M2T

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学

問題

【1】(1) $X=x^2+4x-5$ とおくと, $X=(x+2)^2-9$ と変形できるから, X のとり得る値の範囲は

$$X \geqq -9$$

このもとで

$$y=X^2+aX=\left(X+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$$

となるので, $-\dfrac{a}{2}$ と -9 の大小関係で場合分けを行う.

(i) $-\dfrac{a}{2}<-9$ すなわち $18<a$ のとき, $X \geqq -9$ の範囲で y は増加する．よって, y の最小値は $X=-9$ のとき

$$(-9)^2+a\cdot(-9)=81-9a$$

これが -90 だから

$$81-9a=-90 \qquad \therefore \quad a=19 \ \ (18<a \text{ をみたす})$$

(ii) $-9 \leqq -\dfrac{a}{2}$ すなわち $a \leqq 18$ のとき, y の最小値は $-\dfrac{a^2}{4}$ である．これが -90 だから, $-\dfrac{a^2}{4}=-90$ より

$$a^2=360 \qquad \therefore \quad a=\pm 6\sqrt{10}$$

$\sqrt{10}>3$ より $6\sqrt{10}>18$ だから, $a \leqq 18$ をみたすものは

$$a=-6\sqrt{10}$$

以上まとめると, 求める a の値は

$$a=19, \ \ -6\sqrt{10} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)=x^2-4x+5$ とおくと, $f(x)=(x-2)^2+1$ と変形できる．そこで, a, b と 2 との大小関係で場合分けを行う.

(i) $2 \leqq a<b$ のとき, $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ の範囲では増加する．よって, $f(x)$ の値域が $2a \leqq y \leqq 2b$ であるとき

$$f(a)=2a, \ \ f(b)=2b \qquad \therefore \quad a^2-6a+5=0, \ \ b^2-6b+5=0$$

$a<b$ に注意して解くと $a=1, b=5$ となるが, これは $2 \leqq a<b$ をみたさない．よって, この場合は a, b は存在しない.

(ii) $0<a<b \leqq 2$ のとき, $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ の範囲では減少する．よって, $f(x)$ の値域が $2a \leqq y \leqq 2b$ であるとき

$$f(a)=2b, \ \ f(b)=2a \qquad \therefore \quad \begin{cases} a^2-4a+5=2b & \cdots① \\ b^2-4b+5=2a & \cdots② \end{cases}$$

①$-$② より

$$(a+b)(a-b)-4(a-b)=2(b-a) \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b-2)=0$$

$a<b$ だから $a+b=2$ となり, これと ①より

$$a^2-4a+5=2(2-a) \quad \Leftrightarrow \quad a^2-2a+1=0$$

よって, $a=1$ となり, これより $b=1$ でもあるが, これは $a<b$ をみたさない. したがって, この場合は a, b は存在しない.

(iii) $a<2<b$ のとき, $a \leqq x \leqq b$ の範囲では $f(x)$ は $x=2$ で最小値 1 をとる. よって

$$2a=1 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}$$

このとき, $f(x)$ は $x=a=\dfrac{1}{2}$ または $x=b$ のとき最大となるが, $x=\dfrac{1}{2}$ で最大と仮定すると

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-2+5=\frac{13}{4}$$

これが $2b$ に等しいので

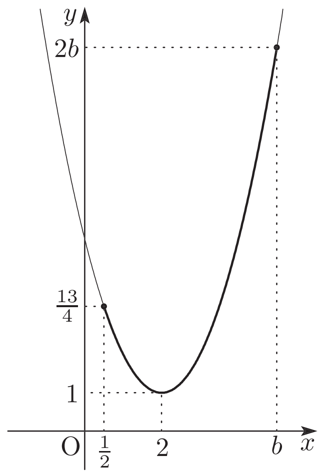
$$2b=\frac{13}{4} \qquad \therefore \quad b=\frac{13}{8}$$

となり, $2<b$ をみたさない. よって, $f(x)$ は $x=b$ で最大となるから

$$f(b)=2b \qquad \therefore \quad b^2-6b+5=0$$

$2<b$ に注意して解くと

$$b=5$$



であり, このとき確かに $f(x)$ の値域は $2a=1 \leqq y \leqq 2b=10$ となる.

以上より, 求める a, b の値は

$$a=\frac{1}{2}, \quad b=5 \qquad (答)$$

【2】(1) $a=-1$ のとき，$x=\dfrac{1}{4}$ となり，これを解にもつ．　$\cdots(*)$

これより，以下 $a \fallingdotseq -1$ について考える．$a \fallingdotseq -1$ のとき

$$(a+1)x^2-2(a-3)x+2a=0 \quad \cdots ①$$

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a+1)\cdot 2a=-a^2-8a+9=-(a-1)(a+9) \geqq 0$$

$$\therefore \quad -9 \leqq a < -1,\ -1 < a \leqq 1$$

これと $(*)$ より

$$-9 \leqq a \leqq 1 \quad \cdots ② \qquad (答)$$

(2) (1) のとき，その解が正であるためには，軸の x 座標が正であるから

$$\frac{a-3}{a+1}>0 \qquad \therefore \quad a<-1,\ 3<a \quad \cdots ③$$

ここで，$f(x)=(a+1)x^2-2(a-3)x+2a$ とおく．図 1，2 より

$$(a+1)f(0)=(a+1)\cdot 2a>0 \qquad \therefore \quad a<-1,\ 0<a \quad \cdots ④$$

②，③，④より，$-9 \leqq a < -1$ となるので，これと $(*)$ より

$$-9 \leqq a \leqq -1 \qquad (答)$$

(3) 少なくとも 1 つ，正の解をもつのは

(イ)　2 解とも正
(ロ)　1 解が正で, 1 解が負
(ハ)　1 解が正で, 1 解が 0

のいずれかである．

(ロ) は，図 3, 4 より，$f(0)$ と $(a+1)$ が異符号．つまり

$$(a+1)f(0)<0 \qquad \therefore \quad -1<a<0$$

(ハ) について，$f(0)=0$ のとき

$$a=0$$

このとき，$f(x)=x^2+6x$ なので，他の 1 解は負で，(ハ) となることはない．

(イ) は (2) より，$-9 \leqq a \leqq -1$ であるから，まとめて

$$-9 \leqq a < 0 \qquad (答)$$

(4) 軸の x 座標が 1 以上のとき，実数解をもてば，必ず解の 1 つは 1 より大である．

よって

$$\frac{a-3}{a+1} \geqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-3}{a+1}-1=\frac{-4}{a+1} \geqq 0$$

$$\therefore \quad a<-1 \quad \because a \fallingdotseq -1$$

軸の x 座標が 1 より小のとき，$a>-1$ である．このとき，図 5, 6 より

$$(a+1)f(1)=(a+1)(a+7)<0 \qquad \therefore \quad -7<a<-1$$

であるから，不適．以上より

$$a<-1$$

これと $(*)$, ②より

$$-9 \leqq a < -1 \qquad (答)$$

図 1　$a+1>0$

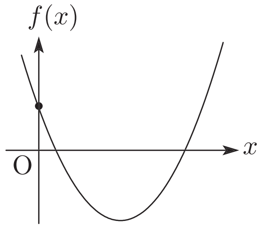


図 2　$a+1<0$

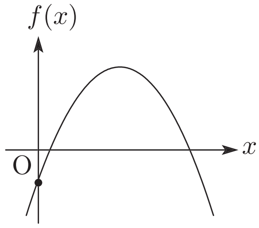


図 3　$a+1>0$

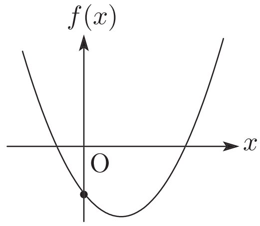


図 4　$a+1<0$

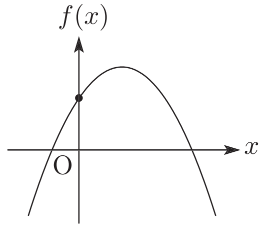


図 5　$a+1>0$

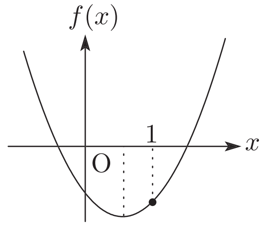
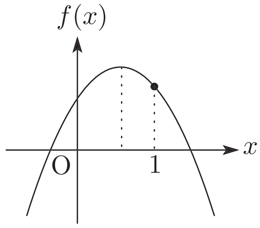


図 6　$a+1<0$



【3】 $f(x)=2x^2-2(m-1)x+n-2$ とおく．条件は

$$\begin{cases} D>0 & \cdots ① \\ f(0)>0,\ f(2)>0 & \cdots ② \\ 0<\dfrac{m-1}{2}<2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-2n+4>0 \qquad \therefore \quad (m-1)^2+4>2n$$

②より

$$f(0)=n-2>0 \qquad \therefore \quad n>2$$
$$f(2)=8-4m+4+n-2=10-4m+n>0$$

③より

$$1<m<5$$

(i) $m=2$ のとき

$$(2-1)^2+4=5>2n \qquad \therefore \quad \frac{5}{2}>n$$

よって，$n>2$ となる n はない．

(ii) $m=3$ のとき

$$(3-1)^2+4=8>2n \qquad \therefore \quad 4>n$$

$n>2$ より，$n=3$ である．このとき $f(2)=10-4\cdot3+3=1>0$ ですべての条件をみたす．

(iii) $m=4$ のとき

$$(4-1)^2+4=13>2n \qquad \therefore \quad \frac{13}{2}>n$$

$n>2$ より，$n=3,4,5,6$．このとき，$f(2)=10-16+n>0$ をみたさない．

以上より

$$(m,\ n)=(3,\ 3) \qquad \text{(答)}$$

このとき $f(x)=2x^2-4x+1$ なので

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) すべての順列の数は

$$\frac{10\,!}{4\,!\,6\,!} = 210(\text{通り})$$

ある. このうち白玉が隣り合わないのは, まず赤玉 6 個 (●) を並べ, その間および両端の 7ヶ所 (|) から 4ヶ所を選んで, 白玉を 1 個ずつ入れる場合である.

| ● | ● | ● | ● | ● | ● |

この場合の数は

$${}_7\mathrm{C}_4 = 35(\text{通り})$$

であるから, 求める確率は

$$\frac{35}{210} = \frac{1}{6} \qquad (\text{答})$$

(2) 赤玉は 6 個しかないから, 異なる 2ヶ所で 4 個以上続けて並ぶことはない. そこで, 赤玉がどこから 4 個以上続けて並ぶかで場合を分けると, 次の 7 つの場合がある. ここで, 赤玉を●, 白玉を○, どちらでもよいときは△とする.

(ア) ● ● ● ● △ △ △ △ △ △
(イ) ○ ● ● ● ● △ △ △ △ △
(ウ) △ ○ ● ● ● ● △ △ △ △
(エ) △ △ ○ ● ● ● ● △ △ △
(オ) △ △ △ ○ ● ● ● ● △ △
(カ) △ △ △ △ ○ ● ● ● ● △
(キ) △ △ △ △ △ ○ ● ● ● ●

すると, (ア) の場合は△に白玉が 4 個, 赤玉が 2 個入るから, 赤玉がどこに入るかを考えて

$${}_6\mathrm{C}_2 = 15(\text{通り})$$

また, (イ)〜(キ) の場合は△に白玉が 3 個, 赤玉が 2 個入るから, 赤玉がどこに入るかを考えて

$${}_5\mathrm{C}_2 = 10(\text{通り})$$

これらはすべて互いに排反なので, 求める確率は

$$\frac{15 + 10 \cdot 6}{210} = \frac{5}{14} \qquad (\text{答})$$

【5】(1) ab が偶数となる確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

ab も cd も 2 を約数にもつ確率が p_2 である．よって

$$p_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \qquad \text{(答)}$$

同様に，ab が 3 の倍数となるには，a と b の少なくとも一方が 3 ではなくてはならないので

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

よって

$$p_3=\left(\frac{7}{16}\right)^2=\frac{49}{256} \qquad \text{(答)}$$

ab が 6 の倍数となるのは，a と b が 2 と 3 か，4 と 3 になる場合のみである．よって

$$2\times\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}$$

これより

$$p_6=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \qquad \text{(答)}$$

(2) 互いに素になるのは，2 か 3 を公約数にもたないときであり，6 を公約数にもつ場合はいずれにも含まれる．よって，求める確率は

$$\begin{aligned}1-(p_2+p_3-p_6)&=1-\frac{144+49-16}{256}\\&=\frac{79}{256} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【6】(1) P から R に進むのは, 3 区画進む中で 2 区画は東, 1 区画は北を選ぶ場合であるから, その確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

そして, R から Q へは必ず進むから, 求める確率は

$\dfrac{3}{8}$　　(答)

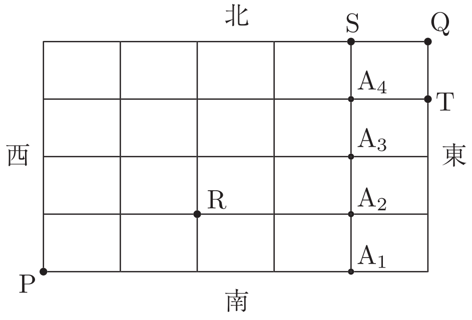
(2) P から T に進むのは, 互いに排反な次の 4 つの場合に分けられる.

(i) 図の点 A_1 から東へ 1 区画進む場合, まず A_1 に進むのは 4 区画進む中ですべて東を選ぶ場合なので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

このもとで, 東に 1 区画進むので

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$$



(ii) 図の点 A_2 から東へ 1 区画進む場合, まず A_2 に進むのは 5 区画進む中で 4 区画は東, 1 区画は北を選ぶ場合である. このもとで, 東に 1 区画進むので

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$$

(iii) 図の点 A_3 から東へ 1 区画進む場合, まず A_3 に進むのは 6 区画進む中で 4 区画は東, 2 区画は北を選ぶ場合である. このもとで, 東に 1 区画進むので

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{128}$$

(iv) 図の点 A_4 から東へ 1 区画進む場合, まず A_4 に進むのは 7 区画進む中で 4 区画は東, 3 区画は北を選ぶ場合である. このもとで, 東に 1 区画進むので

$${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{256}$$

したがって, P から T に進む確率は

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{64}+\frac{15}{128}+\frac{35}{256}=\frac{93}{256}$$

であり, T から Q には必ず進むから, 求める確率は

$\dfrac{93}{256}$　　(答)

(3) S と T を通る場合は互いに排反で, この両方ですべてを尽くしているから, 求める確率は

R を通らず, T を通って Q に進む確率

である．そこで, R と T を両方通って Q に進む場合を考える．R から Q は東, 北ともに 3 区画進み, S と T は対称な位置にあるから, R から出発して T を通り Q に進む確率は

$$\frac{1}{2}$$

よって, R と T を両方通って Q に進む確率は

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

なので, 求める確率は

$$\frac{93}{256}-\frac{3}{16}=\frac{45}{256} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) ①より

$$\begin{aligned} x^2-3x-4<0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-4)<0 \\ &\Leftrightarrow \quad -1<x<4 \end{aligned}$$

また，②より

$$\begin{aligned} x^2+2x-3>0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3)>0 \\ &\Leftrightarrow \quad x<-3,\ x>1 \end{aligned}$$

さらに，③より

$$x^2-5ax+4a^2<0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)(x-4a)<0$$

となるので

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき} & a<x<4a \\ a<0 \text{ のとき} & 4a<x<a \\ a=0 \text{ のとき} & x^2<0 \text{ より，解なし} \end{cases}$$

ここで，①，②を同時にみたす x は

$$1<x<4$$

となり，このすべての値が ③をみたすのは，$a>0$ のときだから

$$a \leqq 1,\ 4 \leqq 4a \qquad \therefore \quad a=1$$

(2) ①, ②のどちらもみたさない x は

$$-3 \leqq x \leqq -1$$

となり，このすべての値が③をみたすのは，$a<0$ のときだから

$$4a<-3,\ -1<a \qquad \therefore \quad -1<a<-\frac{3}{4}$$

【2】$X=f(x)=x^2+x-2$ とする．ここで，

$$\begin{aligned} f\bigl(f(x)\bigr)<0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(X)<0 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2+X-2<0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2<X<1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2<x^2+x-2<1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0<x^2+x \text{ かつ } x^2+x-3<0 \\ &\Leftrightarrow \quad x<-1,\ 0<x \text{ かつ } \frac{-1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-1-\sqrt{13}}{2}<x<-1,\ 0<x<\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

【3】(1) α は ①, ②の解であるから,

$$\begin{array}{rr} & \alpha^2 + a\alpha + 2b - 1 = 0 \\ -) & \alpha^2 + b\alpha + 2a - 1 = 0 \\ \hline & (a-b)\alpha + 2(b-a) = 0 \end{array}$$

つまり,

$$(a-b)(\alpha-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a-b=0,\ \text{または}\ \alpha - 2 = 0$$

ここで $a-b=0$ ならば, ①と②は同一の方程式となり, 共通解がただ一つであることに反する.

よって, $\alpha = 2$.

これを代入すれば,

$$4 + 2a + 2b - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + 2b + 3 = 0$$

(2)

$$\alpha < \gamma < \beta\ \text{または}\ \beta < \gamma < \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) < 0$$

(1) より, $2b = -2a - 3$ なので, ①は,

$$\begin{aligned} x^2 + ax - 2a - 3 - 1 &= x^2 - 4 + a(x-2) \\ &= (x-2)(x+2+a) = 0 \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha = 2, \quad \beta = -(a+2)$$

同じく,

$$\gamma = -(b+2) = a - \frac{1}{2}$$

よって, 求める条件は,

$$\left(a - \frac{1}{2} + a + 2\right)\left(a - \frac{1}{2} - 2\right) < 0$$

をみたすことである. つまり,

$$\left(a + \frac{3}{4}\right)\left(a - \frac{5}{2}\right) < 0$$

以上より,

$$-\frac{3}{4} < a < \frac{5}{2}$$

【4】 $\begin{cases} x-y=z+1 \\ x-2y=3z \end{cases}$

となるので, 連立させて x, y を z を用いて表すと,

$$x=-z+2, \quad y=-2z+1$$

これらを与式に代入すれば,

$$\begin{aligned} axy+byz+czx &= a(-z+2)(-2z+1)+b(-2z+1)z+cz(-z+2) \\ &= (2a-2b-c)z^2+(-5a+b+2c)z+2a \ = \ 12 \end{aligned}$$

これが任意の z について成り立つから,

$$\begin{cases} 2a-2b-c=0 \\ -5a+b+2c=0 \\ 2a=12 \end{cases}$$

よって,

$$(a,\ b,\ c)=(6,\ -2,\ 16)$$

【5】 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z} &= 0 \\ \frac{y+x}{xy}+\frac{x+y+z-z}{z(x+y+z)} &= 0 \\ \frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z(x+y+z)} &= 0 \\ (x+y)\{z(x+y+z)+xy\} &= 0 \\ (x+y)\{z^2+(x+y)z+xy\} &= 0 \\ \therefore \quad (x+y)(z+x)(z+y) &= 0 \end{aligned}$$

したがって,

x, y, z のいずれか 2 つの和は 0 に等しい.

【6】(1) 「$x=-1,\ y=1 \quad \Rightarrow \quad x+y=0$」は真
「$x+y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1, y=1$」は偽（反例　$x=y=0$）
$x=-1,\ y=1$ は $x+y=0$ であるための**十分条件** (ウ)

(2) 「$m+a>m+b \quad \Rightarrow \quad a>b$」は，真
「$a>b \quad \Rightarrow \quad m+a>m+b$」は，真
$m+a>m+b$ は，$a>b$ であるための**必要十分条件** (ア)

(3) 「$x>0,\ y>0 \quad \Rightarrow \quad xy>0$」は，真
「$xy>0 \quad \Rightarrow \quad x>0,\ y>0$」は，偽（反例　$x<0, y<0$）
$x>0,\ y>0$ は，$xy>0$ であるための**十分条件** (ウ)

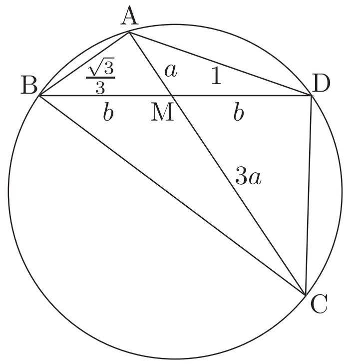
(4) 「$(a-b)(b-c)(c-a)=0 \quad \Rightarrow \quad a=b=c$」は，偽
（反例　$a=b=1, c=2$）
「$a=b=c \quad \Rightarrow \quad (a-b)(b-c)(c-a)=0$」は，真
$(a-b)(b-c)(c-a)=0$ は，$a=b=c$ であるための**必要条件** (イ)

(5) 「$(c-a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2=0 \quad \Rightarrow \quad a=b=c$」は，真
「$a=b=c \quad \Rightarrow \quad (c-a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2=0$」は，真
$(c-a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2=0$ は，$a=b=c$ であるための**必要十分条件** (ア)

(6) 「$ac<0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=0$ が実数解をもつ」は，真
「$f(x)=0$ が実数解をもつ $\quad \Rightarrow \quad ac<0$」は，偽（反例　$a=0$）
$f(x)=ax^2+bx+c$ において，$ac<0$ であることは，$f(x)=0$ が実数解をもつための**十分条件** (ウ)

(7) 「$c<0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=0$ が正の解をもつ」は，真
「$f(x)=0$ が正の解をもつ $\quad \Rightarrow \quad c<0$」は，偽（反例　$b=-1, c=0$）
$f(x)=x^2+bx+c$ において，$c<0$ であることは，$f(x)=0$ が正の解をもつための**十分条件** (ウ)

問題



【1】 対角線 AC と BD の交点を M とする．いま，△ABC と △ACD は辺 AC を共有するから，これらの面積が等しいとき

$$\mathrm{BM} = \mathrm{DM}$$

同様に，△BCD : △ABD = 3 : 1 だから

$$\mathrm{CM} = 3\mathrm{AM}$$

そこで，AM $= a$，BM $= b$ とおくと，方べきの定理より

$$\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM} = \mathrm{BM}\cdot\mathrm{DM} \qquad \therefore\ \ b^2 = 3a^2 \ \cdots ①$$

次に，中線定理より

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

なので

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2 = 2(a^2+b^2) \qquad \therefore\ \ a^2+b^2 = \frac{2}{3} \ \cdots ②$$

①，② より $a^2 = \dfrac{1}{6}$，$b^2 = \dfrac{1}{2}$ となるから，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAD} = \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}} = \frac{\frac{1}{3}+1-4b^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \ \sin\angle\mathrm{BAD} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

したがって, 四角形 ABCD の面積は

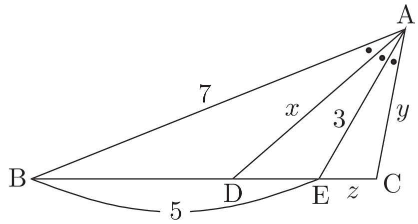
$$4\triangle\mathrm{ABD} = 4\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad (答)$$

また，円の半径は正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BD}}{2\sin\angle\mathrm{BAD}} = \frac{2b}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (答)$$

【2】 (a) $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DAE}$ であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DE} = \mathrm{AB} : \mathrm{AE} = 7 : 3$$



よって

$$\mathrm{DE} = \frac{3}{10}\mathrm{BE} = \frac{3}{2} \qquad \text{(答)}$$

次に, $\mathrm{AD} = x$ とおくと, 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ADE} = \frac{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{DE}^2 - \mathrm{EA}^2}{2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}} = \frac{x^2 + \frac{9}{4} - 9}{2x\cdot\frac{3}{2}} = \frac{x^2 - \frac{27}{4}}{3x}$$

また, $\mathrm{BD} = \dfrac{7}{2}$ だから, 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ADB} = \frac{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{DB}^2 - \mathrm{BA}^2}{2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DB}} = \frac{x^2 + \frac{49}{4} - 49}{2x\cdot\frac{7}{2}} = \frac{x^2 - \frac{147}{4}}{7x}$$

となるが, $\angle\mathrm{ADE} + \angle\mathrm{ADB} = 180^\circ$ だから

$$\cos\angle\mathrm{ADE} + \cos\angle\mathrm{ADB} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{x^2 - \frac{27}{4}}{3x} + \frac{x^2 - \frac{147}{4}}{7x} = 0$$

これより

$$\frac{10}{21}x^2 - \frac{30}{4} = 0 \qquad \therefore \quad x = \sqrt{\frac{30}{4}\cdot\frac{21}{10}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

すなわち, $\mathrm{AD} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ である. (答)

(b) $\mathrm{CA} = y$, $\mathrm{EC} = z$ とおくと, $\angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{EAC}$ であるから

$$\mathrm{DE} : \mathrm{EC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AC} \qquad \therefore \quad \frac{3}{2} : z = \frac{3\sqrt{7}}{2} : y$$

よって

$$y = \sqrt{7}z \quad \cdots ①$$

次に, 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{AEB} = \frac{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{EB}^2 - \mathrm{BA}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB}} = \frac{9 + 25 - 49}{2\cdot3\cdot5} = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \angle\mathrm{AEB} = 120^\circ$$

なので, $\angle\mathrm{AEC} = 60^\circ$ となる. よって, 余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AE}^2 + \mathrm{EC}^2 - 2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EC}\cos\angle\mathrm{AEC} \\ &= 9 + z^2 - 2\cdot3z\cdot\frac{1}{2} = z^2 - 3z + 9\end{aligned}$$

$$\therefore \quad y^2 = z^2 - 3z + 9$$

これに ①を代入して

$$7z^2 = z^2 - 3z + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2z^2 + z - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(2z+3) = 0$$

よって, $z = 1$ となり, これと ①から

$$y = \sqrt{7} \qquad \therefore \quad \mathrm{CA} = \sqrt{7}, \quad \mathrm{EC} = 1 \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の外接円の半径を R とおく．すると，正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

また，余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

これらを $\sin C(\cos A + \cos B) = \sin A + \sin B$ に代入すると

$$\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R}$$

で，これを変形していくと

$$\begin{aligned}
& \frac{b^2+c^2-a^2}{2b} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} = a+b \\
\Leftrightarrow \quad & a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) = 2ab(a+b) \\
\Leftrightarrow \quad & a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (a^2+b^2)(a+b)-(a+b)c^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (a+b)(a^2+b^2-c^2) = 0
\end{aligned}$$

そして，$a+b>0$ なので，$a^2+b^2=c^2$ となる．よって，三角形 ABC は ∠C が直角の直角三角形である．　　(答)

(2) $\angle C = 90^\circ$ なので，三角形 ABC の内心を I とおくと右下図より

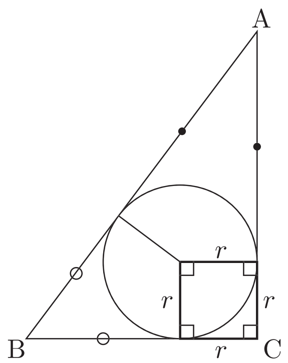
$$2r = \mathrm{BC} + \mathrm{CA} - \mathrm{AB}$$

ここで，三平方の定理から

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

よって

$$r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad \text{(答)}$$



【4】(1) C_1 の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

と変形できるから，C_1 の中心の座標は $(2,\ 1)$ であり，半径は 2 である．一方，C_2 の中心は原点であり，半径は 2 である．すると，2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

であり,

$$(\text{半径の差})=0,\quad (\text{半径の和})=4$$

なので,

$$(\text{半径の差})<(\text{中心間の距離})<(\text{半径の和})$$

となるから，2 円は相異なる 2 つの共有点をもつ. 〔証明終〕

(2) 2 円の共有点を通る円の方程式は,

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0 \quad (k \fallingdotseq -1) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

のいずれかの形で表されるが，題意の円は原点を通るので，C_2 自身ではない．したがって，題意の円の方程式は,

$$x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0$$

と表すことができる．そして，これが原点を通るから

$$1-4k=0 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{4}\ (\fallingdotseq -1)$$

よって，求める円の方程式は,

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-4x-2y+1+\frac{1}{4}(x^2+y^2-4)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+y^2-\frac{16}{5}x-\frac{8}{5}y=0 \end{aligned}$$

＜解説＞一般に，図形 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ が共有点 $(X,\ Y)$ をもつとき,

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)+kg(x,\ y) \quad (k\ \text{は実数の定数})$$

に対して，方程式 $F(x,\ y)=0$ で表される図形を考えると,

$$f(X,\ Y)=g(X,\ Y)=0 \qquad \therefore\quad F(X,\ Y)=0$$

であるから，この図形はつねに 2 つの図形 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ の共有点を通る．本問の場合，方程式

$$x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0 \quad (k \fallingdotseq -1)$$

で表される図形は，C_1，C_2 の共有点をつねに通る．そして，$k \fallingdotseq -1$ より x^2, y^2 の係数はともに等しく，また 0 ではないので，この図形は円を表すことになる．

ただし, この方程式によって，2 円の共有点を通るすべての円が表現できるわけではない. つまり，$x^2+y^2-4=0$ だけは上の方程式では表すことができないので，［解答］では 2 つの方程式を示し，原点を通ることから $x^2+y^2-4=0$ を除外しているわけだ.

【5】(1) 直線 PQ を $y = 2x + b$ とする.

$y = x^2$ と交わるために,

$$x^2 - 2x - b = 0 \quad \cdots ①$$

これが異なる 2 つの実数解をもたねばならないので, 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 1 + b > 0 \qquad \therefore \quad b > -1$$

①の解を $\alpha,\ \beta$ とすると,

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -b$$

また, 交点は $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ となるので, 中点を $(X,\ Y)$ とすると,

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad Y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

ゆえに,

$$X = 1, \quad Y = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{4 + 2b}{2} = 2 + b$$

$b > -1$ より,

$$Y > 1$$

よって, 求める軌跡は,

半直線 : $x = 1 \quad (y > 1)$

(2) 直線 PQ を $y = m(x + 1)$ とおくと, (1) と同様に,

$$x^2 - mx - m = 0 \quad \cdots ①$$

これが異なる 2 つの実数解をもつには,

$$D = m^2 + 4m > 0 \qquad \therefore \quad m < -4,\ 0 < m \quad \cdots ②$$

①の解を $\alpha,\ \beta$ とすると,

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = -m$$

中点を $(X,\ Y)$ とすると,

$$X = \frac{m}{2}, \quad Y = \frac{m^2 + 2m}{2} = 2X^2 + 2X$$

②より,

$$2X < -4,\ 0 < 2X \qquad \therefore \quad X < -2,\ 0 < X$$

よって, 求める軌跡は,

放物線 : $y = 2x^2 + 2x \quad (x < -2,\ 0 < x)$

(3) 点 P を $(X,\ Y)$ とおき, P を通る直線を $y=m(x-X)+Y$ とする.
これが $y=x^2$ と接するので,

$$x^2-mx+mX-Y=0 \quad \cdots ①$$

より,

$$D=m^2-4(mX-Y)=0 \quad \cdots ②$$

②の解を $m_1,\ m_2$ とすると,

$$m_1+m_2=4X, \quad m_1m_2=4Y$$

2 つの接線が直交するということは, $m_1m_2=-1$ が必要十分条件である.
よって, 求める軌跡は,

$$4Y=-1 \qquad \therefore \quad \text{直線}: y=-\frac{1}{4}$$

【6】

$$x^2+y^2-2(x+y)-6=0 \quad \cdots(*)$$

(a)

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2$$

は円であり, C とおく.

$x+y=k$ とおくと, これは直線であり, l とおく. l と C が共有点をもつためには C の中心 $(1,\ 1)$ と l との距離が C の半径 $2\sqrt{2}$ 以下であればよいから,

$$\begin{aligned}\frac{|1+1-k|}{\sqrt{1+1}} \leqq 2\sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad |k-2| \leqq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -4 \leqq k-2 \leqq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leqq k \leqq 6 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leqq x+y \leqq 6\end{aligned}$$

≪別解≫ $x+y=k \quad \cdots①$ とおいて, $(*)$ から

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2(x+y)-6=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+y)^2-2xy-2(x+y)-6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad k^2-2xy-2k-6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad xy=\frac{1}{2}(k^2-2k-6) \quad \cdots②\end{aligned}$$

①,②をみたす実数 $x,\ y$ が存在するためには, t の 2 次方程式

$$t^2-kt+\frac{1}{2}(k^2-2k-6)=0$$

が実数解をもてばよく,

$$D=k^2-2(k^2-2k-6) \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqq k \leqq 6$$

(b)

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2-2xy-2(x+y)-6=0$$

ここで, $x+y=k$ とおくと,

$$k^2-2xy-2k-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2xy=-k^2+2k+6$$

$-2 \leqq k \leqq 6$ のとき (1) より実数 $x,\ y$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned}x+y-2xy &= k-k^2+2k+6 \\ &= -k^2+3k+6 \\ &= -\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4} \quad (-2 \leqq k \leqq 6)\end{aligned}$$

$-2<\dfrac{3}{2}<6$ より, $k=x+y=\dfrac{3}{2}$ のとき, $x+y-2xy$ は最大値 $\dfrac{33}{4}$ をとる.

問題

【1】曲線 $C : y = f(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x-a)$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax$$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3 - at^2)$ における接線を l とすると

$$l : y = (3t^2 - 2at)(x-t) + t^3 - at^2 = (3t^2 - 2at)x - 2t^3 + at^2 \quad \cdots ①$$

l が $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通るとき

$$1 = -2t^3 + at^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^3 - at^2 + 1 = 0 \quad \cdots Ⓐ$$

$g(t) = 2t^3 - at^2 + 1$ とおくと

「点 A から C へ 2 本だけ接線が引ける」

$\Leftrightarrow$ 「接点 P が 2 つだけある」
$\Leftrightarrow$ 「Ⓐがちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ」
$\Leftrightarrow$ 「$g(t)$ が極値をもち，一方が 0」

だから

$$g'(t) = 6t^2 - 2at = 6t\left(t - \frac{1}{3}a\right)$$

$g'(t) = 0$ とすると

$$t = 0,\quad \frac{1}{3}a$$

であるが，$g(t)$ は極値をもつので

$$\frac{1}{3}a \fallingdotseq 0 \qquad \therefore \quad a \fallingdotseq 0 \quad \cdots ②$$

$g(0) = 1 \fallingdotseq 0$ だから

$$g\left(\frac{1}{3}a\right) = -\frac{1}{27}a^3 + 1 = 0 \quad \cdots ③$$

③より

$$a^3 - 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-3)(a^2 + 3a + 9) = 0$$

$a^2 + 3a + 9 = \left(a + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} > 0$ より

$$a = 3$$

$a = 3$ を Ⓐ に代入して

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)^2(2t+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,\ -\frac{1}{2}$$

よって

$$a = 3,\quad l : \begin{cases} y = -3x + 1 & (t = 1) \\ y = \dfrac{15}{4}x + 1 & \left(t = -\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 被積分関数を展開すると

$$(x^2+ax+b)^2 = x^4+2ax^3+(2b+a^2)x^2+2abx+b^2$$

これより，I を計算すると

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 \{x^4+\left(2b+a^2\right)x^2+b^2\}\,dx \\ &= 2\left(\frac{1}{5}+\frac{2b+a^2}{3}+b^2\right) = \frac{2}{3}a^2+2b^2+\frac{4}{3}b+\frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{3}a^2+2\left(b+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45} \end{aligned}$$

よって，I を最小にする a，b の値は

$$a=0,\ b=-\frac{1}{3} \qquad (\text{答})$$

(2) 次のように場合分けして考える．

(i) $a \geqq 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において常に $x-a \leqq 0$ が成り立つから

$$f(a)=\int_0^1 -x(x-a)dx = \int_0^1 (ax-x^2)dx = \frac{a}{2}-\frac{1}{3}$$

よって，$f(a)$ は $a \geqq 1$ の範囲において増加関数である．

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq a & \text{ならば} \quad x-a \leqq 0 \\ a \leqq x \leqq 1 & \text{ならば} \quad x-a \geqq 0 \end{cases}$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned} f(a) &= -\int_0^a x(x-a)\,dx + \int_a^1 x(x-a)\,dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1 \\ &= -\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

a で微分して

$$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$$

以上 (i)，(ii) より，$a \geqq 0$ の範囲における $f(a)$ の増減表は次のようになる．

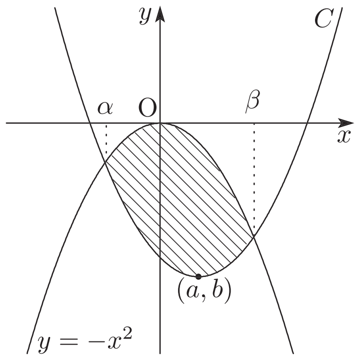
a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

よって，求める最小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6} \qquad (\text{答})$$

【3】C の頂点の座標を $(a,\ b)$ とすると

$$C : y = (x-a)^2 + b$$



となる．これと $y = -x^2$ が 2 点で交わるので，y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} & (x-a)^2 + b = -x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0 \ \cdots ① \end{aligned}$$

が異なる 2 実数解をもつ．よって

$$a^2 - 2(a^2 + b) = -a^2 - 2b > 0$$

このもとで，①の解を

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{-a^2 - 2b}}{2}, \quad \beta = \frac{a + \sqrt{-a^2 - 2b}}{2}$$

とすると，2 曲線で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta [-x^2 - \{(x-a)^2 + b\}]\,dx &= \int_\alpha^\beta -(2x^2 - 2ax + a^2 + b)\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{-2(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} \end{aligned}$$

これが $\dfrac{1}{3}$ に等しいから

$$(\beta - \alpha)^3 = 1 \qquad \therefore\ \ \beta - \alpha = 1$$

よって，$\sqrt{-a^2 - 2b} = 1$ となり，これより

$$-a^2 - 2b = 1(>0) \qquad \therefore\ \ b = -\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$$

よって，C の頂点の軌跡は

放物線 $y = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$ 　　(答)

【4】(1) 1 と 9 の間に k 個の数を並べて，これらが公差 d の等差数列をなすようにすると，初項 1，末項 9，項数 $k+2$ の等差数列より

$$\text{和 } S=\frac{k+2}{2}(1+9)=350 \qquad \therefore \quad k=68 \qquad \text{(答)}$$

そして

$$a_{k+2}=a_{70}=1+(70-1)d=9 \qquad \therefore \quad d=\frac{8}{69} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a>0,\ b<0,\ -8<0$ より，等比中項は a であり

$$a^2=-8b \quad \cdots ①$$

a は等差中項にはならないので，b が等差中項のとき

$$2b=a-8 \quad \cdots ②$$

①，②より

$$a^2=-4(a-8)$$
$$\therefore \quad a^2+4a-32=(a+8)(a-4)=0$$

$a>0$ より

$$a=4 \qquad \therefore \quad b=-2$$

-8 が等差中項のとき

$$-16=a+b \quad \cdots ③$$

①，③より

$$a^2=-8(-a-16) \qquad \therefore \quad (a+8)(a-16)=0$$

$a>0$ より

$$a=16 \qquad \therefore \quad b=-32$$

以上まとめて

$$(a,\ b)=(4,\ -2),\ (16,\ -32) \qquad \text{(答)}$$

【5】(1)　(i) $n \geqq k$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= (n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k) \\ &= \frac{\{(n-1)+(n-k)\}k}{2} = kn - \frac{1}{2}k(k+1) \end{aligned}$$

(ii) $1 \leqq n \leqq k$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-\{n-(n+1)\}-\cdots-(n-k) \\ &= (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0+1+\cdots+(k-n) \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(k-n)(k-n+1)}{2} \\ &= n^2-(k+1)n+\frac{1}{2}k(k+1) \end{aligned}$$

以上まとめて

$$\begin{cases} n \geqq k \text{ のとき} & S_n = kn - \dfrac{1}{2}k(k+1) \\ 1 \leqq n \leqq k \text{ のとき} & S_n = n^2-(k+1)n+\dfrac{1}{2}k(k+1) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1)(i) より，S_n は $n \geqq k$ の範囲では単調に増加する．したがって，$1 \leqq n \leqq k$ の場合だけを調べればよい．すると

$$\begin{aligned} S_n &= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{4}(k+1)^2 \\ &= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(k^2-1) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{cases} k \text{ が奇数のとき} \quad S_n\text{の最小値}: \dfrac{1}{4}(k^2-1) \ \left(n=\dfrac{k+1}{2}\right) \\ k \text{ が偶数のとき} \quad S_n\text{の最小値}: \dfrac{1}{4}k^2 \ \left(n=\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k}{2}+1\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ より $(3+2\sqrt{2})^{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2}$ なので

$$\begin{aligned} a_n + b_n\sqrt{2} &= (3+2\sqrt{2})(a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2}) \\ &= (3a_{n-1} + 4b_{n-1}) + (2a_{n-1} + 3b_{n-1})\sqrt{2} \end{aligned}$$

そして，a_n，b_n，a_{n-1}，b_{n-1} は自然数だから

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases} \quad (n \geqq 2) \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果を用いると，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} {a_n}^2 - 2{b_n}^2 &= (3a_{n-1} + 4b_{n-1})^2 - 2(2a_{n-1} + 3b_{n-1})^2 \\ &= (9{a_{n-1}}^2 + 24a_{n-1}b_{n-1} + 16{b_{n-1}}^2) \\ &\qquad -2(4{a_{n-1}}^2 + 12a_{n-1}b_{n-1} + 9{b_{n-1}}^2) \\ &= {a_{n-1}}^2 - 2{b_{n-1}}^2 \end{aligned}$$

となるから，数列 $\{{a_n}^2 - 2{b_n}^2\}$ は定数列である．そして，$a_1 + b_1\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ だから

$$a_1 = 3,\ b_1 = 2 \qquad \therefore\ {a_1}^2 - 2{b_1}^2 = 3^2 - 2\cdot 2^2 = 1$$

したがって

$${a_n}^2 - 2{b_n}^2 = 1 \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の結果より

$$(a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = 1$$

となるから

$$a_n - b_n\sqrt{2} = \frac{1}{a_n + b_n\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})}$$

よって

$$\left|\frac{1}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})}\right| < \frac{1}{10000}$$

をみたすような a_n, b_n を求めることを考える．

いま，(1) の漸化式と $a_1 = 3$，$b_1 = 2$ から $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の各項を求めると

$$\begin{cases} a_2 = 3a_1 + 4b_1 = 3\cdot 3 + 4\cdot 2 = 17 \\ b_2 = 2a_1 + 3b_1 = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12 \end{cases}$$

また

$$\begin{cases} a_3 = 3a_2 + 4b_2 = 3\cdot 17 + 4\cdot 12 = 99 \\ b_3 = 2a_2 + 3b_2 = 2\cdot 17 + 3\cdot 12 = 70 \end{cases}$$

すると

$$\begin{aligned} b_3(a_3 + b_3\sqrt{2}) &= 70\cdot(99 + 70\sqrt{2}) \\ &> 70\cdot(99 + 70) \quad (\because \sqrt{2} > 1) \\ &= 70\cdot 169 \ = \ 11830 \ > \ 10000 \end{aligned}$$

だから

$$\frac{1}{b_3(a_3 + b_3\sqrt{2})} < \frac{1}{10000}$$

よって，$n = 3$ のとき与えられた不等式が成り立つ．このとき

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{99}{70} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくと,

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \quad \cdots ①$$

一方,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

であるから,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{BG}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{b} = \dfrac{\vec{c} - 2\vec{b}}{3} \\ \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{c} = \dfrac{\vec{b} - 2\vec{c}}{3} \end{cases}$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \mathrm{BG}^2 + \mathrm{CG}^2 + 4\mathrm{AG}^2 \\ = & |\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{CG}}|^2 + 4|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 \\ = & \frac{|\vec{c}|^2 - 4(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4|\vec{b}|^2}{9} + \frac{|\vec{b}|^2 - 4(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4|\vec{c}|^2}{9} \\ & \qquad + 4 \cdot \frac{|\vec{b}|^2 + 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + |\vec{c}|^2}{9} \\ = & \frac{9|\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2}{9} = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

よって, ①, ② より,

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BG}^2 + \mathrm{CG}^2 + 4\mathrm{AG}^2$$

〔証明終〕

＜解説＞ $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ であることに注意してほしい. これより, 例えば, $|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2$ は,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2 &= \left| \frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{3} \right|^2 = \frac{(\vec{c} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{c} - 2\vec{b})}{9} \\ &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{c} - 4(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4(\vec{b} \cdot \vec{b})}{9} \\ &= \frac{|\vec{c}|^2 - 4(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 4|\vec{b}|^2}{9} \end{aligned}$$

となる. 他も同様である.

【2】 A を始点とするベクトルを考える.

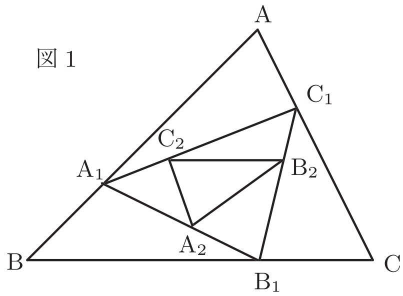
まず, 点 B_2 が線分 B_1C_1 を 2 : 1 に内分することから,

$$\overrightarrow{AB_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC_1}\quad\cdots①$$

点 C_2 についても同様に考えて,

$$\overrightarrow{AC_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}\quad\cdots②$$

図 1



ここで, ①② の右辺にある各ベクトルを, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表すと,

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

これらを①② に代入して,

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB_2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AC_2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

これらより,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_2C_2}&=\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AB_2}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}-\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

よって, 2 つの辺 BC, B_2C_2 の長さの間には, 次の関係がある.

$$B_2C_2=\frac{1}{3}BC$$

他の辺についても全く同様にして,

$$C_2A_2=\frac{1}{3}CA,\quad A_2B_2=\frac{1}{3}AB$$

以上より, △ ABC と △ $A_2B_2C_2$ において, 対応する 3 辺の比がそれぞれ等しいから,

△ ABC と△ $A_2B_2C_2$は相似である. 〔証明終〕

【3】条件式より,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\\
\Leftrightarrow\ &(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})-2\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})=0\\
\Leftrightarrow\ &(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b})=0\\
\Leftrightarrow\ &(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\cdot\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}}{2}-\overrightarrow{b}\right)=0 \quad\cdots①
\end{aligned}$$

ここで, AC の中点を M とすると,

$$\begin{cases}
\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\
\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}}{2}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BM}}
\end{cases}$$

であるから,

$$① \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CA}\perp\mathrm{BM}$$

よって, $\triangle$ ABC は BA = BC なる二等辺三角形である.

≪別解≫ 次の変形に気づくと簡単である. 条件式より,

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$$

であるから, 両辺に $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}$ を加えると,

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}\\
\Leftrightarrow\ &|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}|^2\\
\Leftrightarrow\ &|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|
\end{aligned}$$

よって, $\triangle$ ABC は BA = BC なる二等辺三角形である.

【4】(1) 2 直線の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}|\,|\overrightarrow{u_2}|} = \frac{2-1+6}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$\cos\theta > 0$ より, θ は鋭角であるから

$$\alpha = \theta \qquad \therefore \quad \cos\alpha = \cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

(2) $\overrightarrow{u_1} = (2,\ 1,\ 3)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,\ -1,\ 2)$ より明らかに

$$\overrightarrow{u_1} \not\parallel \overrightarrow{u_2}$$

よって, l_1, l_2 は平行でない. したがって, あとはこれらの 2 直線が交点をもたないことを示せばよい. l_1 上の点 P の座標を媒介変数 s を用いて表すと

$$\mathrm{P}(2s+1,\ s-1,\ 3s+2)$$

一方, l_2 上の点 Q の座標を媒介変数 t を用いて表すと

$$\mathrm{Q}(t-1,\ -t+2,\ 2t-1)$$

これらが一致すると仮定すると

$$\begin{cases} 2s+1 = t-1 & \cdots ① \\ s-1 = -t+2 & \cdots ② \\ 3s+2 = 2t-1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ②を解いて

$$s = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{8}{3}$$

ところが, これらは③をみたさない. すなわち, ①, ②, ③をすべてみたす実数 s, t は存在しないから, 2 直線 l_1, l_2 は交点をもたない.

以上より, l_1, l_2 は同一平面上にない. 〔証明終〕

＜解説＞空間における 2 直線が同一平面上にないことを,「2 直線はねじれの位置にある」という.

【5】$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{\vec{a}+5\vec{c}}{6}$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{3}\vec{a}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PS}}\\ &= \frac{1}{3}\vec{a}+\alpha\left(\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)+\beta\left(\frac{\vec{a}+5\vec{c}}{6}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6}\beta\right)\vec{a}+\frac{3}{4}\alpha\vec{b}+\frac{5}{6}\beta\vec{c} \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

R は BC 上にあるので, $(*)$ から,

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\alpha-\dfrac{1}{6}\beta=0 & \cdots ① \\ \dfrac{3}{4}\alpha+\dfrac{5}{6}\beta=1 & \cdots ②\end{cases}$$

①, ②を解いて,

$$\alpha=\frac{8}{11},\quad \beta=\frac{6}{11}$$

(2) (1) の $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{8}{11},\ \dfrac{6}{11}\right)$ を $(*)$ へ代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{6}{11}\vec{b}+\frac{5}{11}\vec{c}=\frac{6\vec{b}+5\vec{c}}{5+6}$$

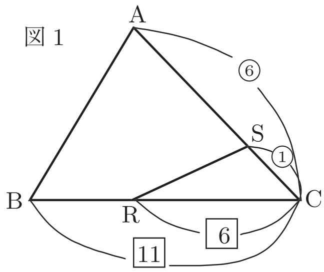
よって,

$$\mathrm{BR}:\mathrm{RC}=5:6$$

(3) 図 1 より, △ CSR と△ CAB の面積比は,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CSR}:\triangle\mathrm{CAB} &= (6\times1):(11\times6)\\ &= 1:11 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

図 1



また, 点 Q, O から平面 ABC に下ろした垂線の長さの比は,

$$\mathrm{QB}:\mathrm{OB}=1:4 \quad \cdots ④$$

③, ④より, 求める体積比は,

$$\begin{aligned}(\text{四面体 QRCS}):(\text{四面体 OABC}) &= \left(\frac{1}{3}\times1\times1\right):\left(\frac{1}{3}\times11\times4\right)\\ &= 1:44\end{aligned}$$

【6】(1) O を始点として位置ベクトルをそれぞれの小文字で表す.

≪証明≫

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{QP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である.

(2) ①より, AQ と OP は交点をもち, それを G_1 とすると,

$$\mathrm{OG}_1 : \mathrm{G}_1\mathrm{P} = \mathrm{OA} : \mathrm{QP} = 3 : 1 \quad \cdots ②$$

同様に, OP と BS は G_2 で交わり,

$$\mathrm{OG}_2 : \mathrm{G}_2\mathrm{P} = 3 : 1 \quad \cdots ③$$

同様に, OP と CR は G_3 で交わり,

$$\mathrm{OG}_3 : \mathrm{G}_3\mathrm{P} = 3 : 1 \quad \cdots ④$$

②,③,④より,

$$\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2 = \mathrm{G}_3$$

4 本の線分 OP, AQ, BS, CR は 1 点で交わり, その交点は各線分を 3 : 1 に内分する.

≪参考≫ この交点を四面体の重心という.

添削課題

【1】$\angle$A, $\angle$B の 2 等分線と OB，OA との交点をそれぞれ C, D とすると (図 1)

$$\begin{cases} \mathrm{OC : CB = AO : AB} = 3 : 2 \\ \mathrm{OD : DA = BO : BA} = 5 : 4 \end{cases}$$

が成り立つから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

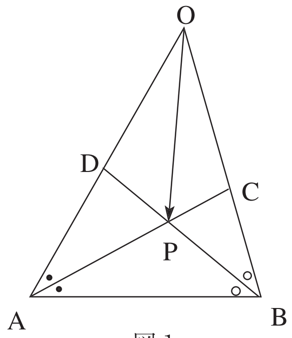


図 1

よって

$$\mathrm{AP : PC} = s : (1-s), \quad \mathrm{BP : PD} = t : (1-t)$$

とすると

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{5t}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}} & \cdots ② \end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$1 - s = \frac{5t}{9}, \ \frac{3s}{5} = 1 - t \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{2}{3}, \ t = \frac{3}{5}$$

これを①(または②) に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

＜解説＞△ ABC において，$\angle$A の 2 等分線と辺 BC との交点を P とすると (図 2)

$$\mathrm{AB : AC = BP : PC}$$

が成り立つ．先の解答ではこれを用いたが，証明すると次のようになる．

≪証明 1 ≫△ ABP，△ APC の面積をそれぞれ S_1, S_2 とおくと，2 つの三角形は高さが等しいから

$$S_1 : S_2 = \mathrm{BP : PC} \quad \cdots ③$$

一方

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AP} \sin \angle\mathrm{BAP}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{AP} \sin \angle\mathrm{CAP}$$

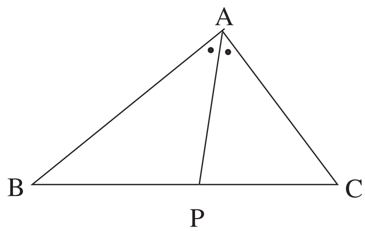


図 2

が成り立ち，かつ $\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{CAP}$ であるから

$$S_1 : S_2 = \mathrm{AB : AC} \quad \cdots ④$$

したがって，③，④より

$$\mathrm{AB : AC = BP : PC}$$

〔証明終〕

≪証明 2 ≫いま，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで長さが 1 のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ とすると (図 3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

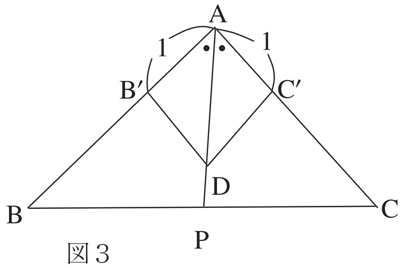


図３

が成り立つ．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}} + \overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とすると，四角形 AB′DC′ はひし形であるから

$$\angle \mathrm{B'AD} = \angle \mathrm{C'AD}$$

すなわち，D は ∠A の二等分線上にある．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}} = t(\overrightarrow{\mathrm{AB'}} + \overrightarrow{\mathrm{AC'}}) = t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\right)$$

となるので

$$\mathrm{BP} : \mathrm{CP} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} : \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

〔証明終〕

M2T

高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	