$

④を ①, ③ に代入して，

$$9 = a + 5 + c \quad \cdots ①'$$
$$0 = 4a - 10 + c \quad \cdots ③'$$

①′, ③′ を解いて $a = 2,\ c = 2$

よって，求める方程式は

$\therefore$ $\boldsymbol{y = 2x^2 - 5x + 2}$　(答)

【5】(1)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 3x - 1 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) - 1 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8} \end{aligned}$$

よって，

最大値 なし　　**最小値** $\boldsymbol{-\frac{17}{8}}$　$\left(x = \frac{3}{4}\ のとき\right)$　(答)

(2)

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4x + 7 \\ &= -2(x^2 + 2x) + 7 \\ &= -2(x + 1)^2 + 9 \end{aligned}$$

よって，

最大値 9　$(x = -1$ のとき$)$　　**最小値 なし**　(答)

(3) $y = x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ と変形できる．

$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ とおくと，

最大値は $f(-1) = \left(-1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 10$
最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0^2 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$

最大値は 10　$(x = -1$ のとき$)$　　**最小値は** $\boldsymbol{-\frac{9}{4}}$　$\left(x = \frac{5}{2}\ のとき\right)$　(答)

(4) $y = -x^2 - 4x + 5 = -(x+2)^2 + 9$ と変形できる．
$f(x) = -(x+2)^2 + 9$ とおくと，

最大値は $f(0) = -(0+2)^2 + 9 = 5$
最小値は $f(3) = -(3+2)^2 + 9 = -16$

最大値は 5　($x = 0$ のとき)　　**最小値は −16**　($x = 3$ のとき)　　(答)

【6】(1) $x = 1$ のとき最大値 4 をとるので，グラフは上に凸であり，頂点は $(1, 4)$ とわかる．
したがって，求める 2 次関数は，

$$y = a(x-1)^2 + 4 \quad (a < 0)$$

とおける．$x = 3$ のとき，$y = -8$ であるから，

$$-8 = a(3-1)^2 + 4$$
$$-8 = 4a + 4$$
$$4a = -12$$
$$\therefore\ a = -3$$

よって，求める 2 次関数の方程式は，

$$y = -3(x-1)^2 + 4$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = -3x^2 + 6x + 1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $1 \leqq x \leqq 3$ において，この区間の端点でない点 $x = \frac{3}{2}$ で，最大値 $\frac{5}{4}$ をとることから，グラフは上に凸であり，頂点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ とわかる．
したがって，求める 2 次関数は，

$$y = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \quad (a < 0)$$

とおける．$x = 3$ で最小値 -1 をとるから，グラフは点 $(3, -1)$ を通るので

$$-1 = a\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$
$$-1 = \frac{9}{4}a + \frac{5}{4}$$
$$\therefore\ a = -1$$

よって，求める 2 次関数の方程式は，

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = -x^2 + 3x - 1} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) x^2+2x-1 を平方完成する．

$$t=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$$

よって，t は $-3 \leqq x \leqq 3$ において，

$x=3$ のとき，最大値 14
$x=-1$ のとき，最小値 -2

をとる．よって t の変域は

$\boldsymbol{-2 \leqq t \leqq 14}$ (答)

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2+2x-1\right)^2+6x^2+12x+5 \\ &= -\left(x^2+2x-1\right)^2+6\left(x^2+2x-1\right)+6+5 \\ &= -\left(x^2+2x-1\right)^2+6\left(x^2+2x-1\right)+11 \end{aligned}$$

(1) の $t=x^2+2x-1$ を用いて置きかえ，その式を $g(t)$ とおくと，

$$g(t)=-t^2+6t+11=-(t-3)^2+20$$

であり，$-2 \leqq t \leqq 14$ において，$g(t)$ は

$t=3$ のとき，最大値 20
$t=14$ のとき，最小値 -101

をとる．よって，

最大値 20，最小値 − 101 (答)

<参考>
$t=3$，14 のときの x の値はそれぞれ以下のようになる．

i) $t=3$ のとき

$$x^2+2x-1=3$$
$$x^2+2x-4=0$$
$$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{5}$$

$-3 \leqq x \leqq 3$ より，$x=-1+\sqrt{5}$

ii) $t=14$ のとき

$$x^2+2x-1=14$$
$$x^2+2x-15=0$$
$$\therefore\ x=-5,\ 3$$

$-3 \leqq x \leqq 3$ より，$x=3$

【8】 (I) $a=0$ のとき

$$y=0\cdot x^2-4\cdot 0\cdot x+b \qquad \therefore\ y=b$$

となり，y の値は一定であるから，最大値が 3，最小値が 1 とはならない．

(II) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$$y=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$$

より，グラフの頂点は $(2,\ -4a+b)$ である．

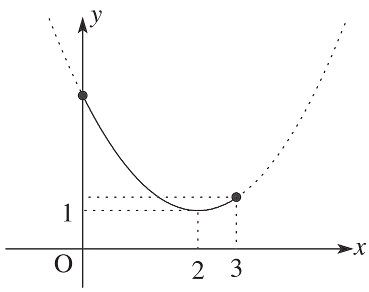
(i) $a>0$ のとき

この関数のグラフは下に凸な放物線であり，軸 $x=2$ は区間 $0 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので，$x=2$ において最小値

$$-4a+b=1 \ \cdots ①$$

をとる．さらに，区間の端点のうち軸 $x=2$ から遠い方の $x=0$ で最大値をとるから，

$$3=a\cdot 0^2-4a\cdot 0+b \quad \therefore\ b=3$$



これを ① に代入して

$$-4a+3=1$$

$$-4a=-2 \quad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

これは $a>0$ を満たす．

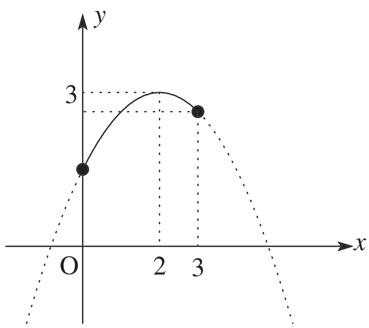
(ii) $a<0$ のとき

この関数のグラフは上に凸な放物線であり，軸 $x=2$ は区間 $0 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので，$x=2$ において，最大値

$$-4a+b=3 \ \cdots ②$$

をとる．さらに，区間の端点のうち軸 $x=2$ から遠い方の $x=0$ で最小値をとるから，

$$1=a\cdot 0^2-4a\cdot 0+b \quad \therefore\ b=1$$



これを ② に代入して

$$-4a+1=3$$

$$-4a=2 \quad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

これは $a<0$ を満たす.

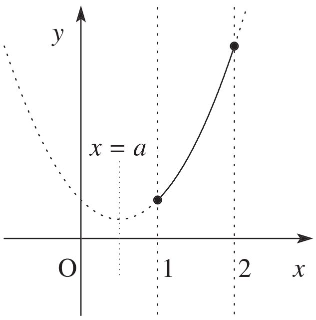
以上，(I)，(II) より，

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=3} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2},\ b=1} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】与式は，$y=x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$ となり，下に凸なグラフで頂点は $(a,\ -a^2+a)$ である．

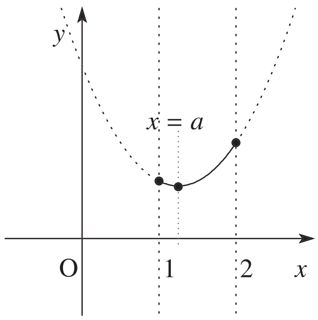
(1) (i) $a<1$ のとき



グラフより，最小値は $x=1$ のとき

$$y=1^2-2a\cdot 1+a$$
$$=1-2a+a$$
$$=-a+1$$

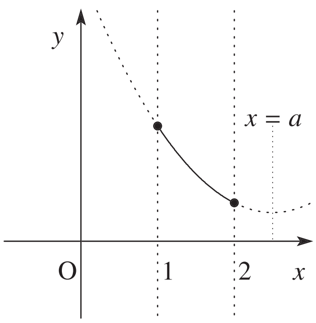
(ii) $1 \leqq a < 2$ のとき



グラフより，最小値は $x=a$ のとき

$y=-a^2+a$　(頂点の y 座標)

(iii) $2 \leqq a$ のとき



グラフより，最小値は $x=2$ のとき

$$y=2^2-2a\cdot 2+a$$
$$=4-4a+a$$
$$=-3a+4$$

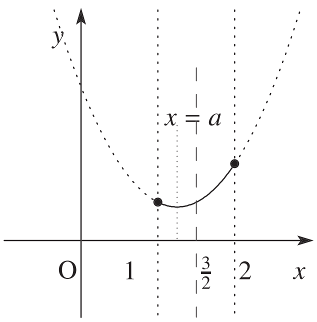
以上より，

$$\text{最小値：}\begin{cases} \boldsymbol{-a+1} & \boldsymbol{(a<1)} \\ \boldsymbol{-a^2+a} & \boldsymbol{(1 \leqq a < 2)} \\ \boldsymbol{-3a+4} & \boldsymbol{(2 \leqq a)} \end{cases} \qquad (\text{答})$$

(2) 区間 $1 \leqq x \leqq 2$ の中央は

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

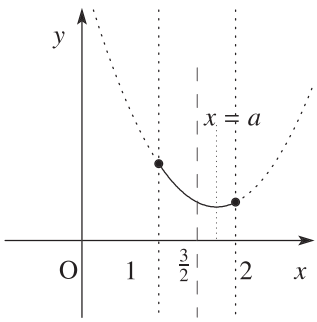
(i) $a < \dfrac{3}{2}$ のとき



グラフより，最大値は $x = 2$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 2^2 - 2a \cdot 2 + a \\ &= 4 - 4a + a \\ &= -3a + 4 \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{3}{2} \leqq a$ のとき



グラフより，最大値は $x = 1$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 1^2 - 2a \cdot 1 + a \\ &= 1 - 2a + a \\ &= -a + 1 \end{aligned}$$

以上より，

$$\text{最大値：}\begin{cases} \boldsymbol{-3a+4} & \boldsymbol{\left(a < \frac{3}{2}\right)} \\ \boldsymbol{-a+1} & \boldsymbol{\left(\frac{3}{2} \leqq a\right)} \end{cases} \qquad (\text{答})$$

【2】$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$

(1)　(i) $0 < a < 1$ のとき,

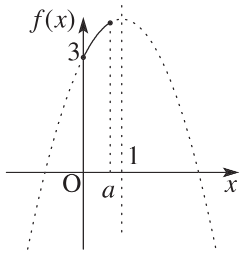
右図より $f(x)$ は

$x = a$ のとき,

最大値 $f(a) = -a^2 + 2a + 3$

$x = 0$ のとき, 最小値 $f(0) = 3$

をとる.



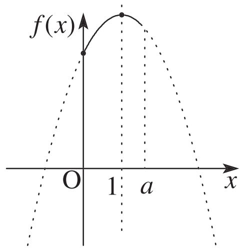
(ii) $1 \leqq a < 2$ のとき,

右図より $f(x)$ は

$x = 1$ のとき, 最大値 $f(1) = 4$

$x = 0$ のとき, 最小値 $f(0) = 3$

をとる.



(iii) $a \geqq 2$ のとき,

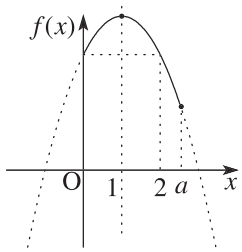
右図より $f(x)$ は

$x = 1$ のとき, 最大値 $f(1) = 4$

$x = a$ のとき,

最小値 $f(a) = -a^2 + 2a + 3$

をとる.



以上 (i)〜(iii) より,

$$\begin{cases} \mathbf{0 < a < 1} \text{ のとき,} & \text{最大値 } \mathbf{-a^2 + 2a + 3}, \text{ 最小値 } \mathbf{3} \\ \mathbf{1 \leqq a < 2} \text{ のとき,} & \text{最大値 } \mathbf{4}, \text{ 最小値 } \mathbf{3} \\ \mathbf{a \geqq 2} \text{ のとき,} & \text{最大値 } \mathbf{4}, \text{ 最小値 } \mathbf{-a^2 + 2a + 3} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) (i) $b+1<1$ すなわち $b<0$ のとき，

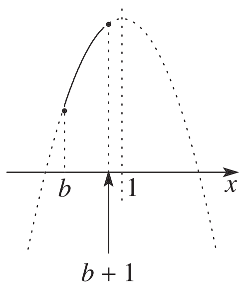
最大値は $x=b+1$ のとき，

$$f(b+1)=-b^2+4$$

最小値は $x=b$ のとき，

$$f(b)=-b^2+2b+3$$

である．



(ii) $b<\dfrac{b+(b+1)}{2}<1\leqq b+1$ すなわち

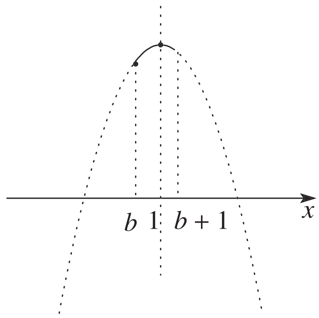
$0\leqq b<\dfrac{1}{2}$ のとき，

最大値は $x=1$ のとき，$f(1)=4$

最小値は $x=b$ のとき，

$$f(b)=-b^2+2b+3$$

である．



(iii) $b<1\leqq\dfrac{b+(b+1)}{2}<b+1$ すなわち

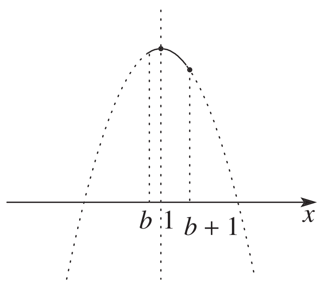
$\dfrac{1}{2}\leqq b<1$ のとき，

最大値は $x=1$ のとき，$f(1)=4$

最小値は $x=b+1$ のとき，

$$f(b+1)=-b^2+4$$

である．



(iv) $1\leqq b$ のとき，

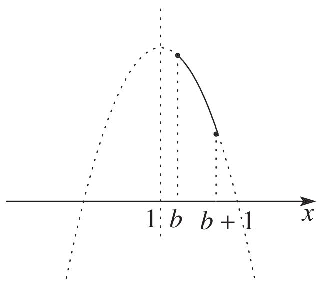
最大値は $x=b$ のとき，

$$f(b)=-b^2+2b+3$$

最小値は $x=b+1$ のとき，

$$f(b+1)=-b^2+4$$

である．

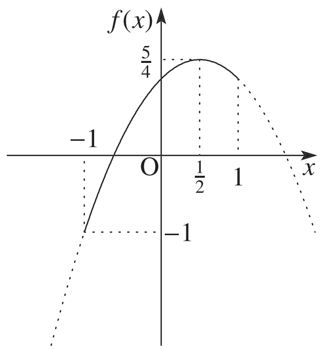


以上，(i)〜(iv) より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{b<0} \text{ のとき，} & \text{最大値 } \boldsymbol{-b^2+4},\ \text{最小値 } \boldsymbol{-b^2+2b+3} \\ \boldsymbol{0\leqq b<\dfrac{1}{2}} \text{ のとき，} & \text{最大値 } \boldsymbol{4},\ \text{最小値 } \boldsymbol{-b^2+2b+3} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq b<1} \text{ のとき，} & \text{最大値 } \boldsymbol{4},\ \text{最小値 } \boldsymbol{-b^2+4} \\ \boldsymbol{b\geqq 1} \text{ のとき，} & \text{最大値 } \boldsymbol{-b^2+2b+3},\ \text{最小値 } \boldsymbol{-b^2+4} \end{cases}$$

(答)

【3】(1) $x^2+y^2=1 \quad \cdots$① より，$y^2=1-x^2$.



$$x+y^2=x+1-x^2$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

上式を $f(x)$ とおく.

ここで，x，y は実数より

$$y^2=1-x^2 \geqq 0 \quad \therefore\ -1 \leqq x \leqq 1$$

ゆえに

$$f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

の最大値，最小値を求める.

$y=f(x)$ のグラフは右上図のようになるから，

$$\begin{cases} \textbf{最大値：} \boldsymbol{f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}} & \left(\textbf{このとき①より } \boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \\ \textbf{最小値：} \boldsymbol{f(-1)=-1} & (\textbf{このとき①より } \boldsymbol{y=0}) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2) $x^2+y^2=1 \quad \cdots$① とし，

$$2x-y=k \quad (k \text{ は実数})$$

とおく．$y=2x-k \quad \cdots$② を ① に代入して，

$$x^2+(2x-k)^2=1$$
$$5x^2-4kx+k^2-1=0 \quad \cdots(*)$$

ここで，x の 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもてば，② より，y は実数となるから，$(*)$ の判別式を D として，

$$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1) \geqq 0$$
$$-k^2+5 \geqq 0$$
$$k^2-5 \leqq 0$$
$$\therefore\ -\sqrt{5} \leqq k \leqq \sqrt{5}$$

よって，求める $2x-y$ の最大値，最小値は

$$\begin{cases} \textbf{最大値：} \boldsymbol{\sqrt{5}} & \left(\textbf{このとき } \boldsymbol{(*)}\textbf{, ②より，} \boldsymbol{x=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ y=-\frac{\sqrt{5}}{5}}\right) \\ \textbf{最小値：} \boldsymbol{-\sqrt{5}} & \left(\textbf{このとき } \boldsymbol{(*)}\textbf{, ②より，} \boldsymbol{x=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}}\right) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

【4】(右辺) $= 0$ とおいた 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について，判別式 $D = b^2 - 4ac$ の値を計算する．

(1) $x^2 - 6x + 8 = 0$ より，

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot 8 = 1$$

$D > 0$ より，解は 2 個

$(x-2)(x-4) = 0$ と因数分解できるから，$x = 2,\ 4$

共有点は **2 個** で，座標は **(2, 0), (4, 0)**　　**(答)**

(2) $-x^2 + 2x - 1 = 0$ より，$x^2 - 2x + 1 = 0$ であるから，

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 = 0$$

$D = 0$ より，解は 1 個

$-(x-1)^2 = 0$ と因数分解できるから，$x = 1$

共有点は **1 個** で，座標は **(1, 0)**　　**(答)**

(3) $3x^2 - x + 2 = 0$ より，

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23$$

$D < 0$ より，共有点は **0 個**　　**(答)**

【5】(1) $x^2 + kx + 4 = 0$ とおくと，

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$k^2 = 16 \qquad \therefore\ k = 4,\ -4$$

$k = 4$ のとき，与式は，

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = -2$$

$k = -4$ のとき，与式は，

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \qquad \therefore\ x = 2$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k = 4}\ \textbf{のとき，} & \textbf{接点は}\ \boldsymbol{(-2,\ 0)} \\ \boldsymbol{k = -4}\ \textbf{のとき，} & \textbf{接点は}\ \boldsymbol{(2,\ 0)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x^2 - 2x + k + 1 = 0$ とおくと，

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot (k+1) > 0$$

$$1 - k - 1 > 0$$

$$\therefore \boldsymbol{k < 0} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $x^2-4x+3=0$ とすると，

$(x-1)(x-3)=0$ より，$x=1,\ 3$

よって，$\mathbf{1<x<3}$ **(答)**

(2) $x^2+2x+15=0$ とし，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot 15=-14$

$D<0$ より，$x^2+2x+15=0$ は解をもたない．

よって，$x^2+2x+15\geqq 0$ の解は，**すべての実数** **(答)**

(3) $4x^2-4x+1=0$ とすると，

$(2x-1)^2=0$ より，$x=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ **(答)**

(4) 両辺に -1 をかけて，$2x^2-5x-3\geqq 0$ より，$2x^2-5x-3=0$ とすると，

$(2x+1)(x-3)=0$ より，$x=-\dfrac{1}{2},\ 3$

よって，$\boldsymbol{x\leqq -\dfrac{1}{2},\ 3\leqq x}$ **(答)**

(5) $x^2+3x+4=0$ の判別式を D とすると，

$D=3^2-4\cdot 4=-7$

$D<0$ より，$x^2+3x+4=0$ は解をもたない．

よって，$x^2+3x+4<0$ の解は，**解なし** **(答)**

(6) 両辺に -1 をかけて，$x^2-2x+4<0$ より，$x^2-2x+4=0$ とすると，

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 4=-3$

$D<0$ より，$x^2-2x+4=0$ は解をもたない．

よって，$-x^2+2x-4>0$ の解は，**解なし** **(答)**

(7) $x^2-4x+4=0$ を解くと，

$(x-2)^2=0$ より，$x=2$

よって，**2 以外のすべての実数** $\boldsymbol{(x\neq 2)}$ **(答)**

【7】(1)

$$f(x) = 2\left(x^2 - 2ax\right) + a + 1$$
$$= 2(x-a)^2 - 2a^2 + a + 1$$

軸 $x = a$ の $0 \leqq x \leqq 2$ に対する位置で，3 通りに場合分けをする．

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$m = f(0) = a + 1$$

(ii) $0 < a < 4$ のとき

$$m = f(a) = -2a^2 + a + 1$$

(iii) $4 \leqq a$ のとき

$$m = f(4) = -15a + 33$$

以上より，

$$\boldsymbol{m = \begin{cases} a + 1 & (a \leqq 0) \\ -2a^2 + a + 1 & (0 < a < 4) \\ -15a + 33 & (4 \leqq a) \end{cases}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 4$ において常に $f(x) > 0$ が成り立つには，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値 $m > 0$ であればよい．そこで，(1) の結果を用いる．

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$a + 1 > 0$$
$$a > -1$$

$a \leqq 0$ を考え，

$$\therefore\ -1 < a \leqq 0$$

(ii) $0 < a < 4$ のとき

$$-2a^2 + a + 1 > 0$$
$$2a^2 - a - 1 < 0$$
$$(2a+1)(a-1) < 0$$
$$-\frac{1}{2} < a < 1$$

$0 < a < 4$ を考え，

$$\therefore\ 0 < a < 1$$

(iii) $4 \leqq a$ のとき

$$-15a + 33 > 0$$
$$a < \frac{33}{15} = 2.2$$

これをみたす実数 a は存在しない．

以上より，求める a の範囲は

$\boldsymbol{-1 < a < 1}$　　(答)

【8】

$$p:\ x^2+9x+18<0$$
$$q:\ x^2+3ax-10a^2>0$$

とおき，$p \implies q$ となるような a の値の範囲を求める．

$$f(x)=x^2+9x+18=(x+3)(x+6)$$
$$g(x)=x^2+3ax-10a^2=(x-2a)(x+5a)$$

とおくと，

$$f(x)<0 \quad \Longleftrightarrow \quad -6<x<-3 \ \cdots (*)$$

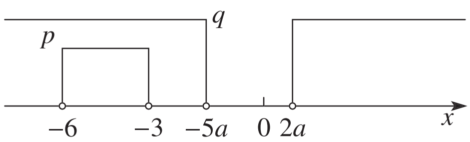
この範囲で $g(x)>0$ となる a の範囲を求める．

(i) $a=0$ のとき

$$g(x)=x^2$$

であるから，$(*)$ において，$g(x)>0$ となる．
よって，$a=0$ は題意をみたす．

(ii) $a>0$ のとき

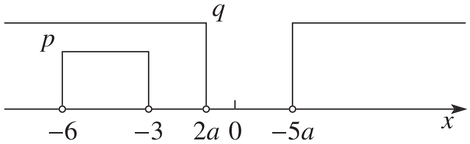


$$q:\ x<-5a,\quad 2a<x$$

題意をみたすためには

$$-3 \leqq -5a$$
$$\therefore\ 0<a \leqq \frac{3}{5}$$

(iii) $a<0$ のとき



$$q:\ x<2a,\quad -5a<x$$

題意をみたすためには

$$-3 \leqq 2a$$
$$\therefore\ -\frac{3}{2} \leqq a<0$$

以上，(i)〜(iii) より，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq a \leqq \frac{3}{5}} \qquad (答)$$

問題

【1】与えられた不等式がすべての実数 x に対して成り立つためには

$$a > 0 \quad \cdots(*)$$

が必要である．与えられた不等式の (左辺) = 0 の判別式を D とすると，求める条件は $D < 0$ であり，

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a\cdot\frac{4}{a} < 0$$
$$a^2 - 2a - 3 < 0$$
$$(a+1)(a-3) < 0$$
$$\therefore\ -1 < a < 3$$

(∗) を考え，求める a の値の範囲は

$$\mathbf{0 < a < 3} \qquad (答)$$

【2】(1) すべての実数 x に対して，$f(x) > 0$ が常に成り立つということは，$y = f(x)$ のグラフが常に x 軸の上方にあるということである．

$y = f(x) = x^2 + 2kx - 3k$ のグラフは下に凸なグラフだから，x 軸と共有点をもたないためには，$x^2 + 2kx - 3k = 0$ の判別式を D として，$D < 0$ となるような k の値の範囲を求めればよい．

$$\frac{D}{4} = k^2 - 1\cdot(-3k) < 0$$
$$k^2 + 3k < 0$$
$$k(k+3) < 0$$
$$\therefore\ \mathbf{-3 < k < 0} \qquad (答)$$

＜別解＞

$$f(x) = x^2 + 2kx - 3k = (x+k)^2 - k^2 - 3k$$

より，$y = f(x)$ の最小値は $-k^2 - 3k$ であり，これが x 軸の上方にあればよいから

$$-k^2 - 3k > 0$$
$$k^2 + 3k < 0$$
$$k(k+3) < 0$$
$$\therefore\ \mathbf{-3 < k < 0} \qquad (答)$$

(2) 題意をみたすには，$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x) = x^2 + 2kx - 3k$ の最小値が x 軸の上方にあればよい．

$$f(x) = x^2 + 2kx - 3k = (x + k)^2 - k^2 - 3k$$

より，軸 $x = -k$ の $0 \leqq x \leqq 1$ に対する位置で，3 通りに場合分けをする．

(i) $-k < 0$ のとき $(k > 0)$

$y = f(x)$ のグラフは右図．

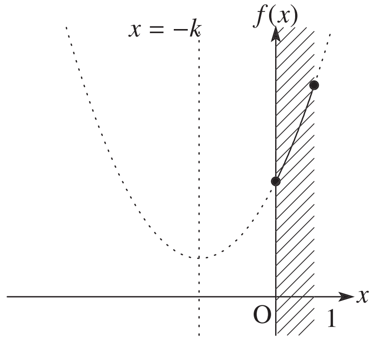
よって，最小値は

$$f(0) = 0^2 + 2k \cdot 0 - 3k$$
$$= -3k$$

これより，

$$-3k > 0$$
$$\therefore\ k < 0$$

となるが，$k > 0$, $k < 0$ をともにみたす解はない．



(ii) $0 \leqq -k < 1$ のとき $(-1 < k \leqq 0)$

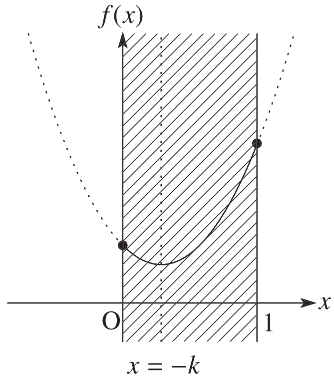
$y = f(x)$ のグラフは右図．

よって，最小値は

$$f(-k) = (-k)^2 + 2k \cdot (-k) - 3k$$
$$= k^2 - 2k^2 - 3k$$
$$= -k^2 - 3k$$

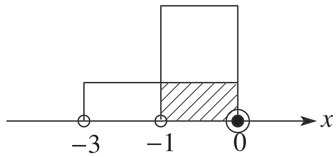
これより，

$$-k^2 - 3k > 0$$
$$k^2 + 3k < 0$$
$$k(k + 3) < 0$$
$$\therefore\ -3 < k < 0$$



$-1 < k \leqq 0$ と $-3 < k < 0$ をともにみたす k の値の範囲は，右図より，

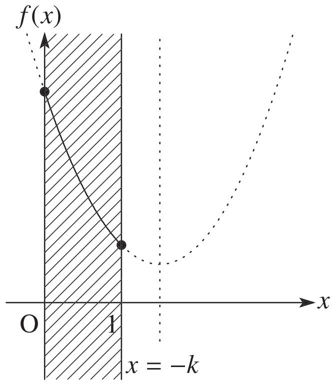
$$-1 < k < 0$$



(iii) $1 \leqq -k$ のとき $(k \leqq -1)$

$y = f(x)$ のグラフは右図.

よって，最小値は

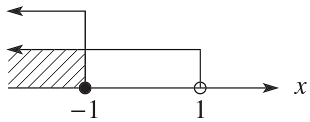


$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 + 2k \cdot 1 - 3k \\ &= 1 + 2k - 3k \\ &= 1 - k \end{aligned}$$

これより，

$$1 - k > 0$$
$$\therefore\ k < 1$$

したがって，$k \leqq -1$ と $k < 1$ をともにみたす k の値の範囲は，右図より



$$k \leqq -1$$

以上，(i)〜(iii) より，求める定数 k の値の範囲は，

$k < 0$ (答)

【3】与式の左辺を $f(x)$ とおき，平方完成する．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + 6 + a \\ &= (x-a)^2 + 6 + a - a^2 \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ が 1 より大きい異なる 2 つの実数解をもつには，次の 3 つの条件をみたせばよい．

(i) 軸の条件より，

$$a > 1 \quad \cdots ①$$

(ii) 頂点の y 座標の条件より，

$$\begin{aligned} -a^2 + a + 6 &< 0 \\ (a+2)(a-3) &> 0 \\ a < -2,\ 3 &< a \quad \cdots ② \end{aligned}$$

(iii) 端点の条件より，

$$\begin{aligned} f(1) = 1 - 2a + 6 + a &> 0 \\ a &< 7 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

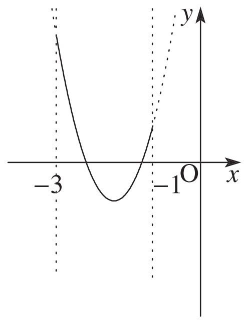
①, ②, ③ より，求める a の値の範囲は，

$\mathbf{3 < a < 7}$　　(答)

【4】 $x^2 - ax + 2 = 0 \cdots (*)$ とし，左辺を $f(x)$ とする．

(1)
$$f(x) = x^2 - ax + 2$$
$$= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$$

方程式 $f(x) = 0$ が題意をみたすとき，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．このとき $f(x) = 0$ の判別式を D とおくと，



$$\begin{cases} D \geqq 0 & \cdots ① \\ -3 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq -1 & \cdots ② \\ f(-3) \geqq 0 & \cdots ③ \\ f(-1) \geqq 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

① より，

$$a^2 - 8 \geqq 0$$
$$\therefore\ a \leqq -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2} \leqq a \quad \cdots ①'$$

② より，

$$\therefore\ -6 \leqq a \leqq -2 \quad \cdots ②'$$

③ より，

$$f(-3) = 9 + 3a + 2$$
$$= 3a + 11 \geqq 0$$
$$\therefore\ a \geqq -\frac{11}{3} \quad \cdots ③'$$

④ より，

$$f(-1) = 1 + a + 2$$
$$= a + 3 \geqq 0$$
$$\therefore\ a \geqq -3 \quad \cdots ④'$$

①′, ②′, ③′, ④′ より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-3 \leqq a \leqq -2\sqrt{2}}$$ **(答)**

(2) (i) $(*)$ が $-3 < x < -1$ に 1 つの実数解をもつとき

$$f(-3)\cdot f(-1) < 0$$
$$(3a+11)(a+3) < 0$$
$$\therefore\ -\frac{11}{3} < a < -3$$

(ii) $x = -1$ を解にもつとき

$$f(-1) = a + 3 = 0$$
$$a = -3$$

このとき

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$
$$= (x+1)(x+2)$$

より，もう 1 つの解は $x = -2$ となり不適.

(iii) $x = -3$ を解にもつとき

$$f(x) = x^2 + \frac{11}{3}x + 2$$
$$= \frac{1}{3}(3x+2)(x+3)$$

より，もう 1 つの解は $x = -\frac{2}{3}$ となり，適する.

以上より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{11}{3} \leqq a < -3}$$ (答)

(3) 題意をみたすのは，(1) または (2) のときであるから，

$$\boldsymbol{-\frac{11}{3} \leqq a \leqq -2\sqrt{2}}$$ (答)

【5】(1) $y = x^2 - kx + k$ に $y = 0$ を代入して $x^2 - kx + k = 0$ とする．

さらに，$x^2 - kx + k = 0$ の 2 解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = k$$
$$\alpha\beta = k$$

となる．2 次関数 $y = x^2 - kx + k$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ l は

$$l = |\alpha - \beta|$$

である．l が 2 以上であるとき，

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &\geqq 2 \\ |\alpha - \beta|^2 &\geqq 4 \\ (\alpha - \beta)^2 &\geqq 4 \\ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta &\geqq 4 \\ k^2 - 4k &\geqq 4 \\ k^2 - 4k - 4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ここで，$k^2 - 4k - 4 = 0$ の解が $k = 2 \pm 2\sqrt{2}$ だから，定数 k の範囲は

$$\boldsymbol{k \leqq 2 - 2\sqrt{2},\ 2 + 2\sqrt{2} \leqq k} \qquad \text{(答)}$$

(2) 頂点 $(2, -3)$ より，求める 2 次関数は，

$$y = a(x-2)^2 - 3 \quad (a \neq 0) \ \cdots ①$$

と表せる．① に $y = 0$ を代入して，$a(x-2)^2 - 3 = 0$ とし，この 2 次方程式の 2 解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = 4$$
$$\alpha\beta = \frac{4a - 3}{a}$$

となる．2 次関数 $y = a(x-2)^2 - 3$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ l は

$$l = |\alpha - \beta|$$

であり，l が 6 であるから

$$|\alpha-\beta|=6$$
$$|\alpha-\beta|^2=36$$
$$(\alpha-\beta)^2=36$$
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$$
$$16-4\cdot\frac{4a-3}{a}=36$$
$$16a-16a+12=36a$$
$$\therefore\ a=\frac{1}{3}$$

よって，求める 2 次関数は，

$$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【6】$ax^2-(2a+1)x+2a-3=0$ $\cdots$①

① を a について整理すると

$$(x^2-2x+2)a=x+3 \quad ①'$$

ここで，$a=0$ のとき，① の解は $x=-3$ となり題意をみたさない．したがって，$a \neq 0$ であり，①′ は，

$$x^2-2x+2=\frac{1}{a}(x+3)$$

とできる．ここで，① が $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつには，

$$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1 \quad \cdots②$$

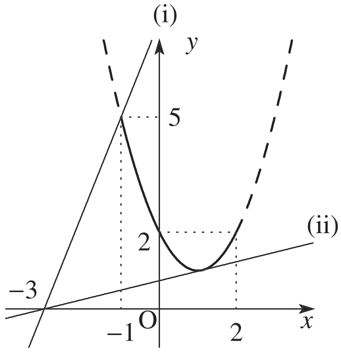
$$y=\frac{1}{a}(x+3) \quad \cdots③$$

の 2 つのグラフが $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもてばよい．

③ の傾き $\frac{1}{a}$ について

(i) $(-1,\ 5)$ を通るとき，$\frac{1}{a}$ は最大（a は最小）

(ii) ② と ③ が接するとき，$\frac{1}{a}$ は最小（a は最大）



(i) のとき，

$$5=\frac{1}{a}\cdot 2 \qquad \therefore\ a=\frac{2}{5}$$

(ii) のとき，① の判別式 $D=0$ であればよいので，

$$D=(2a+1)^2-4a(2a-3)=0$$
$$-4a^2+16a+1=0$$
$$\therefore\ a=\frac{4\pm\sqrt{17}}{2}$$

ここで，$a>0$ より，$a=\frac{4+\sqrt{17}}{2}$

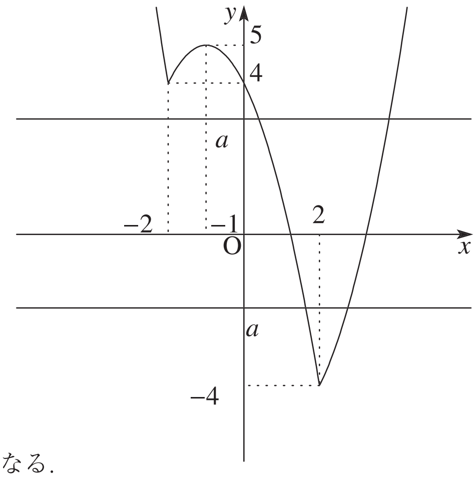
よって，求める実数 a の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{5} \leqq a \leqq \frac{4+\sqrt{17}}{2}} \qquad (答)$$

【7】方程式 $|x^2-4|=2x+a$ の実数解は,

$$y=|x^2-4|-2x \quad \cdots ①$$
$$y=a \quad \cdots ②$$

のグラフの共有点の x 座標で与えられる.



(i) $x^2-4 \geqq 0$ のとき　$(x \leqq -2,\ 2 \leqq x)$

① は,

$$y=x^2-4-2x$$
$$\therefore\ y=(x-1)^2-5$$

(ii) $x^2-4<0$ のとき　$(-2<x<2)$

① は,

$$y=-x^2+4-2x$$
$$\therefore\ y=-(x+1)^2+5$$

したがって, ① のグラフは, 右上図のようになる.

方程式 $|x^2-4|=2x+a$ の実数解の個数は, ① と ② の共有点の個数に他ならない. よって, 題意をみたす a の値の範囲は,

$$\mathbf{-4<a<4,\ a>5} \qquad (答)$$

問題

【1】500 以上 1000 以下の整数のうち，3 で割り切れる数の集合を A，11 で割り切れる数の集合を B とする．また全体集合を U とすると $n(U) = 501$.

(1) 1 以上 1000 以下の整数のうち，3 で割り切れる数は 333 個.
また 1 以上 499 以下の整数のうち，3 で割り切れる数は 166 個.
ゆえに

$$n(A) = 333 - 166 = 167$$

1 以上 1000 以下の整数のうち，11 で割り切れる数は 90 個.
1 以上 499 以下の整数のうち，11 で割り切れる数は 45 個.
ゆえに

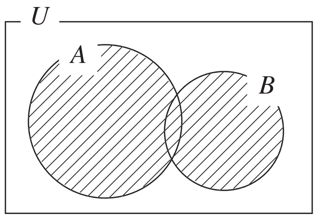
$$n(B) = 90 - 45 = 45$$

また，3 と 11 の最小公倍数は 33 であるから，1 以上 1000 以下の整数のうち，33 で割り切れる数は 30 個.
1 以上 499 以下の整数のうち，33 で割り切れる数は 15 個.
ゆえに

$$n(A \cap B) = 30 - 15 = 15$$

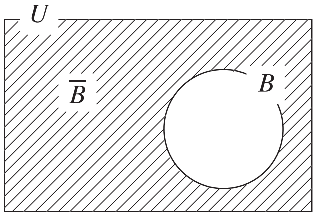
以上より，求める個数 $n(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 167 + 45 - 15 \\ &= \mathbf{197}\ \text{個} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$



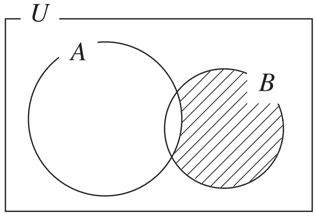
(2) 求める個数 $n(\overline{B})$ は

$$\begin{aligned} n(\overline{B}) &= n(U) - n(B) \\ &= 501 - 45 \\ &= \mathbf{456}\ \text{個} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

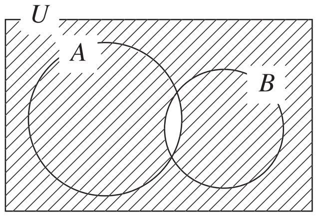


(3) 求める個数 $n(B \cap \overline{A})$ は

$$\begin{aligned} n(B \cap \overline{A}) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 45 - 15 \\ &= \mathbf{30}\ \text{個} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$



(4) 求める個数 $n(\overline{A}\cup\overline{B})$ は



$$n(\overline{A}\cup\overline{B}) = n(\overline{A\cap B})$$
$$= n(U) - n(A\cap B)$$
$$= 501 - 15$$
$$= \mathbf{486}\text{ 個} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 命題「すべての家庭にテレビがある」の否定は

テレビのない家庭もある (答)

＜コメント＞

「テレビのない家庭が少なくとも 1 つ存在する」なども可.

(2) 命題「関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \geqq 0$ をみたす」の否定は

関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ をみたすある実数 x に対して $f(x) < 0$ となる (答)

＜コメント＞

「関数 $f(x)$ が $f(x) < 0$ となる実数 x が，$x \geqq 0$ に存在する」なども可.

(3) 命題「少なくとも 1 組の実数 x，y に対して，$x - y = 3$ かつ $x + 2y = 6$ が成り立つ」の否定は

すべての実数 x, y に対して, $x - y \neq 3$ または $x + 2y \neq 6$ (答)

【3】(1) **偽** である.（反例：$a = b = -1$） (答)

(2) 命題

「$a + b > 2 \quad\Longrightarrow\quad a > 0$ または $b > 2$」

の対偶は

「$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 2 \quad\Longrightarrow\quad a + b \leqq 2$」

対偶が真であることを示す.

仮定より

$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 2$

辺々加えて

$$a + b \leqq 2$$

ゆえに対偶は真である．ゆえにもとの命題も **真** である. (答)

【4】(1) （十分性）　$a = 0$ かつ $b = 0$ のとき，辺々和と差をとって

$$a + b = 0 \text{ かつ } a - b = 0$$

（必要性）　$a + b = 0$ かつ $a - b = 0$ のとき，辺々和と差をとって

$$a = b = 0$$

ゆえに

(ア)　**(答)**

(2) （十分性）　$a > 0$ かつ $b > 0$ のとき，辺々和と積をとることにより，

$$a + b > 0 \text{ かつ } ab > 0$$

が成り立つ.

（必要性）　$ab > 0$ のとき，a と b は同符号であるから，

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0 \text{ または } a < 0 \text{ かつ } b < 0 \quad \cdots ①$$

また $a + b > 0$ より

$$a > 0 \text{ または } b > 0 \quad \cdots ②$$

① かつ ② より，

$$a > 0 \text{ かつ } b > 0$$

ゆえに

(ア)　**(答)**

(3) （十分性）　成立しない. $\left(\text{反例：} x = 3,\ y = \dfrac{1}{2}\right)$

（必要性）　$x > 1$ かつ $y > 1$ のとき，辺々加えて $x + y > 2$.

ゆえに

(イ)　**(答)**

(4) （十分性）　$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ のとき，

$a = b$ または $a^2 + b^2 = c^2$

よって，このとき $\triangle$ABC は，

「$a = b$ なる二等辺三角形」または「c を斜辺とする直角三角形」

すなわち，$\triangle$ABC は直角二等辺三角形とは限らない.

（必要性）　$\triangle$ABC が直角二等辺三角形であるとき，a が斜辺ならば，

$$b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}a \quad (> 0)$$

よって，このとき $\triangle$ABC において，

$$a \neq b \text{ かつ } a^2 + b^2 \neq c^2$$

すなわち，$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ は成立しない. ゆえに

(エ)　**(答)**

【5】(1) 命題「n^2が 5 の倍数でないならば, n は 5 の倍数ではない」について,

逆：「**$\boldsymbol{n}$ が 5 の倍数でないならば, $\boldsymbol{n^2}$は 5 の倍数ではない**」　(答)

裏：「**$\boldsymbol{n^2}$が 5 の倍数ならば, $\boldsymbol{n}$ は 5 の倍数である**」　(答)

対偶：「**$\boldsymbol{n}$ が 5 の倍数ならば, $\boldsymbol{n^2}$は 5 の倍数である**」　(答)

(2) ≪証明≫

対偶が真であることを示す.

n が 5 の倍数のとき,

$$n = 5k \quad (k \text{ は整数})$$

とおけて，このとき

$$n^2 = 25k^2 = 5(5k^2)$$

より，n^2 も 5 の倍数となる.

ゆえに対偶は真となり，すなわちもとの命題も真である.　〔証明終〕

【6】≪証明≫

背理法により示す.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ は有理数である}$$

と仮定する．このとき,

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = a \quad （a \text{ は有理数}） \quad \cdots ①$$

とおけるから，① の両辺を 2 乗して

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = a^2$$

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = a^2$$

ゆえに

$$\sqrt{6} = \frac{a^2 - 5}{2} \quad \cdots ②$$

ここで a は有理数であるから $\dfrac{a^2-5}{2}$ も有理数である．ところが $\sqrt{6}$ は無理数であるから，② は

（左辺）=（無理数），（右辺）=（有理数）

となり矛盾する.

ゆえに $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は有理数ではない．よって無理数である.　〔証明終〕

【7】$a \fallingdotseq 0$ のもとで,

A について

$$a(x^2-3ax+2a^2) \leqq 0$$
$$\iff \quad a(x-a)(x-2a) \leqq 0 \quad \cdots (*)$$

(i) $a > 0$ のとき.

$a < 2a$ より

$$(*) \quad \iff \quad (x-a)(x-2a) \leqq 0$$
$$a \leqq x \leqq 2a$$

(ii) $a < 0$ のとき.

$2a < a$ より

$$(*) \quad \iff \quad (x-a)(x-2a) \geqq 0$$
$$x \leqq 2a,\ \ a \leqq x$$

また B について

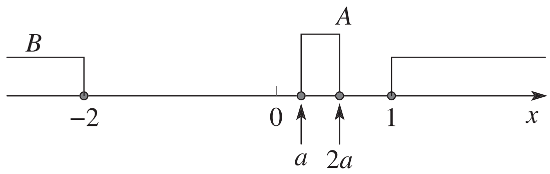
$$x^2+x-2 \geqq 0$$
$$\iff \quad x \leqq -2,\ \ 1 \leqq x$$

(1) (i) $a < 0$ のとき.

A と B は共通部分をもつから不適.

(ii) $a > 0$ のとき.

$A \cap B = \emptyset$ となるのは $A \subset \overline{B}$ となるとき.



図より

$$a > 0 \text{ かつ } -2 < a \text{ かつ } 2a < 1$$

ゆえに

$$\mathbf{0 < a < \frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $A \cup B$ が実数全体となるのは $\overline{B} \subset A$ のとき.

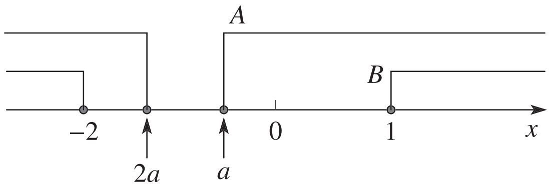
(I) $a > 0$ のとき.

A は $-2 < x < 0$ の部分を含まないから不適.

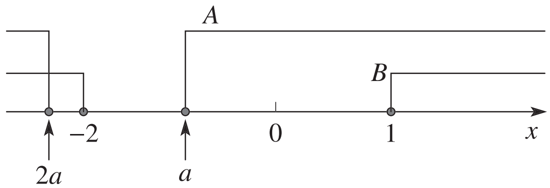
(II) $a < 0$ のとき.

以下の 3 つの場合が考えられる.

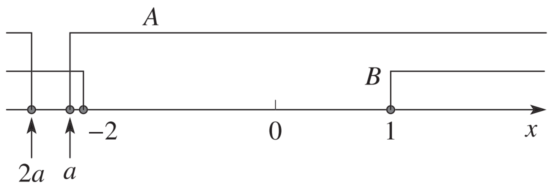
(i) $-2 < 2a$ のとき.



(ii) $2a \leqq -2 < a$ のとき.



(iii) $a \leqq -2$ のとき.



(i) のとき，すなわち $-2 < 2a$ のとき不適.

(ii) のとき，すなわち $2a \leqq -2 < a$ のとき不適.

(iii) のとき，すなわち $a \leqq -2$ のとき適する.

以上より，求める a の範囲は

$\boldsymbol{a \leqq -2}$　　(答)

【8】(1) $f(x)=x^2-3x$，$g(x)=x^2-ax+a^2-9$ とおく．

また集合 A，B を

$$A=\{x \mid f(x) \leqq 0\}$$
$$B=\{x \mid g(x) \leqq 0\}$$

とする．

命題 P が真であるとき，集合 A，B について

$$A \subset B$$

が成立する．すなわち，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフの位置関係は図のようになる．

ここで

$$f(x)=x^2-3x \leqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq x \leqq 3$$

であるから，求める条件は

$$g(0) \leqq 0 \quad \cdots ① \quad \text{かつ} \quad g(3) \leqq 0 \quad \cdots ②$$

である．① より，

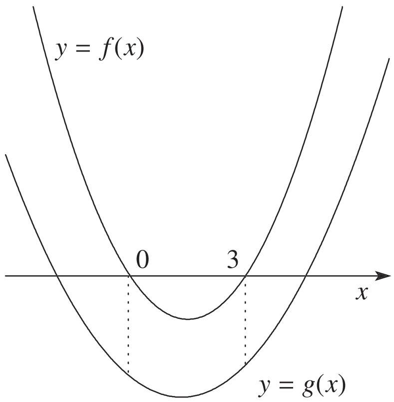
$$g(0)=a^2-9 \leqq 0$$
$$\therefore\ -3 \leqq a \leqq 3$$

また，② より，

$$g(3)=a^2-3a \leqq 0$$
$$\therefore\ 0 \leqq a \leqq 3$$

以上より，求める a の範囲は

$\mathbf{0 \leqq a \leqq 3}$　　(答)



(2)

逆： $\boldsymbol{x^2-ax+a^2-9 \leqq 0}$　ならば　$\boldsymbol{x^2-3x \leqq 0}$　　(答)

対偶： $\boldsymbol{x^2-ax+a^2-9 > 0}$　ならば　$\boldsymbol{x^2-3x > 0}$　　(答)

(3) P と P の逆がともに真であるということは，$A \subset B$ かつ $A \supset B$，つまり，

$$A = B$$

ということである．このとき

$$g(0) = 0 \cdots ③ \quad かつ \quad g(3) = 0 \cdots ④$$

③ より，$a = \pm 3$

④ より，$a = 0,\ 3$

ゆえに，求める a の値は

$\boldsymbol{a = 3}$　　(答)

M1TK

高１難関大数学Ｋ

～２次関数・集合と論理集中講義～

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製